

# 不变方差弹性(CEV)过程下 障碍期权的定价<sup>1)</sup>

谢 赤

(湖南大学工商管理学院, 长沙 410082)

**摘要:**论证了当基础资产遵循不变方差弹性(constant elasticity of variance, CEV)过程时障碍期权的定价问题, 构建了一个三项式模型来对 CEV 过程进行近似化并利用其为障碍期权定价. 就标准期权而言, CEV 与 Black-Scholes 模型之间的相关量相对较小. 结论是, 拥有一个准确的模型描述对依赖极限期权比标准期权要重要得多.

**关键词:**CEV 过程; 障碍期权; 期权定价; 三项式模型; 标准期权

**中图分类号:**F830

**文献标识码:**A

**文章编号:**1007-9807(2001)05-0013-08

## 0 引言

目前奇异期权(如障碍期权)在场外市场变得越来越流行, 默顿提出了一个“下跌失效”看跌期权问题的较理想的解答<sup>[1]</sup>. 此后学术界又开发出许多欧式路径依赖期权问题的较好答案, 并且也提出了处理美式或其它复杂路径依赖期权的数量方法. 大多数文献的研究都在基础资产遵循几何布朗运动的假设前提下着眼于路径依赖期权. 即基础资产的价格是按对数型分布的. 正如 Black-Scholes 模型所假定的, 它拥有一些“回收”<sup>[2]</sup>. 实证研究表明, 股票价格一般不太可能呈对数型分布. 当将 B-S 模型运用于股票期权定价时, 某些如众所周知那样的结算价格偏差还是保持下来了.

本文重新考察了当基础资产遵循 CEV 发散过程时某些路径依赖期权的定价问题. 这一过程具备基础资产的波动与其价格水平相联系的优点, 它与股票波动趋于股票价格上涨和下跌变化的实证研究相一致. 正如 Cox 所指出的, “波动微笑”的缘故便是股票价格变动与波动变化之间是负相关的<sup>[3]</sup>. 由 Cox 提出的 CEV 期权定价模型分离了这种负相关联系<sup>[4]</sup>. 这样, 将 CEV 过程应用

于路径依赖期权以及标准期权就应该是一种明智的做法.

采用三项式方法对 CEV 过程进行近似处理. 三项式方法的分过程是通过变量转换来建立的, 然后构建起三项式概率以保证非负性, 因而也保证了收敛性. 当这一方法用来评价 CEV 过程下的标准期权时其准确性相当高. 然后使用同样方法来评价障碍期权, 并表明了 CEV 过程下这种期权的价格可以在对波动偏差进行调整后方便地由对数型过程下的期权推导出来. 对标准期权而言, CEV 模型与 B-S 模型之间的这种差别相当小. 直觉上, 基于极限的期权应表现出比那些基于基础资产平均值或三项式值的期权的偏差更大.

## 1 CEV 过程的描述

B-S 期权定价模型假设基础股票价格遵循几何布朗运动<sup>[1]</sup>:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

其中,  $z(t)$  为标准布朗运动. 这一假设意味着, 在一个小区间  $dt$  内, 股票价格的变动百分率  $dS/S$  呈正态分布, 其平均值为  $\mu dt$ , 瞬态方差为  $\sigma^2 dt$ .

<sup>1)</sup> 收稿日期: 2000-02-14; 修订日期: 2001-05-25.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970015); 湖南省自然科学基金资助项目(99JJY20065).

作者简介: 谢赤(1963-), 男, 湖南株洲人, 博士, 教授.

如我们所知,对数正态假定并没有取得对股票价格或股票指数的实证检验,作为其替代方法的随机过程便受到关注并广泛应用于期权定价.例如, Cox 和 Ross 就对称作不变方差弹性(CEV)过程的随机过程作了研究<sup>[4,5]</sup>:

$$dS = \mu S dt + S^{\alpha} dz \quad (2)$$

其中,  $\alpha$  为常数,称作弹性因子,且有  $0 \leq \alpha < 2$ . 对  $0 \leq \alpha < 2$ , 当资产价值达到零时 CEV 过程具有一种吸收障碍.

在  $\alpha = 2$  的极端情况下,式(2)简化成式(1),意味着几何布朗运动为 CEV 过程的特例. 根据 Cox 的研究<sup>[4]</sup>,可将  $\alpha$  的范围限定在区间  $[0, 2]$ ,  $\alpha < 0$  的过程并不具备合理的经济性质,因为随着接近起始点波动的消失,资产价格变负.

