第4卷第1期 管理科学学报 Vol. 4 No. 1
2001年2月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Feb., 2001

二度价格歧视的进一步研究①

唐小我
(电子科技大学管理学院，成都 610054)

摘要：系统地讨论了二度价格歧视条件下垄断厂商的收益最大化条件和利润最大化条件. 首先分别讨论了线性需求函数和非线性需求函数情形下的收益最大化问题，接着讨论了线性需求函数和非线性需求函数情形下的利润最大化问题. 针对上述问题，本文均给出了严谨的理论分析和有关的计算公式. 本文的研究成果具有较大的理论价值和应用价值.

关键词：二度价格歧视；垄断厂商；收益最大化；利润最大化
中图分类号：F016;F224.0 **文献标识码**：A **文章编号**：1007-9807(2001)01-0007-05

0 引 言

二度价格歧视是指垄断厂商把商品购买量划分为两个或两个以上的等级，对不同等级的购买量索取不同的价格. 文[1—5]均介绍过二度价格歧视的概念，但并未就如何应用二度价格歧视方法展开数量分析. 文[6]在线性需求函数情形下讨论了二度价格歧视问题，给出了垄断厂商收益最大化条件. 文[7]在非线性需求函数情形下讨论了二度价格歧视问题，给出了二段定价、三段定价和四段定价情形下垄断厂商收益最大化条件，但并未讨论任意分段定价情形下垄断厂商收益最大化条件. 本文将在文[6,7]的基础上对二度价格歧视问题作进一步的研究，讨论任意分段定价情形下垄断厂商收益最大化条件，并将有关结论推广到任意分段定价情形下垄断厂商利润最大化问题.

1 线性需求函数条件下垄断厂商收益最大化分析

设垄断厂商的产品的需求函数为 $P = a - bQ$. 垄断厂商拟在一定销售范围内采用 n 段定价方法. 设销售量 Q_n 既定，将 $(0, Q_n]$ 分为 n 段，即 $[0, Q_n] = (0, Q_1] \cup (Q_1, Q_2] \cup (Q_2, Q_3] \cup \cdots \cup (Q_{i-1}, Q_i] \cup \cdots \cup (Q_{n-1}, Q_n]$，第 i 段上的价格为 $P_i = a - bQ_i$. 采用如此定价方法后，垄断厂商的收益 TR 为

$$TR = P_1Q_1 + P_2(Q_2 - Q_1) + P_3(Q_3 - Q_2) + \cdots + P_i(Q_i - Q_{i-1}) + \cdots + P_n(Q_n - Q_{n-1})$$

将 $P_i = a - bQ_i$ 代入上式并化简可得

$$TR = -b\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 + b\sum_{i=2}^{n} Q_{i-1}Q_i + aQ_n = -b\sum_{i=1}^{n-1} Q_i^2 + b\sum_{i=2}^{n} Q_{i-1}Q_i + aQ_n - bQ_n^2 \tag{1}$$

在 Q_n 既定的条件下，TR 最大化的条件为 $\frac{\partial TR}{\partial Q_i} = 0$，即

$$\frac{\partial TR}{\partial Q_1} = b(Q_2 - 2Q_1) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial TR}{\partial Q_i} = b(Q_{i-1} + Q_{i+1} - 2Q_i) = 0 \tag{3}$$

$$i = 2, 3, \cdots, n-1$$

① 收稿日期：2000-01-14；修订日期：2000-09-26.
基金项目：国家杰出青年科学基金项目(79725002)；国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金项目(教技厅[1997]2号).
作者简介：唐小我，男，博士，教授，博士生导师.

由式(2)可得 $Q_2 = 2Q_1$，即

$$Q_2 - Q_1 = Q_1 \tag{4}$$

由式(3)可得 $Q_{i-1} + Q_{i+1} - 2Q_i = 0$，即

$$Q_i - Q_{i-1} = Q_{i+1} - Q_i \tag{5}$$

$$i = 2,3,\cdots,n-1$$

由式(5)可得

$$Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2 = \cdots = Q_i - Q_{i-1} = \cdots = Q_n - Q_{n-1} \tag{6}$$

由式(4)和式(6)可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 - Q_1 \\ &= Q_3 - Q_2 \\ &= \cdots = Q_i - Q_{i-1} \\ &= \cdots = Q_n - Q_{n-1} \end{aligned} \tag{7}$$

