第2卷第1期
1999年3月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 2 No. 1
Mar. 1999

多人多准则非常和合作型对策研究[1]

32-36

金 锐[2] 韩文秀
(天津大学管理学院)

【摘要】研究了多人多准则非常和合作型对策的若干问题.定义了特征函数、分配矩阵、核心及其它相关概念;研究了特征函数与分配矩阵的性质;探讨了核心的存在性;给出了确定核心的方法;并用实例进行了验证.

关键词:多人多准则对策,核心,特征函数,分配矩阵
分类号:N94

O225

0 引 言

近年来,在对策理论与方法的研究领域中,多准则对策的研究日益受到关注.从理论上看,多准则对策是经典对策论的推广;从应用上讲,多准则对策模型也能够更有效、更准确地描述与解决现实世界中具有竞争、冲突性质的问题.

本文针对多人多准则非常和合作型对策问题,定义了合作联盟的特征函数,局中人的分配矩阵,核心及其它相关概念,进而研究了上述概念的性质,探讨了核心的存在性,给出了核心的确定方法.本文的研究意义在于将单准则下的有关结论推广到多准则情况下.

1 基本概念

考虑如下局中人的集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,$n>2$,设 $S=\{1,2,\cdots,k\}\subseteq N$,$k\leqslant n$.不失一般性,$S$ 可视为 k 个局中人组成的一个合作型联盟,该联盟在对策中采取统一行动,即选用一个 S 中所有的局中人都同意的策略集 X_S,目的是使联盟 S 中的局中人的总期望收益最大(或总期望损失最小,本文只考虑总期望收益最大的情况),由此而产生了两个问题:

1) 如何度量 S 的"威力"或 S 可能获得的最大期望收益是多少?

2) 联盟 S 如何在 $1,2,\cdots,k$ 中分配总收益?

集中讨论以上两个问题,以下如不特别指出,"收益"均指期望收益.

定义1 设局中人的集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,$n>2$,设 $S=\{1,2,\cdots,k\}\subseteq N$,$k\leqslant n$,$X_S$ 为局中人联盟 S 采用的策略集合,Y_{N-S} 为其余 $N-S$ 个局中人采用的策略集合,$x\in X_S$,$y\in Y_{N-S}$,$e_{ij}(x,y)$ 为第 i 个局中人($i\in S$)的第 j 个对策指标的收益,$j=1,2,\cdots,p$.则定义 $v_j(S)=\sum_{i\in S}e_{ij}(x,y)$ 为联盟 S 的第 j 个对策指标相对于策略 $y\in Y_{N-S}$ 的收益,特别地,定义 $v_j(\Phi)=0$.记 $v(S)=[v_1(S),v_2(S),\cdots,v_p(S)]$,$p\geqslant 2$.记

[1] 国家自然科学基金资助项目(79570047).

[2] 金 锐:博士生.通讯地址:天津大学管理学院系统工程研究所,邮编:300072.

本文1997年12月31日收到.

$$u_j(S)=\max_{x\in X_S}\min_{y\in Y_{N-S}}\sum_{i\in S}e_{ij}(x,y)\qquad i=1,2,\cdots,k\qquad j=1,2,\cdots,p \tag{1}$$

$$u(S)=[u_1(S),u_2(S),\cdots,u_p(S)]\qquad p\geqslant 2$$

$u_j(S)$ 的含义:不管 $N-S$ 局中人采用何种策略,联盟 S 通过协调其成员的策略选择使第 j 个对策指标可能达到的最大收益.一般来说,$u(S)$ 不会是联盟 S 的期望收益向量,因为一般来说不会存在相同的 $x\in X_S$,$y\in Y_{N-S}$,满足对 $\forall\ j\in[1,p]$ 都有 $u_j(S)=v_j(S)$.

定义 2　设对于 $\forall\ S\subseteq N$,$u(S)$ 不是联盟 S 的期望收益,且(1)对于 $\forall\ x\in X_S$,$\forall\ y\in Y_{N-S}$,$\exists\ j_0\in[1,p]$,满足 $u_{j_0}(S)>v_{j_0}(S)$;(2)$\exists\ x_0\in X_S$,$\exists\ y_0\in Y_{N-S}$,对于 x_0,y_0 而言,$\exists\ j_1\in[1,p]$,满足 $u_{j_1}(S)<v_{j_1}(S)$,则称对策问题存在特征函数,$u(S)$ 为对策问题的特征函数.

定义 3　如果对于 N 的某些子集 S_0,$u(S_0)$ 不是联盟 S_0 的期望收益,但 $u(S_0)$ 满足定义 2,而对于其它的子集 S,$u(S)$ 是联盟 S 的期望收益,则称对策问题存在特征函数,$u(S)$ 为对策问题的特征函数.

