

doi: 10.19920/j.cnki.jmsc.2022.09.001

智能系统软件的定价模式：数据驱动升级视角^①

戴 军¹, 窦一凡^{1*}, 黄丽华¹, 张睿诚²

(1. 复旦大学管理学院, 上海 200433; 2. 上海大学理学院, 上海 200444)

摘要: 智能系统软件是指能够结合客户的使用数据来实现持续升级的软件系统。当前 5G 技术和工业物联网的飞速发展, 大量的系统数据被采集并被用于智能系统软件的算法训练, 从而帮助实现质量提升。在这一背景下, 以 SAP 和 Oracle 等为代表的智能系统软件提供商积极从传统的自有模式转型为订阅服务模式。本文采用博弈论建模的研究方法来探索了这一定价模式变化趋势的合理性。相比文献, 本文提出用户数据积累越多则软件升级幅度越大。研究发现, 在每一类定价模式下, 外部的市场特征和内部的升级能力都对于智能系统软件的价格优化有着直接影响。进一步地, 本文发现订阅和自有模式都有可能为最优, 这取决于软件提供商是否需要对于未来价格进行承诺。这一结论对于智能互联时代的系统软件提供商在商业模式设计方面提供了理论依据。

关键词: 系统软件; 人工智能; 信息产品定价; 商业模式选择

中图分类号: F272.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2022)09-0001-14

0 引 言

随着人工智能技术在企业管理中的日益深入和广泛应用, 企业软件行业(enterprise software)正在快速地向智能化的方向发展。传统的企业软件以企业资源规划系统(enterprise resource planning, ERP)为代表, 其主要功能是围绕各类企业经营活动来整合业务流程数据, 并通过信息共享和协作来提升生产经营效率。而基于各类机器学习算法的人工智能技术正在为企业软件市场带来革命性的变化。例如, 全球知名的提供商 SAP 的企业软件已经能够通过各类人工智能算法来进行精准的预测分析和全面的管理支持, 诸如自动化的供应链决策和生产监控、制造数据和市场数据的实时连接建模、基于聊天机器人和图像识别技术的企业知识管理、内部查询和财务流程智能化等——这些都是 ERP 等传统系统软件无法完成

的功能。在智能系统软件的全球发展格局当中, 我国正走在世界前列——以制造业为例, 我国企业正在快速普及或升级更加智能化的生产系统, 例如制造执行系统(manufacturing execution system, MES)和生产运营管理系统(manufacturing operation management, MOM)等。相比于 ERP 收集的业务数据, 这些系统在底层直接与生产过程所涉及的所有设备的传感器相连, 能够实时汇集海量数据并用于机器学习算法分析和优化分析。这些预测和分析结果最终反馈到自动化工业设备和机器人控制系统中, 帮助实现“智慧矿山”和“无人工厂”等智能化管理场景^[1]。伴随着 5G 和物联网技术的深度普及, 智能系统软件将逐渐贯穿于许多行业的设计、生产、管理和服务等各个环节。

然而, 在人工智能时代, 企业软件厂商面临着全新的挑战——数据。实现智能化的处理预测需

① 收稿日期: 2020-03-27; 修订日期: 2020-11-11。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71672042; 91746302; 71822201)。

通讯作者: 窦一凡(1985—), 男, 陕西西安人, 博士, 教授, 博士生导师。Email: yfdou@fudan.edu.cn

要以大量数据为基础,因为所有的人工智能算法都需要基于数据来支持算法的训练和反馈过程^[2].2020年的世界人工智能大会上,SAP的全球总裁 Klein 表示,人工智能的关键成功因素就是数据,企业软件只有在获得企业底层数据的前提下才能提高管理的整体智能水平和绩效表现.由此可见,相比于传统软件的“开箱即用”,智能软件的一项鲜明的特殊之处在于对数据的依赖.基于这一趋势,本文以智能系统软件对于数据的依赖性作为切入点,考察了软件工业当前面临的热点问题:基于数据和算法的软件是否更适合订阅定价模式(subscription model),而非企业传统的软件合约模式(on-premise model)?结论表明,在考虑上述影响时,订阅模式确实体现了更加明显的优势,然而也并非在所有情形下都优于自有模式.这一结论也对于软件提供商当前的订阅化转型趋势提供了理论依据.

具体而言,经济学博弈模型的研究方法考虑了两方面的重要特征:外部市场的用户差异性以及内部的数据驱动升级能力.其中的数据驱动升级能力代表的是软件提供商利用积累的数据来改进算法效果并提升软件质量的能力,这也是主要创新之处.博弈分析结果表明,内外部的因素确实对于商业模式的选择都具有重要的影响作用.考虑到博弈模型的抽象性与现实的智能系统软件市场的复杂性之间的潜在差异,和模型及结论最相关的智能系统软件细分主要是应用于生产制造行业,如上文提到的MES、MOM以及来自ERP厂商的生产制造行业的人工智能解决方案等,都需要从生产制造过程各类设备和工具实时收集大量数据,并用于算法的持续改进.

1 文献综述

主要着眼于智能系统软件的一类独特之处——软件提供商依赖于用户在使用过程中产生的数据来持续提升和改进产品功能.与这一特征

相关的文献包括软件升级管理策略和软件产品的网络外部性等两个方面.同时,研究问题是订阅模式和自有模式的对比,这也是信息系统经济学的文献在近年来的热点话题.因此,本节将从软件升级、网络外部性和商业模式对比等三个角度对于国内外文献进行综述.

首先,软件升级的相关文献与研究关系最为紧密,而研究重点考察的数据驱动的软件升级与传统的通过研发投入带来的升级具有显著的不同.早期的软件升级问题关注升级前后的软件兼容性^[3].近年来的研究成果则从不同的角度来研究了升级带来的影响,例如考虑用户的体验学习过程^[4],市场先后进入者的兼容和竞争问题^[5,6],存在纵向差异化的企业之间相互竞争时软件升级所发挥的作用^[7],以及软件的动态定价和发布渠道等问题^[8,9].在这些研究当中,升级的幅度大小可分为外生假定和内生优化(例如由企业的研发投入决定)两种^[4],同时升级的类型也分为强制性升级和自选升级^[7].相比之下,研究的智能系统软件服务存在相似之处——智能系统软件服务的升级过程是内生的,但并非是来自内部封闭的研发过程,而是取决于早期用户所贡献的数据积累.

其次,当智能系统软件的用户总数更大,积累的数据越多,每个用户也能从中受益更多,这一规律与网络外部性密切相关但并不相同.信息系统领域对于网络外部性的相关研究可以追溯到上世纪对于网络外部性与信息技术采纳的一系列研究成果^[10,11],也有许多软件商业模式的相关文献考虑了网络外部性的影响.但与模型相比,网络外部性的存在虽然使得软件的用户从中受益^[12],但网络外部性无法影响产品本身功能,因此也不存在“用户选择升级”的过程.因此,相比于这一类文献,主要区别是考虑了产品质量本身的变化,特别是在自有模式下,遵循软件行业的实践允许用户自选升级,意味着不同的用户可能使用的产品质量不同,这是网络外部性相关文献并未考虑的.上述两方面的研究与本研究的关系可以用图1进行总结.