式(2)是建立在自然概率量度,即 P-量度的基础上的,为了给 CEV 过程下的证券定价,首先将式(2)中的随机过程转换成在其中所有证券的收缩价格过程都是加倍的 Q 量度方法. 在这种情况下,使用累积货币市场账户作计算数据. 在 Q 量度法中,修正过的过程除了以无风险利率  $r$  (这里假设的常数)替代  $\mu$  外其它保持不变:

$$dS = rSdt + \sigma S^{\alpha} dz \quad (3)$$

采用加倍性质可以通过确定 Q 量度方法下到期时正整化后的清偿期望值来评价衍生品. 有关衍生品评价中 Q 量度地位的问题可参见文[6].

为了对在时间  $T$  到期的衍生品实施这一步骤,需要 Q 量度方法下资产价格的密度函数. 条件  $S_t$  ( $t < T$ ) 下  $S_T$  的密度中的连续部分由下式给出:

$$f(S_T, T; S_t, t) = (2 - \alpha)r^{1-\alpha} (ab)^{1-\alpha} e^{-\alpha t} I_{1-\alpha}(2\sqrt{ab}) \quad (4)$$

$$\text{其中 } \begin{cases} \tau = T - t \\ \gamma = \frac{2r}{\sigma^2(2-\alpha)(e^{r(2-\alpha)\tau} - 1)} \\ \alpha = \gamma S_t^{-\alpha} e^{r(2-\alpha)\tau} \\ b = \gamma S_t^{-\alpha} \end{cases}$$

且  $I_q$  为第一类级  $q$  的修正型 Bessel 函数.

Cox 推导出了欧式看涨期权的价格

$$C(S, \tau) = S^{\alpha} Q(2c; 2 + 2/(2 - \alpha), 2a) - X e^{-r\tau} Q(2c; 2 - 2/(2 - \alpha), 2a) \quad (5)$$

其中  $c = \gamma X^{2-\alpha}$ ;  $X$  为期权的清算价格;  $Q(c; u, v)$  为自由度为  $u$  和非中心系数为  $v$  的非中心  $\chi^2$  分布余函数.  $Q(c; u, v)$  定义为

$$Q(c; u, v) = \int_{c/2}^{\infty} e^{-w} w^{-u/2} (2w/v)^{u-2/4} I_{u-2, v/2}(\sqrt{2vw}) dw \quad (6)$$

非中心  $\chi^2$  分布余函数也可以写成无穷级数之和

$$Q(c; u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n, v/2) G(n + (u-2)/2, c/2)$$

其中  $g(u, v) = e^{-v} v^{-1} / \Gamma(u)$  为  $\gamma$  密度函数,且

$$G(u, v) = \int_0^v g(u, x) dx \quad (7)$$

为珈玛分布余函数.

## 2 CEV 过程的三项式模型

这里提出使用三项式方法的 CEV 过程的离散近似法,假设资产价格增量按照 Q 量度法表示. 转换变量  $S$  使转换后的过程具有不变波动. 设

$$y = y(t, S)$$

应用 Ito 定理,  $y$  的随机差分方程为

$$dy = q(t, S)dt + \frac{\partial y}{\partial S} \sigma S^{\alpha} dz \quad (8)$$

$$\text{其中 } q(t, S) = \frac{\partial y}{\partial t} + rS \frac{\partial y}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^{2\alpha} \frac{\partial^2 y}{\partial S^2}$$

为了保证式(8)所对应的过程具有不变波动,必须找到一种变换以便对某个正常数  $\nu$ , 有

$$\frac{\partial y}{\partial S} \sigma S^{\alpha} = \nu \quad (9)$$

这相当于

$$\frac{\partial y}{\partial S} = \frac{\nu}{\sigma} S^{-\alpha}$$

对  $\alpha \neq 2$ , 该转换由下式给出

$$y = \frac{\nu}{\sigma(1-\alpha/2)} S^{1-\alpha/2} \quad (10)$$

对于  $\alpha = 2$ , 合适的转换由下式给出

$$y = \nu/\sigma \log(S)$$

就后一种情况,一些学者已对三项式近似方法作了检验<sup>[7-10]</sup>. 对  $\alpha \neq 2$  的情况,转换方程变成

$$dy = \left[ r(1-\alpha/2)y - \frac{\alpha\nu^2}{4(1-\alpha/2)y} \right] dt + \nu dz \quad (11)$$

转换过程式(11)具有不变波动,它具有一个二叉树的二维栅格的简单结构. 然而,转换后的过程具有更复杂的移动项,当  $y \rightarrow 0$  时(仅当  $\alpha = 0$  时有唯一例外),它将发散. 当区域接近于  $y = 0$