由以上两个定义知,在满足定义条件的情况下,$u(S)$ 最大限度地(或者是在 Pareto 最优意义上)刻划了联盟 S 的"威力",本文以下的讨论均假定对策问题存在本文定义的特征函数,不再一一指明.

定义 4　设 $u(S)$ 是对策问题的特征函数,如果对于 $\forall\ S\subseteq N$,有 $u(N-S)+u(S)=u(N)$,则称对策是常和的,否则称之为非常和对策.

2　主要结果

定理 1　(特征函数的上可加性)如果 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是互不相交的联盟,即 $\bigcap_{l=1}^{m}S_l=\varnothing$,则 $u(\bigcup_{l=1}^{m}S_l)\geqslant\sum_{l=1}^{m}u(S_l)$.

证明　只需证明　$$u_j(\bigcup_{l=1}^{m}S_l)\geqslant\sum_{l=1}^{m}u_j(S_l)\qquad j=1,2,\cdots,p \tag{2}$$

用数学归纳法:

$m=1$ 时,(2)显然成立.

$m=2$ 时,根据(1)及 $\bigcap_{l=1}^{2}S_l=\varnothing$ 知

$$u_j(\bigcup_{l=1}^{2}S_l)=\max_{x\in X_{S_1\cup S_2}}\min_{y\in Y_{N-S_1-S_2}}\sum_{i\in S_1\cup S_2}e_{ij}(x,y)=\max_{x\in X_{S_1\cup S_2}}\min_{y\in Y_{N-S_1-S_2}}[\sum_{i\in S_1}e_{ij}(x,y)+\sum_{i\in S_2}e_{ij}(x,y)] \tag{3}$$

$$u_j(S_1)+u_j(S_2)=\max_{x\in X_{S_1}}\min_{y\in Y_{N-S_1}}\sum_{i\in S_1}e_{ij}(x,y)+\max_{x\in X_{S_2}}\min_{y\in Y_{N-S_2}}\sum_{i\in S_2}e_{ij}(x,y) \tag{4}$$

比较(3)与(4)的函数表达方式及求极值的区域知

$$u_j(\bigcup_{l=1}^{2}S_l)\geqslant u_j(S_1)+u_j(S_2)$$

故 $m=2$ 时(2)成立.

假设 $m=k$ 时(2)成立,则根据上面的推导及 $S_1,S_2,\cdots,S_l(l=1,2,\cdots,k+1)$ 的不相交性有

$$u_j(\bigcup_{l=1}^{k+1}S_l)=u_j[(\bigcup_{l=1}^{k}S_l)\cup S_{k+1}]\geqslant u_j(\bigcup_{l=1}^{k}S_l)+u_j(S_{k+1})\geqslant\sum_{l=1}^{k}u_j(S_l)+u_j(S_{k+1})=\sum_{l=1}^{k+1}u_j(S_l)$$

故 $m=k+1$ 时(2)成立.

由以上归纳过程知(2)对任意 m 都成立.　　证毕

定义 5　如果 $u(N)=\sum_{i=1}^{n}u(i)$ 则称对策问题为非本质对策,否则称为本质对策.

定义 6　(分配矩阵)称矩阵 $X=(x_{ij})_{n\times p}$ 为分配矩阵,如果下面两式成立

$$u_j(N)=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\qquad j=1,2,\cdots,p$$

$u_j(i) \leqslant x_{ij}$ $\quad j = 1,2,\cdots,p \quad i = 1,2,\cdots,n$

x_{ij}—— 在合作型对策中，第 i 个局中人的第 j 个对策指标的收益.

分配矩阵的定义回答了如何在各个局中人之间分配收益的问题，它可统一表示为

$$E(U) = \{X = (x_{ij})_{n\times p} : u_j(N) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, u_j(i) \leqslant x_{ij}; j = 1,2,\cdots,p; i = 1,2,\cdots,n\}$$

定理 2 非本质对策只有一个分配矩阵.