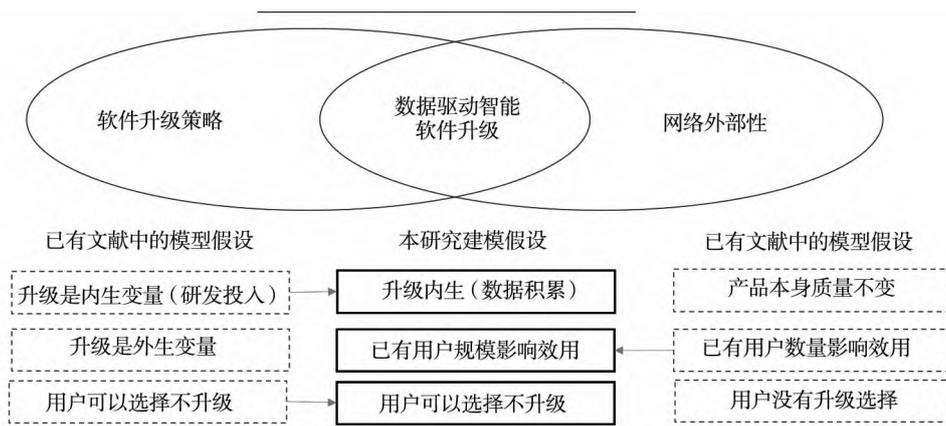


图 1 模型的创新之处与已有文献的联系

Fig. 1 The innovation of the model and the relationship with the existing literature

最后,所考察的订阅模式与自有模式的对比与信息系统经济学当中对于软件及服务(software as a service, SaaS) 的商业模式研究密切相关. 在过去的十余年里,伴随着云计算技术的蓬勃发展, SaaS 及其商业模式也得到了学术界的高度关注^[13-15]. 所考虑的订阅模式可以看作是 SaaS 服务收费模式当中的按照时间收取订阅式费用. 从文献的角度来看,这种形式在已有研究当中被普遍使用^[16]; 而从企业实践来看,根据行业特征的不同, SaaS 的商业模式多种多样, 订阅费形式例如适用于全天候实时收集大量数据的工业智能场景, 而类似客户关系管理类智能软件(如客服机器人和自然语言分析等) 则大多按照用户数量计费. 从经济学的视角来看, SaaS 可以视作租赁形式在软件工业的一种实践. 在这当中,经典的“科斯假说”^[17] 认为,相比于销售形式,租赁可以有效地控制时间不一致性,从而为卖方带来更高的收益. 然而,软件产品的复杂性会使得这一结论出现变化. 例如,有研究在契约设计的框架下对比了版权定价和按使用量定价的两种模式,研究发现在已有的单一价格合同上增加使用量计费部分总是可以增加软件厂商的收益^[18]; 如果考虑用户的疲劳,则传统的销售模式也依然具有更高的收益^[16], 以及考虑竞争和其他市场结构因素对于价格模式的影响等^[19, 20]. 延续这一系列的文献思路,基于智能软件对于数据的依赖性这一新特征,再次对比了订阅模式和自有模式的区别. 研究的结果也发现,二者依然都有可能成为最优策略.

2 模型假设

市场由一个软件提供商(以下简称“提供商”)和一组该软件的潜在用户企业(以下简称“用户”)组成. 按照企业软件行业的常见做法,根据生产经营规模和支付能力的不同将用户分成高端用户和低端用户两类. 经过归一化处理,高端用户的数量为 $x \in (0, 1)$, 而低端客户的数量为 $1 - x$. 为了刻画不同类型用户在支付能力方面的差异,假设低端用户相对于高端用户的支付能力比例为 $\theta \in (0, 1)$. 随着 θ 的值越来越小, 高低端用户之间的差异性也越来越大.

借鉴文献中的常见假设^[9, 16], 将软件的生命周期简化为两个周期. 相比于已有的文献,主要新意是假设提供商可以基于第 1 周期已有客户所积累的数据来改进持续软件功能,从而提升第 2 周期的软件质量. 这个过程可以表达为下式

$$q_2 = q_1(1 + \delta N_1) \tag{1}$$

其中 N_1 代表的是第 1 周期使用了该软件的客户数量, q_1 和 q_2 分别对应的是第 1 周期和第 2 周期的软件质量, 系数 δ 则衡量了升级幅度的大小(后文简称为升级能力). 如果系数 δ 更大, 则意味着企业在智能化方面的积累更加充分, 能够更加充分利用各类用户数据来持续改进算法精准度和软件功能. 然而, 如果升级能力过高, 则第 1 周期的软件质量的利润影响可忽略不计(即彻底变为数据收集工具). 为了避免此类极端现象, 仅考虑了 $\delta \in [0, 1)$ 的情形.

在每个周期内,用户从使用软件的过程中获得收益,这个收益以软件质量和用户支付能力的乘积来表示.相应地,用户需要为上述收益支付对应的费用,而费用取决于提供商选择的商业模式.本文考虑两类典型的商业模式:

1) 订阅模式(subscription model): 在订阅模式下,用户需要在使用的每周期都支付订阅费用,第1周期和第2周期的订阅费分别为 r_1 和 r_2 . 订阅模式的一个优势在于,升级的费用已经包含在客户支付的订阅费用当中.因此,用户在第1周期面临以下选择及其对应的效用(以低端客户为例):

两周期都订阅

$$(q_1\theta - r_1) + (q_2\theta - r_2) \quad (2)$$

仅第2周期订阅

$$q_2\theta - r_2 \quad (3)$$

仅第1周期订阅

$$q_1\theta - r_1 \quad (4)$$

此外,不参与订阅的用户效用为0.在订阅模式下,提供商的收益目标函数表示为每周期的订阅读户所缴纳的订阅费用之和,即 $r_1N_1 + r_2N_2$.

2) 自有模式(on-premise model): 在自有模式下,用户需要在购买的时候支付软件价格从而获得软件的所有权.换言之,如果用户在第1周期购买但是第2周期选择不升级,依然可以持续使用而无需重新付费.当然,第1周期的用户如果在第2周期选择升级,仍需要额外支付费用 u .以低端用户为例,在第1周期初,用户面临以下选择(及其对应的效用函数):

第1周期购买但第2周期不升级

$$(q_1\theta - p_1) + q_1\theta \quad (5)$$

第1周期购买并且第2周期升级

$$(q_1\theta - p_1) + (q_2\theta - u) \quad (6)$$

第2周期购买

$$q_2\theta - p_2 \quad (7)$$

在自有模式下,提供商的目标函数比订阅模式更加复杂,主要由三部分组成:第1周期用户的购买费用、第2周期新增用户的购买费用和第1周期用户在第2周期的升级费用,其中第2周期新增的用户可以表达为 $(N_2 - N_1)^+ = \max(N_2 - N_1, 0)$.

因此,提供商的收益目标函数为 $p_1N_1 +$

$p_2(N_2 - N_1)^+ + uN_U$,其中 N_U 代表第2周期选择升级的人数.不难看出, $N_U \leq N_1$ 总是成立,因为购买升级的用户数不会超过第1周期的用户数.