显然有 $Q_1 + (Q_2 - Q_1) + (Q_3 - Q_2) + \cdots + (Q_i - Q_{i-1}) + \cdots + (Q_n - Q_{n-1}) = Q_n$，即 $Q_1 + Q_1 + Q_1 + \cdots + Q_1 = Q_n$，即

$$Q_1 = \frac{1}{n}Q_n \tag{8}$$

由式(7)可得 $Q_i = Q_1 + Q_{i-1}$

$i = 2,3,\cdots,n$. 由此可得

$$Q_2 = Q_1 + Q_1 = 2Q_1 = \frac{2}{n}Q_n$$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = \frac{1}{n}Q_n + \frac{2}{n}Q_n = \frac{3}{n}Q_n$$

$$\vdots$$

$$Q_k = Q_1 + Q_{k-1} = \frac{k}{n}Q_n$$

$$\vdots$$

$$Q_{n-1} = Q_1 + Q_{n-2} = \frac{n-1}{n}Q_n$$

归纳起来，有如下结论.

定理 1 设垄断厂商在 $(0,Q_n]$ 上采用 n 段定价. 垄断厂商收益最大化条件为 $Q_i = \frac{i}{n}Q_n, i = 1, 2,\cdots,n-1$ 即 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{i-1},Q_i,Q_{i+1},\cdots,Q_n$ 在需求量轴上呈等距分布. 换言之，各分段区间的长度相等.

2 非线性需求函数条件下垄断厂商收益最大化分析

设垄断产品的需求函数为 $P = f(Q)$，$f(Q)$ 为 Q 的非线性函数. 假定 $f(Q)$ 为连续可导函数. 进一步假定 $f(Q)$ 严格单调递减，即 $f'(Q) < 0$. 还假定 $f''(Q) > 0$，即假定需求曲线凸向原点.

对于非线性需求函数条件下垄断厂商收益最大化问题，不一定存在最优解. 当需求函数 $f(Q)$ 在 $Q = 0$ 处不连续($Q = 0$ 为 $f(Q)$ 的第二类间断点)时，垄断厂商收益最大化问题就无解. 解决此问题的办法是，任取 $Q_0 > 0$，在 $Q \geqslant Q_0$ 的范围内实施价格歧视.

因 Q_0 可以取得任意小，完全可以用在 $(Q_0, Q_n]$ 的价格歧视作为在 $(0,Q_n]$ 上的价格歧视. 因此可以认为，非线性需求函数条件下垄断厂商收益最大化问题总是有解.

下面来讨论垄断厂商采用 n 段定价方法时，垄断厂商收益最大化的条件.

对于给定的 $Q_n > 0$，将区间分为 n 段，即 $(0, Q_n] = (0,Q_1] \cup (Q_1,Q_2] \cup \cdots \cup (Q_{n-1},Q_n]$. 第 i 段上的价格为 $P_i = f(Q_i)$. 垄断厂商的收益 TR 为

$$\begin{aligned} TR &= f(Q_1)Q_1 + f(Q_2)(Q_2 - Q_1) \\ &\quad + \cdots + f(Q_i)(Q_i - Q_{i-1}) \\ &\quad + \cdots + f(Q_n)(Q_n - Q_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)(Q_i - Q_{i-1}) \quad (\text{规定 } Q_0 = 0) \end{aligned}$$

TR 最大化条件为 $\frac{\partial TR}{\partial Q_i} = 0$，即

$$(Q_i - Q_{i-1})f'(Q_i) - f(Q_i) - f(Q_{i+1}) = 0$$

$$i = 1,2,\cdots,n-1 \tag{9}$$

设 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{i-1},Q_i,Q_{i+1},\cdots,Q_{n-1}$ 为式(9)的解，则必有

$$0 < Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_{i-1} < Q_i < Q_{i+1} < \cdots < Q_{n-1} < Q_n \tag{10}$$

由式(10)可得 $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3 \neq \cdots \neq Q_{i-1} \neq Q_i \neq Q_{i+1} \neq \cdots \neq Q_{n-1} \neq Q_n$，从而由式(9)可得

$$f'(Q_i) = \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_i - Q_{i-1}}$$

$$i = 1,2,\cdots,n-1 \tag{11}$$

因此，在最优解存在的条件下，各分段点 Q_i($i = 1,2,\cdots,n-1$)可由式(9)或式(11)求出.