证明 由定义 5 知 $u_j(N) = \sum_{i=1}^{n} u_j(i) \quad j = 1,2,\cdots,p$

由定义 6 知 $\quad u_j(N) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad j = 1,2,\cdots,p$

故 $$\sum_{i=1}^{n} u_j(i) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \tag{5}$$

又由定义 6 知 $u_j(i) \leqslant x_{ij} \quad j = 1,2\cdots,p \quad i = 1,2,\cdots,n$ (6)

故由(5)与(6)知此对策有唯一的分配矩阵

$$X = (u_j(i))_{n\times p}$$

证毕

设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$ 是两个不同的分配矩阵，$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj})^T$，$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{nj})^T$，$j = 1,2,\cdots,p$. 由定义 6 的两个限制条件知对于 $\forall\, j \in [1,p]$，如果 $\exists\, i_0 \in [1,n]$ 使得 $x_{i_0j} > y_{i_0j}$，则必 $\exists\, i_1 \in [1,n]$，满足 $x_{i_1j} < y_{i_1j}$. 这说明了在全体局中人的集合 N 上，任意两个不同的分配矩阵无法比较优劣性. 但就某一具体的联盟 $S \subset N$ 来讲，两个不同的矩阵 $X = (x_{ij})_{n\times p}$ 与 $Y = (y_{ij})_{n\times p}$ 则可能存在优劣性的区别，具体地，有如下定义：

定义 7 对于某一联盟 $S \subset N$，如果对于 $\forall\, i \in S$，有

$$\begin{cases} x_{ij} > y_{ij} \\ \sum_{i\in S} x_{ij} \leqslant u_j(S) \end{cases} \quad i \in S \quad j = 1,2,\cdots,p$$

则称在 S 上，分配矩阵 $X = (x_{ij})_{n\times p}$ 优超分配矩阵 $Y = (y_{ij})_{n\times p}$. 此定义的提出，促使寻找对于联盟 S 而言，较好的分配矩阵.

定义 8 在任何联盟 S 上都不能被优超的分配矩阵的集合称为对策的核心 $C(u)$.

对于本质非常和对策而言，核心 $C(u)$ 可通过如下定理确定.

定理 3 如果对策问题有核心 $C(u)$ 存在，则矩阵 $X = (x_{ij})_{n\times p} \in C(u)$ 的充要条件为

(1) $u_j(N) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ $\qquad$ (2) $\sum_{i\in S} x_{ij} \geqslant u_j(S), \forall\, S \subset N \quad j = 1,2,\cdots,p$

证明

充分性 设 $X = (x_{ij})_{n\times p}$ 满足上述两个约束条件，令 S 分别为 $\{1\},\{2\},\cdots,\{n\}$，连同(1)可证明 $X = (x_{ij})_{n\times p}$ 是分配矩阵，下面用反证法证明 $X = (x_{ij})_{n\times p}$ 没有被优超即可. 假定分配矩阵 $Y = (y_{ij})_{n\times p}$ 在某个 S 上优超 $X = (x_{ij})_{n\times p}$，则对 $\forall\, i \in S$ 有 $x_{ij} < y_{ij}$，故 $\sum_{i\in S} y_{ij} > \sum_{i\in S} x_{ij} \geqslant u_j(S)$，此式与定义 7 矛盾，这说明不存在满足假设条件的矩阵 $Y = (y_{ij})_{n\times p}$，因此 $X = (x_{ij})_{n\times p} \in C(u)$.

必要性 设 $X = (x_{ij})_{n\times p} \in C(u)$，则 $X = (x_{ij})_{n\times p}$ 是分配矩阵，故式(1)成立；下面用反证法证明式(2)成立.

假定 $\exists\, S \subset N$，使式(2)不成立，即 $\sum_{i\in S} x_{ij} < u_j(S)$，由下式定义 α_j

$$u_j(S) = \sum_{i\in S} x_{ij} + \sigma(S)\alpha_j \qquad \sigma(S)\text{：联盟 } S \text{ 中局中人的个数}$$

令
$$y_{ij}=\begin{cases}x_{ij}+a_j & i\in S\\ u_j(i)+\dfrac{[u_j(N)-u_j(S)-\sum_{i\in S}u_j(i)]}{\sigma(N-S)} & i\in N-S\end{cases}$$

可知 $u_j(N)=\sum_{i=1}^{n}y_{ij}$，$u_j(i)\leqslant y_{ij}$，$(i=1,2,\cdots,n)$. 这说明 $Y=(y_{ij})_{n\times p}$ 是分配矩阵. 又对于 $\forall\, i\in S$，有 $x_{ij}<y_{ij}$，且 $u_j(S)=\sum_{i\in S}y_{ij}$，因此由定义 8 知 $Y=(y_{ij})_{n\times p}$ 在 S 上优超 $X=(x_{ij})_{n\times p}$，这与 $X=(x_{ij})_{n\times p}\in C(u)$ 矛盾，因此式(2)必成立. 证毕

注　定理证明中的 $j\in[1,p]$.

对于本质常和对策而言，有如下结论：

定理 4　本质常和对策的 $C(u)=\emptyset$.