需要说明的是,为了能够较为全面地分析不同价格设定对于上述两类商业模式的影响,同时考虑了两类具体的操作形式,即承诺价格和动态定价.在承诺价格下,提供商需要在第1周期开始前公布所有的价格,包括在第2周期的订阅费、价格和升级费用;而在动态定价模式下,提供商仅需要公布第1周期的价格,而用户和提供商之间需要对于第2周期的价格进行预期并达到均衡状态.这两种情形不但在文献当中都普遍存在^[17],在行业当中也都被广泛采用.例如Oracle的系统的大多数可供升级的功能模块对应的价格是相对固定并提前公布的^[21, 22],而SAP和国内的用友等提供商则并未在系统实施时对于未来的升级模块价格进行约定^[23].

按照信息产品研究的文献,假设软件带给提供商的边际成本为0.对于利用数据实现升级部分的成本可以省略,这主要是因为人工智能算法的价值恰恰体现在当训练数据积累充分时可以替代人工,例如可以基于计算机程序自动进行参数调优^[24].

以下将从提供商的视角出发,分别优化两种模式下的最优利润并进行对比.从内外部两个视角来审视不同商业模式带来的利润差异——在外部主要关注市场的需求特征(例如支付能力差异 θ);在内部,主要关注企业的数据分析和质量提升能力(例如升级能力 δ),最终综合内外部的影响因素来考察企业的最优商业模式选择.

3 模型求解

首先依次分别求解订阅和自有两种模式下的企业最优价格和利润,最后在提供商是否承诺未来价格的情形下对比上述两种不同模式,从而得到提供商在商业模式选择方面的管理启示.在对比的不同模式的过程中,关注的变量包括两个方面:一是外部市场的需求特征(例如支付能力差异 θ);另一方面是企业内部在软件升级方面的能力(例如升级能力 δ).

3.1 订阅模式

在订阅模式下, 提供商是否对于价格进行承诺, 将决定最优价格的求解顺序: 如果提供商对于订阅费给出承诺, 则提供商需要在第1周期开始前确定两个周期的订阅费; 反之, 如果提供商不承诺订阅价格, 则需要遵循动态定价的逻辑来逆向求解, 即首先在第2周期初根据市场采纳情况求解最优的 r_2 , 再倒推到第1周期求解最优的 r_1 . 基于此, 本节分两种情况讨论: 承诺订阅费和不承诺订阅费.

1) 承诺订阅费

在提供商承诺订阅费的情形下, 考虑一类行

业中最为常见的情形, 即固定订阅费 $r_1 = r_2$. 后文的命题5展示了放宽这一约束的结果. 在承诺订阅费时, 高端和低端用户都面临3种选择(第1周期开始订阅、第2周期开始订阅、不订阅), 因此最终可能出现的市场均衡状态有三种: ①高低端用户两周期都订阅; ②高端用户两周期订阅, 低端用户第2周期开始订阅; ③仅有高端客户两周期订阅. 针对这三种可能的均衡情形分别分析, 并对比提供商在不同均衡下的利润可得以下命题1.

命题1 对于固定订阅费的情形, 市场均衡状态、提供商的最优利润如表1所示(详细求解过程请见附录证明).

表1 固定订阅费下的提供商最优利润和对应市场均衡

Table 1 Provider's optimal profit and corresponding market equilibrium under fixed subscription fee

类型	参数空间	市场均衡	最优利润
I	$\delta \in [0, \delta_1], \theta \in [\theta_1, 1]$ $\delta \in [\delta_1, 1], \theta \in [\theta_2, 1]$	高低端两周期订阅	$2q_1\theta$
II	$\delta \in [0, \delta_1], \theta \in [0, \theta_1]$ $\delta \in [\delta_1, 1], \theta \in [0, \theta_3]$	仅高端两周期订阅	$2q_1x$
III	$\delta \in [\delta_1, 1], \theta \in [\theta_3, \theta_4]$	高端两周期订阅 低端第2期订阅	$\theta q_1(1+x\delta)(1+x)$
IV	$\delta \in [\delta_1, 1], \theta \in [\theta_4, \theta_2]$	高端两周期订阅 低端第2期订阅	$q_1(1+x)$

命题1所揭示的订阅模式下的市场均衡状态包含多个区域, 上述的三种采纳情形都有可能成

为均衡状态. 因此, 借助图2来直观地展示不同参数区域的市场均衡情形.

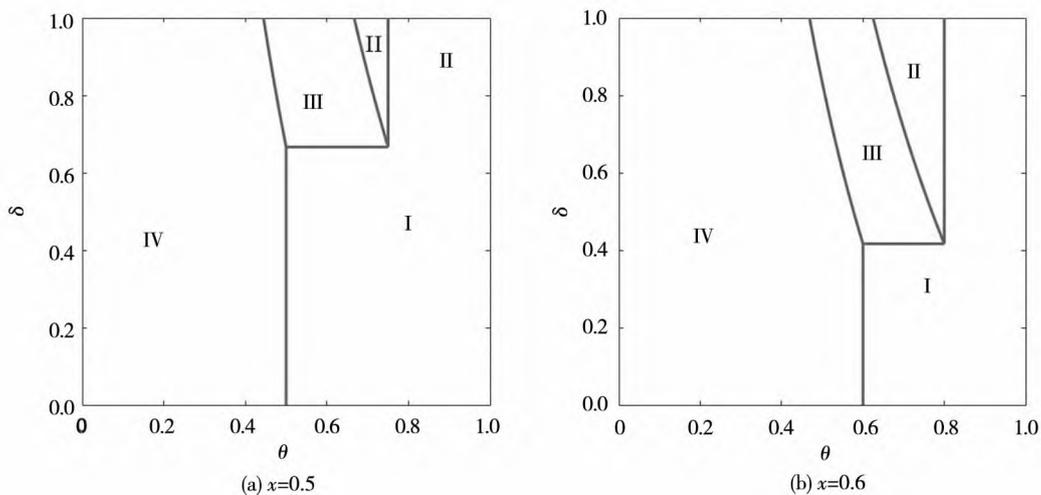


图2 承诺订阅费下的市场均衡情形 ($q_1 = 1$, 罗马数字 I 到 IV 与表 1 中首列对应)

Fig. 2 Market equilibrium situation under committed subscription fees ($q_1 = 1$, and cases I to IV are from column 1 of Table 1)

图2的横轴代表低端用户相对于高端用户的支付能力差异——左侧的区域里, 高低端差异较大. 纵轴则代表提供商的升级能力. 从横轴

来看, 图2的结论较为直观: 当高低端用户的差异较小(即右侧的区域I), 这个区域所对应的均衡状态也是两类用户都愿意在两周期内进行订

阅. 而高低端的差异越大(即靠左侧的区域 II), 对应的均衡则是仅有高端用户在两周期都订阅.

而命题 1 中更加有趣的区域是上方区域 III 和 IV, 这两部分对应的是企业升级能力更高的情形. 当这个能力足够高时, 区域 III 和 IV 对应的都是低端用户在第 2 周期加入订阅, 而在第 1 周期选择观望等待. 有趣的是, 这一情形出现所对应的区域是高低端用户的差异性既不能过高, 也不能过低(即横轴的 θ 处于中间区域). 这说明升级能力和用户群体的分布同时会影响到提供商的决策——因为当提供商基于数据的升级能力增加时, 提供商定价策略的选择并非必然会发生变化, 而是依然要充分考虑到市场当中不同类型用户支付能力差异——这一结论是模型的首个发现.