时标准三项式分过程便会产生问题, 因而三项式跳跃和概率一定要选择得与移动 (和波动) 匹配。

为了解决这一问题, 按 Tian 所建议的那样对标准三项式方法作修改<sup>[1]</sup>, 按照这一方案, 三项式分过程能同时利用转换过程式 (11) 和原始过程式 (3), 这一方法分两步实施, 首先, 过程式 (11) 用于定义一个平滑空间, 空间  $(t, y)$  二维栅极通过分步完成:

$t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + N\Delta t$   
 $y_0 - M_1\Delta y, \dots, y_0 - \Delta y, y_0, y_0 + \Delta y, \dots, y_0 + M_2\Delta y$  其中,  $(t_0, y_0)$  为三项式过程的起始点,  $\Delta t$  和  $\Delta y$  分别为时间和状态变量的增量;  $y_0$  通过下述变换与初始资产价格  $S_0$  关联。

$$y_0 = \frac{\nu}{\sigma(1 - \alpha/2)} S_0^{1-\alpha/2}$$

为简单起见, 定义  $t_i = t_0 + i\Delta t, i = 0, 1, 2, \dots, N$   
 $y_j = y_0 + j\Delta y, j = -M_1, \dots, -1, 0, +1, \dots, M_2$   
 为了保证三项式方法的稳定性, 有必要施加下述约束:

$$\Delta y = \lambda \nu \sqrt{\Delta t} \quad (12)$$

其中  $\lambda \geq 1$  为任意常数

正常情况下, 三项式分过程定义在二维栅极上, 后者又与转换过程的移动和波动相匹配。然而, 这种标准方法由于转换过程的移动项没有约束在零, 并且存在从上面可以接近的零状态 ( $y = 0, S = 0$ ) 的正概率而对 CEV 过程的所有的  $\alpha$  值都将无效, 其解决办法就是将  $(t, y)$  空间中的二维栅极影射到  $(t, S)$  空间中等价二维栅极上, 影射手段为由下式定义的式 (10) 的逆变换

$$S = \begin{cases} \left[ \frac{\alpha(1 - \alpha/2)}{\nu} y \right]^{\frac{1}{1-\alpha/2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (13)$$

这一新的栅极分步表示为

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$$

$$S_{-M_1}, \dots, S_{-1}, S_0, S_1, \dots, S_{M_2}$$

其中  $S_j = \begin{cases} \left[ \frac{\alpha(1 - \alpha/2)}{\nu} y \right]^{\frac{1}{1-\alpha/2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

下一步就是要与这种在  $(t, S)$  空间的新的二维栅极上确定三项式分过程, 基础资产的价格被限制仅仅在这种栅极上的点运动, 这保证了计算的效率, 因为三项式网络将总是适当地进行再组合, 假设资产价格的目前状态为  $S_j$ , 下一步运动将

分别以概率  $p_1(j), p_2(j), p_3(j)$  使资产价值取  $S_{j+1}, S_j$  或  $S_{j-1}$ , 对  $k = j$  的情形这种分支过程显示在图 1 中。

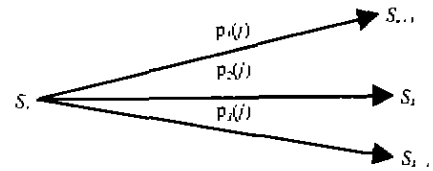


图 1 一般化后的三项式分过程

在标准三项式分过程中, 一般有  $k = j$ , 换句话说, 基础资产在下一时期可能上移一个水平, 也可能下移一个水平, 或保持不变, 这种标准三项式分过程对对数正态发散过程 ( $\alpha = 2$ ) 效果良好, 然而, 对象 CEV 过程这样的其它发散过程, 为了使移动和波动与非负概率匹配,  $k$  要能从  $j$  推导出来, 对这种一般化后的三项式分过程, 三个概率分别由以下方程组给定:

$$p_1(j) + p_2(j) + p_3(j) = 1 \quad (14)$$

$$\begin{cases} p_1(j)S_{k-1} + p_2(j)S_k + p_3(j)S_{k+1} = M_j \\ p_1(j)S_{k+1}^2 + p_2(j)S_k^2 + p_3(j)S_{k-1}^2 = M_j^2 + V_j \end{cases}$$

其中  $M_j = S_j - rS_j\Delta t$

$$V_j = \sigma^2 S_j^2 \Delta t$$

由上述方程组解出概率, 可得

$$\begin{cases} p_1(j) = \frac{(S_k - M_j)(S_{k-1} - M_j) - V_j}{(S_k - S_{k-1})(S_{k-1} - S_{k+1})} \\ p_2(j) = \frac{(S_{k+1} - M_j)(S_{k-1} - M_j) - V_j}{(S_{k+1} - S_k)(S_{k-1} - S_k)} \\ p_3(j) = \frac{(S_{k+1} - M_j)(S_k - M_j) + V_j}{(S_{k-1} - S_{k-1})(S_k - S_{k-1})} \end{cases} \quad (15)$$