证明　设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$n>2$，设 $S=\{2,3,\cdots,n\}$，则 $N-S=\{1\}$，假设 $C(u)\neq\emptyset$，且 $X=(x_{ij})_{n\times p}\in C(u)$，则由定理 3 及定义 4 知

$$\sum_{i=2}^{n}x_{ij}\geqslant u_j(2,3,\cdots,n)=u_j(S)=u_j(N)-u_j(N-S)=u_j(N)-u_j(1) \tag{7}$$

又因为 $X=(x_{ij})_{n\times p}\in C(u)$，故 $X=(x_{ij})_{n\times p}$ 是分配矩阵，于是有

$$x_{1j}+\sum_{i=2}^{n}x_{ij}=u_j(N) \tag{8}$$

由(7)与(8)知 $u_j(1)\geqslant x_{1j}$；同理可证 $u_j(i)\geqslant x_{ij}$，$i=2,3,\cdots,n$. 因此有 $\sum_{i=1}^{n}u_j(i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$，根据定义 5 知 $u_j(N)>\sum_{i=1}^{n}u_j(i)$，故有 $u_j(N)>\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$，这与 $X=(x_{ij})_{n\times p}$ 是分配矩阵矛盾，因此必有 $C(u)=\Phi$.

注　定理证明中的 $j\in[1,p]$. 证毕

3　实例与结束语

地区 1 有森林资源，可用来满足本地区的轻工业与建筑业的需要，利润分别为 a 元与 b 元；地区 2 需购买木材以保障本地区轻工业与建筑业的需要，若地区 1 卖木材给地区 2 相应的行业，利润分别为 c 元与 d 元，$0<a<c$，$0<b<d$. 若不考虑利润的跨行业可加性，确定该问题的核心.

对此例而言，$N=\{1,2\}$，可能的 S 为 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，$p=2$.

$$u(1)=\{u_1(1),u_2(1)\}=\{a,b\}$$
$$u(2)=\{u_1(2),u_2(2)\}=\{0,0\}$$
$$u(1,2)=\{u_1(1,2),u_2(1,2)\}=\{c,d\}$$

$u(S)$ 满足定义 3，$u(S)$ 为此例的特征函数，由定义 4 与定义 5 知，此对策为非常和本质对策，且 $u(S)$ 满足定理 1. 设分配矩阵为 $X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$，其核心 $C(u)$ 满足下面的约束条件

$$\begin{cases}x_{11}+x_{21}=c\\ x_{12}+x_{22}=d\\ x_{11}\geqslant a,x_{12}\geqslant b\\ x_{21}\geqslant 0,x_{22}\geqslant 0\end{cases}$$

$C(u)$ 可表示为 $C(u)=\left\langle\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ c-x_1 & d-x_2\end{bmatrix}\middle|\, a\leqslant x_1\leqslant c;b\leqslant x_2\leqslant d\right\rangle$

此例是一个非常小规模的实例，对于较大规模的问题，可用有关计算软件计算求解.

本文是在特征函数存在(至少是 Pareto 最优意义下存在)的情况下讨论的,在该领域内还有许多有意义的内容值得研究,如当定义 2 与定义 3 都不满足时,如何引入新的概念来刻划联盟的最大收益,又如在多准则的情况下,对策的稳定集、核仁的性质、表示形式、存在性与求解方法等都有待于今后深入进行研究.

参考文献

1 Tomas L C. Games: theory and applications. Ellis Horwood Limited. 1984

2 Fernandez F R. Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games. Journal of Optimization Theory and Applications, 1996; 89(1): 116~127

3 Steuer R E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Applications. New York: Wiley, 1986

Study on Non-constant Sum Multipersons and Multicriteria Cooperative Game

Jin Rui, Han Wenxiu
School of Management, Tianjin Unirersity

Abstract This paper discusses some problems of non-constant sum multipersons and multicriteria cooperative game. The definitions of characteristic function, allocating mattix, core as well as other relative concepts are proposed. The nature of the above definitions and the existence of core are discussed, in addition, a method for determining the core of a given problem is presented. Finally, an example is introduced to illustrate the above results.

Keywords: multiperson and multicriteria game, core, characteristic function, allocating matrix

(上接第 31 页)

The Effects on Economic System of Expanding Social Insurance Coverage: The CGE Analysis

Bai Jie, Xi Youmin
School of Management, Xi'an Jiaotong University

Abstract Applying computable general equilibrium model and comparative static method, the effects on economic system of expanding social insurance coverage and gradually uniforming social insurance payroll tax rate are analyzed quantificationally and wholly. In this way, the effects on social welfare, on production, on the level and composition of final demand in production market, and on labor demand in labor market are analyzed. Then some advice is given on social insurance reform.

Keywords: social insurance, social accounting matrix, computable general equilibrium (CGE) model