在企业软件市场中, 由于订阅式的智能系统软件对于中小企业的费用压力较小, 因此潜在市场中低端用户的比例也要相比于传统企业软件市

场更高. 在研究中, 对比图 2a 和图 2b 可以看到, 当低端用户的比例相对较多(即图 2a)时, 提供商既可以选择区域 I 来吸引低端用户在第 1 周期采纳, 也可以选择区域 IV 来吸引低端用户在第 2 周期采纳. 命题 1 则揭示了一个重要的规律: 提供商的上述选择是和提供商本身利用数据的升级能力有关. 对于升级能力更强的提供商, 反而可以选择区域 IV, 这样就不用过多地降低订阅费来吸引低端用户.

2) 不承诺订阅费

在提供商不承诺订阅费时, 可能出现一种新的均衡情形——如果订阅费用增加, 用户有可能无法负担第 2 周期的费用, 而在第一周期结束后不再订阅. 由于订阅费决策变为动态, 因此需要首先求解第 2 周期的子问题, 再倒推回第 1 周期. 结果可参见命题 2.

命题 2 不承诺订阅费模式下的市场均衡状态和提供商最优利润分别如表 2 所示(求解过程见附录):

表 2 不承诺订阅费下的最优利润和对应市场均衡

Table 2 Optimal profit and corresponding market equilibrium under no commitment to subscription fees

类型	参数空间	市场均衡	最优利润
I	$\theta \in [x, 1]$	高低端客户两周期都订阅	$q_1(2 + \delta)\theta$
II	$\delta \in \left[\frac{x - \theta}{x(1 - x)}, 1 \right], \theta \in [0, x]$	高端客户两周期都订阅 低端客户第 1 周期订阅	$q_1x + \theta q_1(1 + \delta x)$
III	$\delta \in \left[0, \frac{x - \theta}{x(1 - x)} \right]$	仅高端两周期都订阅	$q_1x(2 + \delta x)$

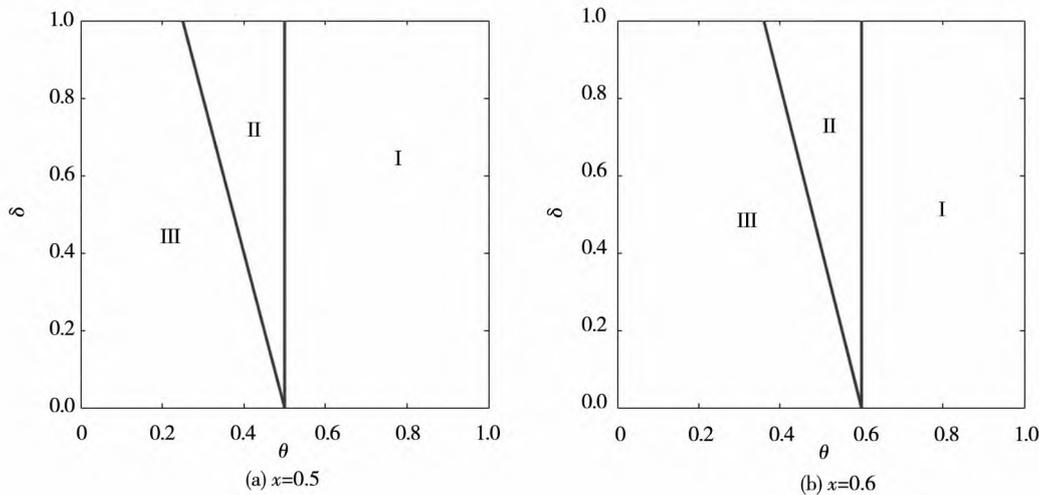


图 3 不承诺订阅费下的市场均衡情形 ($q_1 = 1$, 罗马数字 I 到 III 与表 2 中首列对应)

Fig. 3 Market equilibrium under no commitment to subscription fees ($q_1 = 1$, and cases I to III are from column 1 of Table 2)

对比图3和图1,虽然二者有一定相似之处,但在图3的区域I出现了显著的区别——在可变订阅费的情形下,由于升级之后的企业软件质量更高,因此优化后的价格更高,促使低端用户有可能在第2周期放弃使用。

更重要的是,这一均衡结果恰恰是提供商想要的——利用低价吸引低端用户在第1周期加入,并帮助提供商获取更多的数据,而这些数据能够帮助提供商在第2周期更有效地提升软件的质量,并最终专注从高端用户处攫取更高利润。由此可见,在软件升级更加依赖于用户的数据积累时,提供商更有意愿利用低价在早期吸引更多的用户采纳,从而帮助企业累积数据来提升算法的表现。

3.2 自有模式

在自有模式下,客户如果在第1周期购买了系统,第二阶段无须为持续使用软件而另付费用。然而,客户可以选择是否对于原有的功能进行持续升级。与前文类似,同样考虑了两种情形,即提供商承诺软件价格和动态定价两种形式。

1) 承诺价格

自有模式下,如果提供商能够承诺价格,则用户面临一个新的选择——继续使用不升级的版本。这样一来,可能存在的市场均衡更加复杂。命题3给出了最优策略下不同类型均衡出现的参数空间即对应的最优利润(与前文相同,详细求解过程见附录)。

命题3 自有模式下,若提供商承诺价格,市场均衡状态和对应的供应商利润分别如表3所示。

表3 承诺价格时的最优利润和对应市场均衡

Table 3 Optimal profit at promised price and corresponding market equilibrium

类型	参数空间	市场均衡	最优利润
I	$\theta \in [x, 1]$	高低端均1期购买,2期升级	$\theta q_1 (2 + \delta)$
II	$\delta \in \left[\frac{2(x - \theta)}{x(1 - x)}, 1 \right], \theta \in [0, x)$	高低端均1期购买,高端2期升级	$q_1 (2\theta + \delta x)$
III	$\delta \in \left[0, \frac{2(x - \theta)}{x(1 - x)} \right]$	仅高端1期购买且2期升级	$q_1 x (2 + \delta x)$

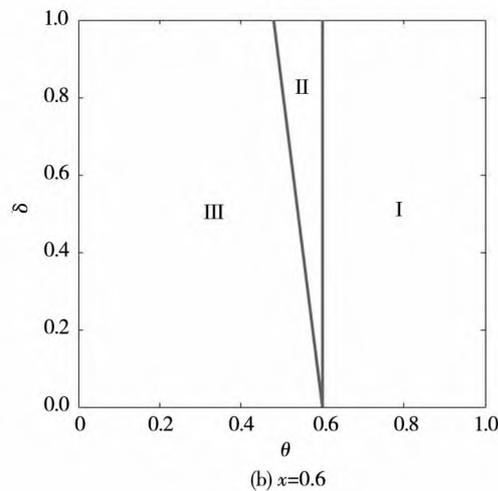
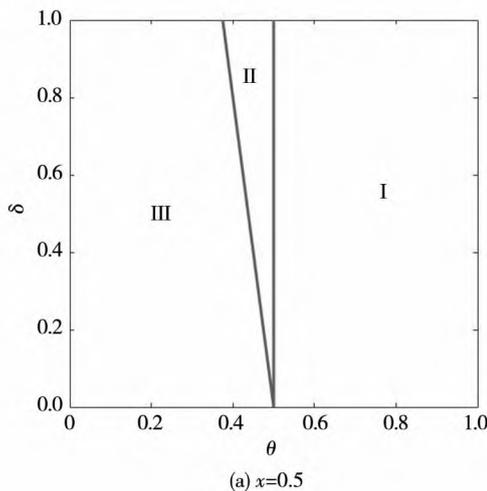