为了保证概率的非负性, 必须恰当地选择分过程  $k$  的中间运动, 为了将这些移动排好队, 应该将三项式树的中心分支尽可能安排靠近在连续过程式 (3) 基础上的区间期末时刻的期望资产价格, 换言之, 还要找到一个  $k$ , 以使中心运动后的基础资产价格与基础随机过程的期望资产价格相匹配, 这意味着在下列条件下可最后达到:

$$S_k = S_j + rS_j\Delta t$$

当  $S_j > 0$  时, 上述条件可简化成

$$y_k = y_j(1 + r\Delta t)^{-\alpha/2}$$

或等价地写成

$$k = \frac{y_j(1 + r\Delta t)^{1-\alpha/2} - y_0}{\lambda \nu \sqrt{\Delta t}} \quad (16)$$

当然,式(16)右边一般不会是整数,其简单解就是要选择一个整数使之尽可能地接近它:

$$k = \left\lfloor \frac{y_2(1+r\Delta t)^{1-\sigma/2} - y_1}{\lambda \nu \sqrt{\Delta t}} \right\rfloor \quad (17)$$

其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  给出了接近于实际数字的整数

一旦适当定义好了分过程和概率,则标准向后循环程序可能被用来评价看涨或看跌期权.表1中所列的数据表示了一般化后的三项式模型对CEV过程的表现.基于非分红股票的欧式看涨期权可用于这一目的.当前的股票价格为100,结算价格为95,100或105,期限为6个月,无风险利率为每年0.10,(股票价格的变动百分率)瞬态波动为每年0.25.使用三个 $\alpha$ 值来表现其对期权价格的影响.它们分别对应对数正态模型( $\alpha=2$ )、平方根模型( $\alpha=1$ )和绝对模型( $\alpha=0$ ).在对数正

态模型中采用了标准三项式模型.为了保证基于不同 $\alpha$ 值的期权价格存在广泛的可比性,将每一模型中的 $\sigma$ 值再作调整以使初始瞬态波动在不同模型中都相同.设 $\sigma_{ln}$ 为对数正态( $\alpha=2$ )瞬态波动,如前面所选择的为0.25.根据MacBeth和Merville的研究<sup>[12]</sup>,用作其它 $\alpha$ 值的模型的 $\sigma$ 值要调整为

$$\sigma = \sigma_{ln} S_j^{1-\alpha/2}$$

为了完成评价步骤,要给三项式模型两个常数( $\lambda$ 和 $\nu$ )安排好近似值.根据有关文献<sup>[7-9]</sup>,选择 $\lambda = \sqrt{1.5}$ .这一特殊的 $\lambda$ 值可以说提供了最快速的收敛方式,因为它使得三个三项式概率具有大致相同的值. $\nu$ 值没有对模型的准确性产生影响,为方便起见取 $\nu = \sigma$ .