关于各分段区间的长度之间的关系，有如下结论.

定理 2 $0 < Q_1 < Q_2 - Q_1 < Q_3 - Q_2 < \cdots < Q_i - Q_{i-1} < Q_{i+1} - Q_i < \cdots < Q_n - Q_{n-1}$.

证明 由式(11)可得

$$f'(Q_i) = \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_i - Q_{i-1}}$$

$$= \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_{i+1} - Q_i} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{Q_i - Q_{i-1}} \quad (12)$$

因 $f(Q)$ 在 $[Q_i,Q_{i+1}]$ 上连续，并在 (Q_i,Q_{i+1}) 上可导，根据拉格朗日定理，必存在 Q^* 满足 $Q_i < Q^* < Q_{i+1}$，使得

$$f'(Q^*) = \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_{i+1} - Q_i} \quad (13)$$

将式(13)代人式(12)得

$$f'(Q_i) = f'(Q^*)\frac{Q_{i+1} - Q_i}{Q_i - Q_{i-1}}，\text{即}$$

$$\frac{f'(Q_i)}{f'(Q^*)} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{Q_i - Q_{i-1}}$$

因此 $Q_i < Q^*$，故 $f'(Q^*) > f'(Q_i)$. 因 $f'(Q^*) < 0$，故有 $1 < \frac{f'(Q_i)}{f'(Q^*)}$，即 $1 < \frac{Q_{i+1} - Q_i}{Q_i - Q_{i-1}}$，即 $Q_i - Q_{i-1} < Q_{i+1} - Q_i$. 证毕

定理2表明，在非线性需求函数情形下，垄断厂商收益最大化条件为各分段区间的长度单调递增. 定理1表明，在采用 n 段定价方法时，对于线性需求函数情形，垄断厂商收益最大化条件为各分段区间的长度相等. 下面将证明，定理1的逆定理也成立. 有下述结论.

定理3 设垄断厂商在 $(0,Q_n]$ 上实施 n 段定价. 垄断厂商收益最大化条件为各分段区间长度相等的充要条件为需求函数为线性需求函数.

充分性前面已证明. 现根据式(11)再证如下.

设需求函数为线性需求函数 $P = a - bQ(a > 0, b > 0)$，则 $f'(Q_i) = -b$.

$$f(Q_{i+1}) - f(Q_i) = (a - bQ_{i+1}) - (a - bQ_i) = -b(Q_{i+1} - Q_i).$$

由式(11)可得

$$f'(Q_i) = \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_i - Q_{i-1}} = \frac{-b(Q_{i+1} - Q_i)}{Q_i - Q_{i-1}}.$$

从而有 $-b = \frac{-b(Q_{i+1} - Q_i)}{Q_i - Q_{i-1}}$，即 $Q_{i+1} - Q_i = Q_i - Q_{i-1}$.

下面证必要性.

如果 $Q_i - Q_{i-1} = Q_{i+1} - Q_i$，$i = 1,2,\cdots,n-1$，则由式(11)可得

$$f'(Q_i) = \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_i - Q_{i-1}} = \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_{i+1} - Q_i} = \frac{\Delta f(Q_i)}{\Delta Q_i} \quad i = 1,2,\cdots,n-1 \quad (14)$$

式(14)中，$\Delta f(Q_i) = f(Q_{i+1}) - f(Q_i)$，$\Delta Q_i = Q_{i+1} - Q_i$.

$f'(Q_i)$ 表示经过需求曲线上点 $(Q_i, f(Q_i))$ 的切线的斜率. $\frac{\Delta f(Q_i)}{\Delta Q_i}$ 表示连接需求曲线上两点 $(Q_i, f(Q_i))$ 和 $(Q_{i+1}, f(Q_{i+1}))$ 的割线的斜率. 考虑到需求函数的凸性假定，由式(14)可以得出，需求函数 $P = f(Q)$ 在每一个分段区间上都必须是线性函数. 再由需求函数连续可导的条件可知，需求函数 $P = f(Q)$ 在区间 $(0,Q_n]$ 上必须是线性函数. 由于 Q_n 可以任意给定，故需求函数 $P = f(Q)$ 在其整个定义域上必须是线性函数. 证毕

3 线性需求函数条件下垄断厂商利润最大化分析

设垄断厂商的成本函数为 $TC(Q)$. 设垄断厂商的利润最大化产量为 Q^*，记 $Q_n = Q^*$. 与垄断厂商收益最大化问题不同的是，Q_n 不是既定，而是需要作为待定数由最优化条件加以确定.