图4 承诺价格时的市场均衡情形 ($q_1 = 1$, 罗马数字 I 到 III 与表3 中首列对应)

Fig. 4 Market equilibrium at the promised price ($q_1 = 1$, and cases I to III are from column 1 of Table 3)

仿照上文,将命题3所示的不同区域也表示在图4中。

由图4可以看出,自有模式下的均衡边界当中,最为特殊的是左下角的区域III。在这个区域

里,由于提供商承诺了自有模式的价格,因此,在此区域内,由于提供商的升级能力低(δ 很小)同时低端用户的支付能力过低(θ 很小),因此提供商无需考虑低端用户所能贡献的利润。而在区域

I 和区域 II, 高端用户都在第 2 周期为升级付费. 然而两个区间对应的机理并不一致——当提供商的升级能力较高(区域 II), 购买的价格较低, 使得低端用户也能够第 1 周期购买. 这些低端用户的参与有着重要的意义——低端用户虽然没有直接付出第 2 周期的升级费, 但是通过第一周期的参与, 为第 2 周期的数据驱动升级做出了贡献. 而在右侧的区域 I, 高低端所有用户都在第 1 周期购买并在第 2 周期升级.

对于选择承诺升级费用的提供商(如 Oracle), 结果表明, 提供商的升级能力所扮演的角色可能不是一成不变的. 具体而言, 对于高低端支付能力差异较大的情形(即图 4 两幅图的左侧), 区域 II 和区域 III 之间的边界意味着升级能力的高

低决定了提供商是否应当仅对于高端提供商进行服务, 而这一决定性作用在两图的右侧并不存在——这就意味着, 提供商所面临的市场中用户群体的差异性越大, 提供商则需要在低端用户参与所贡献的数据与牺牲的利润之间面临更大的取舍.

2) 不承诺价格

如果提供商无法提前承诺自有模式的价格, 而是在第 1 周期后再根据市场采纳情况来决策第 2 周期的升级费用, 此时则需要通过逆序求解来寻找提供商的动态最优策略. 求解可得命题 4.

命题 4 自有模式下, 如提供商不提前承诺价格, 则市场均衡状态和供应商最优利润分别如表 4 所示(详细求解过程见附录).

表 4 不承诺价格时的最优和对应市场均衡

Table 4 Optimal and corresponding market equilibrium when prices are not promised

类型	参数空间	市场均衡	最优利润
I	$\theta \in [x, 1]$	高低端均 1 期购买, 2 期升级	$q_1 \theta (2 + \delta)$
II	$\delta \in [\frac{x - \theta}{x(1 - \theta)}, 1], \theta \in [0, x)$	高端 1 期购买, 2 期升级 低端 1 期购买, 2 期不升级	$q_1 (2\theta + \delta x)$
III	$\delta \in [0, \frac{x - \theta}{x(1 - \theta)}]$	仅高端 1 期购买, 2 期升级 低端第 2 期购买	$q_1 [x + \theta(1 + \delta x)]$

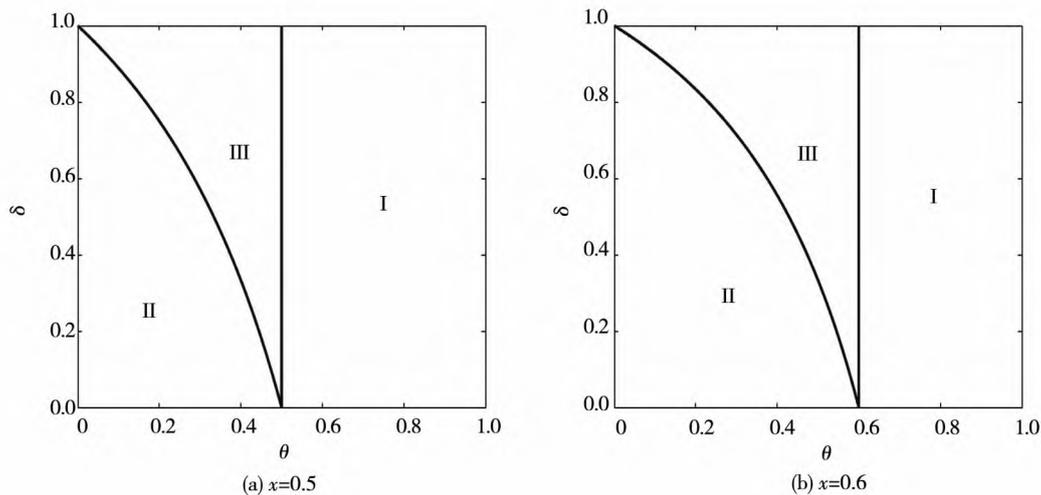


图 5 不承诺价格的市场均衡情形 ($q_1 = 1$, 罗马数字 I 到 III 与表 4 中首列对应)

Fig. 5 Market equilibrium without price commitment ($q_1 = 1$, and cases I to III are from column 1 of Table 4)

当提供商不承诺价格时, 提供商可以在第 2 周期充分调节价格, 结果当中最为明显的区别在于提供商可以充分调节价格来吸引低端用户参与(在第 1 周期或第 2 周期购买). 由此, 均衡情况下不会出现自始至终完全没有低端用户参与的

情形.

对比图 4 和图 5, 一个共同的规律在于, 如果高低端用户的差异较小(即图右侧), 最终的均衡都是高低端用户选择在第 1 周期购买并在第 2 周期升级; 而最大的区别在于提供商的升级能力

(即纵轴方向)对于决策的影响机制发生了变化——如果能够承诺价格,则升级能力不足时,提供商倾向于放弃低端用户;如果不承诺价格,则升级能力不足时,提供商会选择第2周期再吸引低端用户购买。由此可见,提供商的决策机制,也同时受到价格的承诺与否与升级能力的高低影响。基于此,将对提供商的最优价格模式进行比较。

1) 模式比较

对于提供商而言,两种模式究竟哪个所对应的利润更高?为了能够尽可能全面地回答这一问题,在承诺价格和不能承诺价格等两种假设下分别进行了对比其结果可参见命题5。

命题5 提供商的最优模式选择满足以下条件:

1) 在不承诺订阅费或价格下,提供商应选择订阅模式;

2) 在承诺订阅费或价格下,如果各期价格可以变化,提供商应该选择自有模式;

3) 在承诺订阅费或价格下,如果各期价格相同,提供商应该选择订阅模式。

命题5揭示了一个重要的结论:对于提供商而言,订阅模式和自有模式并没有绝对的占优策略,而是取决于提供商和客户在价格承诺方面设定:在承诺价格下,自有模式所对应的利润更高——这一点与经济学当中耐用品价格相关文献的主要结论是一致的^[17]——在动态调整价格时,用户可能因为担心未来的价格下降,而降低了在第1周期购买的意愿。

更进一步讲,对于一类特定的承诺方式——固定价格,依然是订阅模式更优。固定费用的形式在软件工业界被广泛采用,例如消费市场当中的视频流媒体类(如爱奇艺等平台)都是采用固定订阅费的形式;相应地,Netflix等平台则不定期会对于订阅费用涨价(等价于不承诺订阅费)。命题5指出,如果承诺的形式为固定订阅费或者购买费用,此时两种模式都面临同样的问题——如果价格固定,则无法从质量的提升当中获得足够额外收益。在这种相对被约束的情形下,对于提供商相应更优的策略依然是采用订阅模式。