表1 ECV过程下标准看涨期权的收敛过程

时步骤 (N)	$\alpha=0$			$\alpha=1$			$\alpha=2$		
	X=95	X=100	X=105	X=95	X=100	X=105	X=95	X=100	X=105
10	12.786 4	9.545 9	6.979 5	12.704 1	9.532 9	7.054 8	12.620 4	9.523 4	7.134 4
20	12.728 3	9.568 2	6.949 5	12.648 9	9.558 3	6.990 1	12.574 2	9.552 4	7.063 3
30	12.755 4	9.575 8	6.952 9	12.675 5	9.566 9	7.027 2	12.600 2	9.562 3	7.106 7
40	12.758 1	9.579 7	6.956 3	12.677 7	9.571 3	7.032 2	12.604 9	9.567 2	7.113 5
50	12.758 9	9.582 1	6.951 5	12.673 0	9.574 0	7.028 2	12.596 7	9.570 2	7.110 3
60	12.747 5	9.583 7	6.644 3	12.666 3	9.575 8	7.021 4	12.589 5	9.572 2	7.104 0
70	12.740 5	9.584 8	6.936 5	12.659 0	9.577 0	7.013 9	12.581 9	9.573 6	7.096 7
80	12.740 6	9.585 6	6.936 9	12.661 6	9.578 0	7.011 5	12.587 2	9.574 7	7.091 4
90	12.745 4	9.586 3	6.942 3	12.665 8	9.578 8	7.017 7	12.591 1	9.575 5	7.098 4
100	12.747 1	9.586 8	6.945 4	12.667 9	9.579 4	7.020 9	12.592 8	9.576 2	7.102 2
200	12.744 7	9.589 3	6.942 3	12.665 5	9.582 2	7.018 5	12.590 3	9.579 2	7.099 9
300	12.741 4	9.590 4	6.938 5	12.662 4	9.583 0	7.015 8	12.587 6	9.580 2	7.098 7
400	12.744 4	9.590 6	6.942 0	12.664 9	9.583 9	7.019 4	12.588 8	9.580 7	7.101 0
500	12.743 4	9.591 0	6.940 8	12.664 6	9.584 4	7.017 4	12.588 8	9.581 0	7.098 5
600	12.744 0	9.591 2	6.941 5	12.664 8	9.584 7	7.018 9	12.588 3	9.581 2	7.100 5
700	12.743 2	9.591 4	6.940 6	12.664 7	9.585 1	7.017 4	12.588 5	9.581 4	7.098 8
800	12.741 1	9.591 5	6.941 6	12.665 3	9.585 3	7.019 0	12.588 5	9.581 5	7.100 2
900	12.743 2	9.591 6	6.940 6	12.664 4	9.585 6	7.018 4	12.587 9	9.581 6	7.099 8
1000	12.743 9	9.591 8	6.941 4	12.665 6	9.585 8	7.018 7	12.588 6	9.581 6	7.099 4
分析值	12.742 6	9.591 5	6.940 3	12.662 9	9.584 5	7.017 0	12.588 0	9.582 2	7.099 6

由表1可知,三项式价格在给定结算价格和 $\alpha$ 值条件下迅速收敛于封闭形式的解.绝对模型和平方根模型的看涨价格的收敛过程可类比对数正态模型看涨价格的收敛过程.

### 3 障碍期权的定价

为了给象“下跌失效”看跌期权这样的障碍期权进行评价,不能直接采用前节中提出的三项

式模型, Boyle 和 Lau 指出, 直接采用树基模型当时间步骤数较大时会导致明显较大的障碍期权定价误差<sup>[12]</sup>。随着时步数的增加, 定价误差会表现出带有定期重复的较大定价误差的可见刀刃方式。问题的根源在于“障碍”一般位于树上结点的水平层面上。可以看到, 在所有位于相邻的节点后面之间的障碍水平上, 尽管障碍水平不同, 但由树上所计算出的期权价格都是相等的, 当障碍位于不同节点后面之间时, 期权值呈离散跳跃。随着时步数的变化, 相邻节点层面之间障碍的相对状态也发生变化, 而且这会影响到模型的准确性, 如果水平节点层面准确地位于障碍上, 则定价误差会达到最小。

为了进一步了解这一行为, 还要看一看在决策树模型中到底是如何处理障碍的。在二叉树或三叉树的范畴内, 只在树的节点上估价障碍。如果障碍没有准确地位于节点的层面上, 则期权的敲进或敲出就不会发生在障碍上, 而是发生在障碍上面(上升期权)或障碍下面(下降期权)的节点层面上。这种决策树就有效地将障碍理解成由节点层面表示的价格水平。

前节中提出的三项式模型必须加以修改才能用于准确地评价障碍期权。根据 Ritchken 的研究<sup>[13]</sup>, 使用“伸展系数” $\lambda$  来调整三项式“跳跃”的程度, 以使节点层面位于障碍上, 作为基本方法讨论单障碍看涨期权和双障碍看涨期权。

首先考虑一个具有较低障碍  $B_d (B_d < S_0)$  的下跌失效看涨期权, 从伸展系数的初始值开始:

$$\lambda = \sqrt{1.5}$$

为了得到障碍的水平节点层面, 对整数  $j$  必须有

$$S_j = B_d$$

这等价于

$$y_j = y_0 + j\lambda_j \nu \sqrt{\Delta t}$$

其中

$$y_j = \frac{\nu}{\sigma(1 - \alpha/2)} B_d^{1-\alpha/2}$$

解出  $j$ , 得到

$$j = \frac{y_d - y_0}{\lambda_j \nu \sqrt{\Delta t}} \quad (18)$$

可是, 式(18)右边一般不会是一个整数, 这样障碍通常就会位于两个水平节点层面之间。为了使节点层面准确地按照障碍向上排列, 就要改变伸展系数以使式(18)对某一整数  $j$  准确成立。设  $J_d$

为最接近式(18)右边值的整数, 即

$$J_d = \left\lfloor \frac{y_d - y_0}{\lambda_0 \nu \sqrt{\Delta t}} \right\rfloor$$