将区间 $(0,Q_n]$ 分为 n 段，即

$$(0,Q_n] = (0,Q_1] \cup (Q_1,Q_2] \cup \cdots \cup (Q_{i-1},Q_i] \cup \cdots \cup (Q_{n-1},Q_n]$$

第 i 段上的价格为 $P_i = a - bQ_i$. 垄断厂商的利润 π 为

$$\pi = P_1Q_1 + P_2(Q_2 - Q_1) + \cdots + P_i(Q_i - Q_{i-1}) + \cdots + P_n(Q_n - Q_{n-1}) - TC(Q_n)$$
$$= -b\sum_{i=1}^{n}Q_i^2 + b\sum_{i=2}^{n}Q_{i-1}Q_i + aQ_n - TC(Q_n)$$

π 最大化的条件为 $\frac{\partial\pi}{\partial Q_i} = 0, i = 1,2,\cdots,n$，即

$$Q_2 - 2Q_1 = 0 \quad (15)$$

$$Q_{i-1} + Q_{i+1} - 2Q_i = 0 \quad i = 2,3,\cdots,n-1 \quad (16)$$

$$bQ_{n-1} - 2bQ_n + a - MC(Q_n) = 0 \quad (17)$$

联立求解式(15)，式(16)和式(17)即可求出最优的 Q_i，$i = 1,2,\cdots,n$.

求解步骤如下：

1) 联立求解式(15)和式(16)可得

$$Q_i = \frac{i}{n}Q_n \quad i = 1,2,\cdots,n \quad (18)$$

2) 将 $Q_{n-1} = \frac{n-1}{n}Q_n$ 代人(17)式并整理可

得

$$a - b(1 - \frac{1}{n})Q_n = MC(Q_n) \qquad (19)$$

由式(19)可以解出 Q_n. 再由式(18)可具体算出 Q_i, $i = 1, 2, \cdots, n-1$.

由式(18)可知,在线性需求函数情形下,垄断厂商的利润最大化条件为各分段区间的长度相同.

由式(17),可以得出如下结论.

定理 4 在线性需求函数情形下,垄断厂商采用 n 段定价法的利润最大化产量大于其在非价格歧视条件下的利润最大化产量.

证明 垄断厂商采用 n 段定价法的利润最大化产量 Q_n 满足式(17). 由式(17)可得 $b\frac{n-1}{n}Q_n + a - 2bQ_n - MC(Q_n) = 0$,即

$$\frac{n-1}{n}bQ_n + MR(Q_n) = MC(Q_n) \qquad (20)$$

设垄断厂商在非价格歧视条件下的利润最大化产量为 Q^*,则 Q^* 必然满足

$$MR(Q^*) = MC(Q^*) \qquad (21)$$

由式(20)可得

$$MR(Q_n) < MC(Q_n) \qquad (22)$$

无论是价格歧视还是非价格歧视,垄断厂商利润最大化产量都位于边际成本递增的阶段. 将式(21)和式(22)相比较可得出 $Q_n > Q^*$ 证毕

例 1 设某垄断厂商的成本函数为 $TC = 60Q + Q^2$,需求函数为 $P = 360 - 2Q$. 设垄断厂商在实施价格歧视时,采用二段定价法. 求利润最大化产量,并确定价格的分段区间.

解 本例中,$n = 2$, $a = 360$, $b = 2$, $MC(Q) = 60 + 2Q$. 设利润最大化产量为 Q_2,则由式(19)可得

$$360 - 2(1 + \frac{1}{2})Q_2 = 60 + 2Q_2 \qquad (23)$$

解式(23)可得 $Q_2 = 60$. 相应的价格为 $P_2 = 360 - 2 \times 60 = 240$. 由式(15)可得 $Q_1 = \frac{1}{2}Q_2 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$, 相应的价格为 $P_1 = 360 - 2 \times 30 = 300$.