命题6 如果提供商能够自主决定是否承诺价格,则最优策略是不承诺订阅费的订阅模式。

命题6可以通过对比命题5当中的前两项结果得到。命题6的结论与当前的智能系统软件市场的实践是高度一致的——积极转型为订阅模式,同时不要对于未来市场价格进行承诺(即图2所示情形)。相比于其他图所示的各类价格模式,图2的最大区别在于,在这种情形下,提供商可以尽可能地吸引高低端各类用户在第1周期参与市场,从而在第2周期实现了最大幅度的升级,从而也充分拓展了利润空间。由此可见,对于基于数据驱动的软件升级而言,如何选择商业模式使得企业能够在早期实现对于市场的充分覆盖,是提升自身利润的关键。对于实践而言,这一结论也意味着类似Oracle这样沿袭了自有模式时代的价格承诺的做法,在订阅模式时代是不适用的——更合理的方式,应当是取消对于未来订阅价格的承诺。

4 结束语

许多带有数据采集和智能控制模块的新型智能设备被广泛普及,这些设备往往需要有智能系统软件进行管理,同时这些数据采集模块也源源不断地将用户数据回传到软件提供商或企业的服务器来进行分析,并最终用于进一步改进和提升软件的质量。这一点与传统的软件升级或者网络外部性的逻辑并不完全相同——软件用户可以选择是否进行升级,同时软件本身的质量提升则取决于早期加入市场的用户所贡献的数据。随着5G和万物互联时代的到来,这一趋势已经从智能制造逐步扩展到装备业和汽车工业等^[25]。

研究围绕上述背景展开,针对智能软件提供商面临的管理决策构建了经济学模型,通过一个抽象的简化模型对比了订阅模式和传统的自有模式,并尝试回答核心问题:智能系统软件是否更适合使用订阅模式?研究发现,在每一类定价模式下,外部的市场特征和内部的升级能力都对于智能软件的价格优化有着直接的影响。进一步,对于不同价格模式也进行了比较,发现订阅和自有模式都有可能成为最优,取决于软件提供商是否需要对于价格进行承诺。如果软件提供商能够自主选择,则不承诺未来价格的订阅模式是利润占优

的. 上述这些结论对于当前智能系统软件提供商, 如 Oracle 和 SAP 等正在积极转型为订阅模式的做法给予了理论支持. 然而, 结果也表明, 想要从订阅模式中获取更高利润还需要具有对于未来价格的调整能力, 这也对于智能系统提供商的价格管理实践具有更加明确的指导作用.

模型和假设依然有可以进一步拓展的空间.

例如, 仅考虑了高低两类用户群体, 未来的研究可以更加灵活的市场假设来开展. 此外, 软件的升级过程在当中并未做更加细致的拆分, 而只是关注了升级能力和数据积累之间的关系. 未来的研究可以围绕升级过程的其他分析角度, 如人力成本、不确定性以及竞争带来的影响等方面进行更加深入的讨论.

参 考 文 献:

- [1] 姚锡凡, 张剑铭. 智慧制造系统的基础理论与技术体系 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(10): 2699–2711.
Yao Xifan, Zhang Jianming. The basic theory and technical framework for wisdom manufacturing systems [J]. System Engineering: Theory & Practice, 2016, 36(10): 2699–2711. (in Chinese)
- [2] 陈国青, 吴刚, 顾远东, 等. 管理决策情境下大数据驱动的研究和应用挑战——范式转变与研究方向 [J]. 管理科学学报, 2018, 21(7): 1–10.
Chen Guoqing, Wu Gang, Gu Yuandong, et al. The challenges for big data driven research and applications in the context of managerial decision-making: Paradigm shift and research directions [J]. Journal of Management Sciences in China, 2018, 21(7): 1–10. (in Chinese)
- [3] Ellison G, Fudenberg D. The Neo-Luddite's lament: Excessive upgrades in the software industry [J]. The RAND Journal of Economics, 2000, 31(2): 253–272.
- [4] Wei X, Nault B R. Experience information goods: Version-to-upgrade [J]. Decision Support Systems, 2012, (56): 494–501.
- [5] Guo Z, Ma D. A model of competition between perpetual software and software as a service [J]. MIS Quarterly, 2018, 42(1): 101–128.
- [6] Mehra A, Bala R, Sankaranarayanan R. Competitive behavior-based price discrimination for software upgrades [J]. Information Systems Research, 2012, 23(1): 60–74.
- [7] Cui Y, Duenyas I, Sahin O. Pricing of conditional upgrades in the presence of strategic consumers [J]. Management Science, 2017, 64(7): 3208–3226.
- [8] Jia K, Liao X, Feng J. Selling or leasing? Dynamic pricing of software with upgrades [J]. European Journal of Operational Research, 2018, 266(3): 1044–1061.
- [9] Li S, Cheng H K, Jin Y. Optimal distribution strategy for enterprise software: Retail, SaaS, or dual channel? [J]. Production and Operations Management, 2018, 27(11): 1928–1939.
- [10] Katz M L, Shapiro C. Technology adoption in the presence of network externalities [J]. The Journal of Political Economy, 1986, 94(4): 822–841.
- [11] Haruy E, Prasad A. Optimal product strategies in the presence of network externalities [J]. Information Economics and Policy, 1998, 10(4): 489–499.
- [12] Jing B. Network externalities and market segmentation in a monopoly [J]. Economics Letters, 2007, 95(1): 7–13.
- [13] Chen P, Wu S. The impact and implications of on-demand services on market structure [J]. Information Systems Research, 2013, 24(3): 750–767.
- [14] Balasubramanian S, Bhattacharya S, Krishnan V. Pricing information goods: A strategic analysis of the selling and pay-per-use mechanisms [J]. Marketing Science, 2015, 34(2): 218–234.
- [15] Zhang Z, Nan G, Tan Y. Cloudservices vs. on-premises software: Competition under security risk and product customization [J]. Information Systems Research, 2020, 31(3): 848–864.