如下定义一个新的伸展系数  $\lambda_j$

$$\lambda_j = \frac{y_d - y_0}{J_d \nu \sqrt{\Delta t}} \quad (19)$$

使用这一新的伸展系数, 三项式网络可以在  $J_d$  连续向下移动后准确地达到较低的障碍上。这保证了水平节点层面准确地位于障碍上。三项式运动现在可以由这些栅极点来定义:

$$\bar{S}_j = \begin{cases} \left[ \frac{\sigma(1 - \alpha/2) \nu}{\nu} y_j \right]^{1-\alpha/2}, & \bar{y}_j > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\bar{y}_j = y_j + j\lambda_j \nu \sqrt{\Delta t}$

借助于这一新的伸展系数值, 可以用式(15)和式(17)再造出三项式网络的分过程和概率。修改后的三项式模型便可以用来评价下跌失效看涨期权。上扬失效期权可用类似的方法进行评价。

考虑带有较低障碍  $B_d$  和较高障碍  $B_u (B_u < S_0 < B_u)$  的双敲击看涨期权, 还是使用  $\lambda_0 = \sqrt{1.5}$  作为伸展系数的初始值。现在要求两个新的伸展系数保证两个障碍都准确地位于节点层面上。为了使较低的障碍能与一个节点层面匹配, 可以按照式(19)来选择伸展系数  $\lambda_d$ 。类似地, 为了使较高的障碍也能准确地位于节点层面上, 可以根据下式来选择伸展系数:

$$\lambda_u = \frac{y_u - y_0}{J_u \nu \sqrt{\Delta t}}$$

其中  $y_u = \frac{\nu}{\sigma(1 - \alpha/2)} B_u^{1-\alpha/2}$

$$J_u = \left\lfloor \frac{y_u - y_0}{\lambda_u \nu \sqrt{\Delta t}} \right\rfloor$$

三项式运动现在可以由这些栅极点来定义:

$$\bar{S}_j = \begin{cases} \left[ \frac{\sigma(1 - \alpha/2) \nu}{\nu} y_j \right]^{1-\alpha/2}, & \bar{y}_j > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\bar{y}_j = \begin{cases} y_j + j\lambda_u \nu \sqrt{\Delta t}, & j \geq 0 \\ y_j + j\lambda_d \nu \sqrt{\Delta t}, & \text{其它} \end{cases}$

借助于新的伸展系数, 利用式(15)和式(17)对三项式网络的分过程和概率进行再造, 然后修改后的三项式模型就可以用来评价双敲击看涨期权。

表 2 展示了看跌失效、看涨失效及双敲击看涨期权的价格, 它是采用针对 CEV 过程的修改后的三项式模型计算出来的。股票的当前价格为

100, 结算价格为 100, 期限为 6 个月, 无风险利率为每年 0.10, (股票价格变化百分率) 瞬态波动为每年 0.25, 上障碍定为 140, 下障碍定为 95. 如前所述, 三个  $\alpha$  值被用来表现其对期权价格的作用, 分别表示成对数正态模型 ( $\alpha = 2$ ), 平方根模型 ( $\alpha = 1$ ) 和绝对模型 ( $\alpha = 0$ ), 对对数正态模型,

Ritchken 的三项式模型可用来计算障碍期权价格, 所采用的时区数从 10 到 1000, 对所有所采用的  $\alpha$  值和全部三种类型的障碍期权, 看涨期权价格收敛得非常快, 对其它  $\alpha$  值期权价格也收敛 (没有列在表中).