垄断厂商的最大利润为

$$\begin{aligned}\pi &= P_1Q_1 + P_2(Q_2 - Q_1) - TC(Q_2) \\ &= 300 \times 30 + 240(60 - 30) - (60^2 + 60^2) \\ &= 9000\end{aligned}$$

注:在非价格歧视条件下,垄断厂商的利润最大化产量为 50,相应的最大利润为 7 500.

4 非线性需求函数条件下垄断厂商利润最大化分析

设垄断厂商采用 n 段定价方法. 各分点为 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$. 设垄断厂商的需求函数为 $P = f(Q)$,成本函数为 $TC(Q)$,则利润 π 为

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)(Q_i - Q_{i-1}) - TC(Q_n)$$

$$(规定\ Q_0 = 0)$$

可以证明,π 最大化的条件为

$$f'(Q_i) = \frac{f(Q_{i+1}) - f(Q_i)}{Q_i - Q_{i-1}} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1 \qquad (24)$$

$$f'(Q_n) = \frac{MC(Q_n) - f(Q_n)}{Q_n - Q_{n-1}} \qquad (25)$$

联立求解式(24)和式(25)可得到最优分点 Q_i, $i = 1, 2, \cdots, n$.

根据式(24)和式(25),可以证明下述结论.

定理 5 设 $Q_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 表示最优的分点,则有

结论 1 $Q_1 < Q_2 - Q_1 < Q_3 - Q_2 < \cdots < Q_i - Q_{i-1} < Q_{i+1} - Q_i < \cdots < Q_n - Q_{n-1}$;

结论 2 $Q_1 = Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2 = \cdots = Q_i - Q_{i-1} = Q_{i+1} - Q_i = \cdots = Q_n - Q_{n-1}$ 的充要条件为 $P = f(Q)$ 为线性需求函数;

结论 3 垄断厂商采用 n 段定价法的利润最大化产量大于其在非价格歧视条件下的利润最大化产量.

下面只对结论 3 的证明作一个简要说明. 关键是证明 $MR(Q_n) < MC(Q_n)$.

由式(25)可得 $Q_nf'(Q_n) - Q_{n-1}f'(Q_n) = MC(Q_n) - f(Q_n)$,即

$$Q_nf'(Q_n) + f(Q_n) - Q_{n-1}f'(Q_n) = MC(Q_n)$$

即 $$MR(Q_n) - Q_{n-1}f'(Q_n) = MC(Q_n) \qquad (26)$$

因 $f'(Q) < 0$,从而 $-Q_{n-1}f'(Q_n) > 0$. 由式(26)可得 $MR(Q_n) < MC(Q_n)$.

5 结束语

本文对二度价格歧视问题作了完整和系统的研究，分别在线性需求函数和非线性需求函数情形下讨论了垄断厂商的收益最大化和利润最大化问题，并给出了有关的计算公式．这些公式的计算量都不大（线性需求函数条件下尤其如此），因而很便于在实际中推广应用．关于二度价格歧视问题的分段段数的确定，主要取决于实际操作上的方便．一般说来，分段的数目越少，操作上越方便．建议分段的数目以 3 — 5 为宜．

参 考 文 献：

[1] 梁东黎，刘 东．微观经济学[M]．南京：南京大学出版社，1991

[2] 宋承先．现代西方经济学（微观经济学）[M]．上海：复旦大学出版社，1994

[3] Truett L J, Truett D B. Managerial economics: analysis , problems ,cases[M]. South-Western College Publishing, 1998

[4] Petersen H C, Lewis W C. Managerial economics[M]. Macmillan Publishing Company, 1994

[5] Pindyck R S, Rubinfeld D L. Microeconomics[M]. Prentice Hall, 1995

[6] 唐小我．二度价格歧视情形下垄断厂商收益最大化条件[J]．电子科技大学学报，1997，22(2)：194-198

[7] 唐小我．非线性需求函数条件下二度价格歧视研究[J]．电子科技大学学报，1999，28(1)：78-83

A further study on the second degree price discrimination

TANG Xiao-wo

Management College of University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China

Abstract: In this paper, we study systematically the problem of maximizing monopoly revenue and monopoly profit under the condition of the second degree price discrimination, and some new results of both theoretical and practical importance are obtained. The relevant formulas for computing maximum revenue and maximum profit are presented here. The computing formulas given in this paper are simple and easy to carry out.

Key words: second degree price discrimination; monopoly firm; revenue maximization; profit maximization