- [16] Dou Y, Hu Y J, Wu D J. Selling or leasing? Pricing information goods with depreciation of consumer valuation [J]. *Information Systems Research*, 2017, 28(3): 585 – 602.
- [17] Gul F, Sonnenschein H, Wilson R, et al. Foundations of dynamic monopoly and the coase conjecture [J]. *Journal of Economic Theory*, 1986, 39(1): 155 – 190.
- [18] Sundararajan A. Nonlinear pricing of information goods [J]. *Industrial Organization*, 2004, 50(12): 1660 – 1673.
- [19] 王春苹, 南国芳, 李敏强, 等. 寡头市场信息产品与服务的最优定价策略 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(3): 92 – 106.
Wang Chunping, Nan Guofang, Li Minqiang, et al. Optimal pricing for information goods and complementary services in duopoly markets [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(3): 92 – 106. (in Chinese)
- [20] 刘征驰, 赖明勇. 云服务环境下的互联网市场结构变迁 [J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(8): 2060 – 2070.
Liu Zhengchi, Lai Mingyong. The transformation on market structures of internet industries under the environment of cloud services [J]. *System Engineering: Theory & Practice*, 2017, 37(8): 2060 – 2070. (in Chinese)
- [21] Oracle. Subscription pricing and billing [EB/OL]. URL: <https://docs.oracle.com/en/cloud/saas/subscription-management/20a/fasum/subscription-pricing-and-billing.html#FASUM3397326>, 2019.
- [22] Oracle. Global pricing and licensing [EB/OL]. URL: <https://economictimes.indiatimes.com/small-biz/sme-sector/sap-launches-initiative-to-make-smes-globally-competitive/articleshow/76685309.cms?from=mdr>, 2015.
- [23] Lederman B. Cloud vs. on premise: Advice for your next small business ERP project [EB/OL]. URL: <https://news.sap.com/2015/07/small-business-coach-cloud-vs-on-premise-advice-for-your-next-erp-project/>, 2015.
- [24] Simester D, Timoshenko A, Zoumpoulis S. Targeting prospective customers: Robustness of machine-learning methods to typical data challenges [J]. *Management Science*, 2020, 66(6): 2495 – 2522.
- [25] Betti F, de Boer E, Giraud Y. Industry's fast-mover advantage: Enterprise value from digital factories [EB/OL]. URL: <https://www.mckinsey.com/business-functions/operations/our-insights/industrys-fast-mover-advantage-enterprise-value-from-digital-factories>, 2020.

Pricing smart enterprise software: A data-driven upgrading perspective

DAI Jun¹, DOU Yi-fan^{1*}, HUANG Li-hua¹, ZHANG Rui-cheng²

1. School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, China;
2. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China

Abstract: Smart enterprise software is the software that leverages client data for upgrades and quality improvement. With the rapid development of ongoing 5G and industrial Internet-of-Things technologies, massive data are being accumulated for training the algorithms embedded in the enterprise software. In the meantime, enterprise software providers such as SAP and Oracle have actively transformed the pricing scheme from traditional perpetual license model to subscription-based model. A game-theoretical approach is explored to explore the rationale of this transition. The paper draws from real-world practices to make the assumption that the software quality improvement is more significant when more data are collected for algorithm training, which appears novel in the literature. It is found that both pricing models can be optimal, depending on both external market characteristics and internal upgrades. Furthermore, our results show that the optimal pricing scheme also depends on whether the software provider is able to commit to future prices. Our findings provide a theoretical basis for the business model design of enterprise software providers in the smart and connected era.

Key words: system software; artificial intelligence; pricing information goods; business model design

附录

命题 1 证明:

在承诺订阅费时, 提供商仅在第 1 周期开始前需要进行决策. 随后用户会根据提供商的价格来决策每个周期内的使用与否. 注意命题 1 中仅给出了不但承诺订阅费同时也保持订阅费不变的情形. 在后续命题 5 中, 也可遵循类似的方式求解承诺订阅费但是每个周期的订阅费不必完全相同的情形.

给定承诺不变的订阅费, 在均衡条件下一共有 3 种可能的情形: 高低端用户两周期都订阅, 低端用户第 2 周期开始订阅, 仅有高端用户两周期都订阅. 分别讨论如下:

情形 1 高低端两周期都订阅. 则需要满足以下条件:

1-1 两周期订阅为高端用户的占优策略;

1-2 两周期订阅为低端用户的占优策略.

条件 1-1 等价于 $r \leq q_1$, 条件 1-2 等价于 $r \leq q_1\theta$. 在情形 1 下, 目标利润为 $2r$. 由此可知, 最优利润为 $2q_1\theta$.

情形 2 高端两周期都订阅, 低端用户第 2 周期开始订阅. 则需要满足以下条件:

2-1 两周期订阅为高端用户的占优策略;

2-2 第 2 周期订阅为低端用户的占优策略.

条件 2-1 等价于 $r \leq q_1$, 条件 2-2 等价于 $r \leq q_2\theta$. 在情形 2 下, 目标利润为 $(1+x)r$. 由此可知, 最优利润为 $(1+x)\min(q_1, q_2\theta)$.

情形 3 高端两周期都订阅, 低端用户不订阅. 则需要满足以下条件:

3-1 两周期订阅为高端用户的占优策略;

3-2 不订阅为低端用户的占优策略.

条件 3-1 等价于 $r \leq q_1$, 条件 3-2 等价于 $r \geq q_2\theta$. 在情形 3 下, 目标利润为 $2xr$. 由此可知, 仅限 $q_1 > q_2\theta$ 时, 最优利润为 $2xq_1$.

对比上述 3 种情形的最优利润, 可得命题 1. 其中各个边界的定义为

$$\theta_1 = x, \theta_2 = \frac{1+x}{2}, \theta_3 = \frac{2x}{1+x} \times \frac{1}{1+x\delta}, \theta_4 = \frac{1}{1+x\delta}, \delta_1 = \frac{1-x}{x+x^2}. \quad \text{证毕.}$$

命题 2 证明:

在不承诺订阅费时, 提供商在每个周期开始前都需要进行决策. 随后用户会根据提供商的价格来决策该周期内的使用与否. 基于此, 需要按照动态定价的求解逻辑, 先根据第 1 周期的不同情形来讨论第 2 周期的提供商最佳策略. 随后倒退到第 1 周期, 再探讨是否存在满足均衡的情形.

第 2 周期开始前, 根据第 1 周期的使用情况可以分为 3 种: 高低端在第 1 周期都用; 仅高端在第 1 周期用; 无人在第 1 周期用. 以下分为 3 种情况讨论:

第 2 周期—情况 1: 此时又有两种可能的策略: 高低端在第 2 周期都用和仅高端在第 2 周期用. 其中前一种的对应第 2 周期利润为 $q_1(1+\delta)\theta$, 后一种对应的第 2 周期利润为 $q_1(1+\delta)x$. 对比可知, 如果 $\theta > x$, 则提供商会选择让高低端都用, 反之则仅有高端用.

第 2 周期—情况 2: 类似地, 此时有两种可能的策略: 高低端在第 2 周期都用和仅高端在第 2 周期用. 其中前一种的对应第 2 周期利润为 $q_1(1+\delta x)\theta$, 后一种对应的第 2 周期利润为 $q_1(1+\delta x)x$. 对比可知, 如果 $\theta > x$, 则提供商会选择让高低端都用, 反之则仅有高端用.

第 2 周期—情况 3: 类似地, 此时有两种可能的策略: 高低端在第 2 周期都用和仅高端在第 2 周期用. 其中前一种的对应第 2 周期利润为 $q_1\theta$, 后一种对应的第 2 周期利润为 q_1x . 对比可知, 如果 $\theta > x$, 则提供商会选择让高低端都用, 反之则仅有高端用.

以上是第 2 周期的提供商在各种情形下的最优策略, 现在倒退回第 1 周期求解. 可以看到, 上述 3 种情况的决定条件都是 $\theta > x$, 这样一来可以简化为两类讨论.

第 1 周期 $\theta > x$: 此时有 2 种可能的均衡: 高低端两周期都用和低端只在第 2 周期用. 在第 1 种情形下:

1-1 两周期订阅为高端用户的占优策略;

1-2 两周期订阅为低端用户的占优策略.

讨论求解可得 $\pi = r_1 + r_2 = q_1(2 + \delta)\theta$. 在第2种情形下:

2-1 两周期订阅为高端用户的占优策略;

2-2 第2周期订阅为低端用户的占优策略.