表 2 敲击看涨期权的收敛

时步数 (N)	看跌失效看涨			看涨失效看涨			双敲击看涨		
	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
10	3.530 9	4.345 0	4.636 1	7.687 0	6.893 2	6.013 0	4.065 7	3.521 6	0.000 0
20	5.632 8	5.653 5	5.676 0	7.688 3	7.012 8	6.207 5	4.080 5	3.605 0	0.000 0
30	5.624 5	5.644 8	5.666 8	7.683 7	7.000 7	6.276 4	4.092 3	3.611 8	3.121 5
40	5.620 3	5.640 4	5.662 2	7.694 8	7.020 6	6.286 6	4.099 2	3.624 5	3.134 0
50	5.627 9	5.654 0	5.676 8	7.690 7	7.020 6	6.295 9	4.097 5	3.622 4	3.142 7
60	5.631 8	5.652 7	5.675 1	7.689 8	7.022 1	6.315 0	4.098 1	3.625 1	3.154 0
70	5.630 6	5.651 5	5.673 8	7.690 1	7.024 1	6.318 6	4.099 0	3.627 4	3.157 7
80	5.629 7	5.650 6	5.672 8	7.696 8	7.026 0	6.314 7	4.102 3	3.629 2	3.157 7
90	5.629 1	5.649 9	5.672 1	7.696 9	7.027 8	6.318 7	4.102 8	3.630 8	3.144 4
100	5.628 5	5.649 3	5.671 5	7.693 0	7.029 5	6.322 0	4.101 4	3.632 1	3.147 0
200	5.628 9	5.649 8	5.673 1	7.696 7	7.033 7	6.329 8	4.104 1	3.635 8	3.151 9
300	5.629 1	5.650 0	5.672 7	7.697 5	7.034 8	6.332 9	4.104 8	3.636 9	3.155 5
400	5.629 2	5.650 1	5.672 3	7.697 9	7.035 9	6.334 9	4.105 1	3.637 6	3.155 6
500	5.628 9	5.649 9	5.672 3	7.697 9	7.036 3	6.335 3	4.105 3	3.638 1	3.155 5
600	5.629 0	5.649 9	5.672 3	7.698 1	7.036 4	6.336 0	4.105 4	3.638 2	3.156 3
700	5.628 9	5.649 8	5.672 1	7.698 3	7.036 8	6.336 3	4.105 6	3.638 5	3.156 2
800	5.629 0	5.649 9	5.672 2	7.698 3	7.037 0	6.336 4	4.105 6	3.638 6	3.156 5
900	5.628 9	5.649 8	5.672 1	7.698 3	7.037 1	6.336 7	4.105 6	3.638 8	3.156 5
1000	5.628 8	5.649 8	5.672 1	7.698 3	7.037 2	6.336 9	4.105 7	3.638 9	3.156 7
封闭形式	n/a	n/a	5.671 9	n/a	n/a	6.336 3	n/a	n/a	3.157 8

#### 4 几点结论

为了进一步考察 CEV 过程弹性因子  $\alpha$  的影响, 针对不同的  $\alpha$  值、结算价格和障碍来计算障碍期权的价格, 表 3 列出了采用具有 1000 个时步数的修正后的三项式模型所计算出来的标准、看跌失效、看涨失效和双敲击看涨期权的价格, 由此可以指出结果的几个特点.

首先,  $\alpha$  值对期权价格的影响可能是正方向的, 也可能是负方向的, 但是对某一给定期权, 其影响看起来总是单调的. 换句话说, 随着  $\alpha$  值由 0 增加至 2, 期权值要不就单调增加, 要不就单调减少.

其次, 对标准看涨期权,  $\alpha$  的影响看起来相当小, 特别是对货币上期权更是如此. 对数正态分布中看涨期权的最大的百分比偏差仅为 2.23%, 这

正是我们所期望的, 由于  $\sigma$  值要调整到  $\alpha$  值以使股票价格的效率变化的瞬态波动对具有不同  $\alpha$  值的 CEV 过程是一致的, 这意味着  $\alpha$  值的偏差对标准看涨期权价格几乎没什么影响.

更要注意的是,  $\alpha$  值对障碍期权的价格特别是看涨失效和双敲击看涨期权有着强烈的影响. 对看跌失效看涨期权, 表 3 中所列的最大偏差为期权值的 3.58%, 与标准看涨期权相比有时大有时小. 可是, 对看涨失效和双敲击看涨期权, 最大偏差分别高达 32.84% 和 54.72%. 显然,  $\alpha$  的偏差可能引起这些敲击看涨期权的非常大的定价误差.

表 3 中还可以看到一个有趣的现象是  $\alpha$  的影响对具有顶部障碍的看涨期权比具有底部障碍的看涨期权更大. 有人可能认为资产价格的初始值 (100) 对底部障碍 (90 或 95) 较之顶部障碍 (120

或 140) 更近,并且在尾部比中部分布更加不同。可是,  $\alpha$  对看跌期权(表 3 中未列出)的影响恰好相反:对具有底部障碍看跌期权的影响比具有顶部障碍的更大。因此,障碍水平本身并不能解释价格差异。期权的报酬结构也十分重要,看涨期权可以从其分布的顶端尾部推导出其报酬;而看跌期权可以从其底端尾部推导出其报酬。所以,具有底部

障碍的看涨期权受较低的尾部和较高的顶部的影响。由于本例中两个尾部都被覆盖了,因而分布偏差的影响便减小了。另一方面,具有顶部障碍的看涨期权仅受到顶端尾部的影响,对于分布偏差的影响就达到最大。对障碍看跌期权也可作类似分析。