讨论求解可得 $\pi = r_1x + r_2 = q_1x + q_1\theta(1 + \delta x)$. 对比上述两种情形可得 $\theta > x$ 下的最优策略.

类似地, 在 $\theta \leq x$ 的条件下也有两种情形: 低端仅在第1周期用和低端从来不用. 在第1种情形下:

1-1 两周期订阅为高端用户的占优策略;

1-2 第1周期订阅为低端用户的占优策略.

讨论求解可得 $\pi = r_1 + xr_2 = q_1\theta + xq_1(1 + \delta)$. 在第2种情形下:

2-1 两个周期订阅为高端用户的占优策略;

2-2 从不订阅为低端用户的占优策略.

讨论求解可得 $\pi = x(r_1 + r_2) = xq_1(2 + \delta x)$. 对比上述两种情形可得 $\theta \leq x$ 下的最优策略. 至此可以证得命题2.

证毕.

命题3证明:

类似上文关于命题1的证明. 在自有模式下, 一共有4种可能的均衡情形: 高低端都在第1周期购买, 第2周期升级; 高低端都在第1周期购买, 仅高端在第2周期升级; 高端在第1周期购买第2周期升级, 低端在第2周期购买; 仅有高端在第1周期购买第2周期升级. 分别讨论如下:

情形1 高低端都在第1周期购买, 第2周期升级, 需要满足以下条件:

1-1 第1周期购买且第2周期升级为高端用户的占优策略;

1-2 第1周期购买且第2周期升级为低端用户的占优策略.

条件1-1等价于 $p_1 + u \leq q_1 + q_2$ 且 $u \leq \delta q_1$, 条件1-2等价于 $p_1 + u \leq (q_1 + q_2)\theta$ 且 $u \leq \delta q_1\theta$, 而在情形1下的利润目标函数为 $p_1 + u$. 由此可知最优利润为 $(q_1 + q_2)\theta = q_1(2 + \delta)\theta$.

情形2 高低端都在第1周期购买, 仅高端在第2周期升级, 需要满足以下条件:

2-1 第1周期购买且第2周期升级为高端用户的占优策略;

2-2 第1周期购买且第2周期不升级为低端用户的占优策略.

条件2-1等价于 $p_1 + u \leq q_1 + q_2$ 且 $u \leq \delta q_1$, 条件2-2等价于 $p_1 \leq 2q_1\theta$, 而在情形2下的利润目标函数为 $p_1 + xu$. 由此可知最优利润为 $q_1x\delta + 2q_1\theta = q_1(2\theta + \delta x)$.

情形3 高端在第1周期购买第2周期升级, 低端在第2周期购买, 需要满足以下条件:

3-1 第1周期购买且第2周期升级为高端用户的占优策略;

3-2 第2周期购买为低端用户的占优策略.

条件3-1等价于 $p_1 + u \leq q_1 + p_2$ 且 $u \leq \delta q_1x$, 条件3-2等价于 $p_2 \leq q_2\theta$, 而在情形3下的利润目标函数为 $x(p_1 + u) + (1 - x)p_2$. 由此可知最优利润为 $x + \theta(1 + \delta x)$.

情形4 仅有高端在第1周期购买第2周期升级. 需要满足以下条件:

4-1 第1周期购买且第2周期升级为高端用户的占优策略;

4-2 不购买为低端用户的占优策略.

条件4-1等价于 $p_1 + u \leq q_1 + q_2$ 且 $u \leq \delta q_1x$, 条件4-2对于价格没有约束, 而在情形4下的利润目标函数为 $x(p_1 + u)$. 由此可知最优利润为 $x(p_1 + u) = xq_1(2 + \delta x)$.

通过对比以上4种情形的均衡利润, 可以得到命题3所示结果.

证毕.

命题4证明:

在不承诺价格时, 提供商在每个周期开始前都需要进行决策. 随后用户会根据提供商的价格来决策是否升级或购买. 基于此, 需要按照动态定价的求解逻辑, 先根据第1周期的不同情形来讨论第2周期的提供商最佳策略. 随后倒退到第1周期, 再探讨是否存在满足均衡的情形.

第 2 周期开始前, 根据第 1 周期的使用情况可以分为 3 种: 高低端在第 1 周期都购买, 仅高端在第 1 周期买, 和无人第 1 周期购买, 以下分为 3 种情况讨论:

第 2 周期—情况 1: 此时又有两种可能的策略: 高低端在第 2 周期都升级和仅高端在第 2 周期升级, 其中前一种的对应第 2 周期利润为 $\delta q_1 \theta$, 后一种对应的第 2 周期利润为 $\delta q_1 x$. 对比可知, 如果 $\theta > x$, 则提供商会选择让高低端都升级, 反之则仅有高端升级.

第 2 周期—情况 2: 此时仅有一种可能的策略: 高端升级和低端购买, 这是因为低端购买的价格和高端升级的价格之间没有必然联系, 因此提供商没有必要不让高端升级或者不让低端购买, 此时满足高端升级的条件是 $u \leq \delta q_1 x$ 而满足低端购买的条件是 $p_2 \leq q_1(1 + \delta x) \theta$.

第 2 周期—情况 3: 如果第 1 周期无人使用, 那么质量也无法得到提升, 同时还减少了一个周期的使用时间, 因此在均衡的条件下一定被在第 1 周期开始使用的策略占优, 不再考虑这种情形.

以上是第 2 周期的提供商在各种情形下的最优策略, 现在倒退回第 1 周期求解.

第 1 周期 $\theta < x$: 此时有 2 种可能的均衡: 高端在第 1 周期买第 2 周期升级低端只在第 2 周期买, 和高端在第 1 周期买第 2 周期升级低端在第 1 周期买但不升级, 在第 1 种情形下:

1-1 第 1 周期购买且第 2 周期升级为高端用户的占优策略;

1-2 第 2 周期购买为低端用户的占优策略.

讨论求解可得 $\pi = x(p_1 + u^*) + (1-x)p_2^*$, 其中 p_1 满足 $p_1 + u^* = q_1 + q_2$. 第 2 种情形下:

2-1 第 1 周期购买且第 2 周期升级为高端用户的占优策略;

2-2 在第 1 周期购买但不升级为低端用户的占优策略.

讨论求解可得 $\pi = p_1 + xu^* = 2q_1\theta + \delta xq_1$. 对比上述两种情形可得 $\theta < x$ 下的最优策略.

类似地, 在 $\theta \geq x$ 的条件下也有两种情形: 高低端都在第 1 周期购买且第 2 周期升级, 高端在第 1 周期买第 2 周期升级低端只在第 2 周期买, 在第 1 种情形下:

1-1 第 1 周期购买且第 2 周期升级为高端用户的占优策略;

1-2 第 1 周期购买且第 2 周期升级为低端用户的占优策略.

讨论求解可得 $\pi = p_1 + u^* = q_1\theta(2 + \delta)$. 第 2 种情形与 $\theta < x$ 的第 1 种情形一致, 对比上述两种情形可得 $\theta \geq x$ 下的最优策略, 至此可以证得命题 4. 证毕.

命题 5 证明:

对比命题 1 到命题 4 中相关结论即可得, 其中, 承诺订阅费但允许价格波动的情形与命题 1 的证明类似, 此处略去.

命题 6 证明:

基于命题 5 的 3 种情形的最优策略对比即可得.