表 3 具有不同  $\alpha$  值的 CEV 过程的敲出期权价格

$S_0 = 100, r = 0.1, T = 0.5, \sigma = 0.25, N = 1000$								
$B_u$	$B_d$	$X$	看涨价格					最大偏差 %
			$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$	
标准看涨								
+∞	0	95	12.743 1	12.702 6	12.663 5	12.625 5	12.588 6	1.23
+∞	0	100	9.591 0	9.596 9	9.584 0	9.582 2	9.581 6	0.10
+∞	0	105	6.940 8	6.978 3	7.017 2	7.057 6	7.099 4	2.23
看跌失效看涨								
+∞	90	95	10.573 3	10.587 4	10.601 7	10.616 3	10.631 2	0.55
+∞	90	100	8.241 3	8.272 5	8.304 3	8.336 8	8.370 2	1.54
+∞	90	105	6.144 7	6.199 8	6.256 0	6.313 3	6.373 0	3.58
-∞	95	95	6.998 2	6.988 4	6.978 5	6.968 5	6.958 3	0.57
-∞	95	100	5.628 8	5.639 2	5.649 8	5.660 7	5.672 1	0.58
-∞	95	105	4.332 9	4.365 0	4.397 7	4.431 3	4.465 9	2.98
看涨失效看涨								
120	0	95	3.442 4	3.285 1	3.135 8	2.994 6	2.860 4	20.35
120	0	100	1.935 0	1.826 2	1.723 3	1.626 2	1.534 7	26.08
120	0	105	0.889 1	0.828 9	0.772 2	0.718 9	0.669 3	32.84
140	0	95	10.622 6	10.224 9	9.811 6	9.387 1	8.985 69	18.60
140	0	100	7.698 3	7.371 8	7.037 2	6.689 7	6.336 9	21.48
140	0	105	5.275 7	5.031 8	4.775 6	4.510 5	4.241 3	24.39
双敲击看涨								
120	90	95	2.077 1	1.974 5	1.877 8	1.786 8	1.701 3	22.09
120	90	100	1.236 0	1.162 6	1.093 6	1.028 9	0.968 2	27.66
120	90	105	0.593 3	0.551 0	0.511 5	0.474 6	0.440 1	34.72
110	95	95	5.292 2	5.014 1	4.727 4	4.436 2	4.144 3	27.70
140	95	100	4.105 7	3.896 0	3.638 9	3.398 0	3.156 7	30.06
140	95	105	2.992 8	2.813 0	2.627 1	2.437 9	2.248 8	33.08

## 参考文献:

- [1] Merton R C. The theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, (4):141-183
- [2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, (81): 637-659
- [3] Cheuk T H F, Vorst T C F. The constant elasticity of variance option pricing model[J]. Journal of Portfolio Management, 1996, (22):15-17
- [4] Cox J C. Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusions[M]. Unpubl. Note Stanford Univ.,

1975

- [5] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, (3): 145-166
- [6] Duffie D. *Dynamic asset pricing theory*[M]. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1996
- [7] Boyle P P. Option valuation using a three-jump process[J]. *International Options Journal*, 1986, (3): 7-12
- [8] Boyle P P. A lattice framework for option pricing with two state variables[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1988, (35): 1-12
- [9] Kaorad B, Ritchken P. Multinomial approximating models for options with K-state variables[J]. *Management Science*, 1991, (37): 1640-1652
- [10] Tian Y. A modified lattice approach to option pricing[J]. *Journal of Futures Markets*, 1993, (13): 563-577
- [11] A Re-Examination of Lattice Procedures for Interest Rate-Contingent Claims[J]. *Advances in Futures and Options Research*, 1994, (7): 87-111
- [12] MacBeth J D, Merville L J. Tests of the Black-Scholes and Cox call option valuation models[J]. *Journal of Finance*, 1980, (35): 285-301
- [13] Boyle P P, Lau S H. Bumping up against the barrier with the binomial method[J]. *Journal of Derivatives*, 1994, (2): 6-14

## Pricing barrier options under CEV process

XIE Chi

College of Business Management of Hunan University, Changsha 410082, China

**Abstract:** This paper examines the pricing of barrier options when the underlying asset follows the constant elasticity of variance (CEV) process. We construct a trinomial method to approximate the CEV process and use it to price barrier options, and demonstrate the accuracy of our approach for different parameter values of the CEV process. We find that the prices of barrier options for the CEV process deviate significantly from those for lognormal process. For standard options, the corresponding differences between the CEV and Black-Scholes models are relatively small. The result model specification for options depends an extrema than for standard option.

**Key words:** the constant elasticity of variance (CEV) process; barrier options; pricing options; trinomial method; standard options