研究简报

基于序数信息的博弈理论①

冯俊文
(南京理工大学经济管理学院, 南京 210094)

摘要: 在许多社会或政治科学的问题中, 个人的主观偏好信息往往是通过定性分析得到的, 难以表示成效用形式, 但却可以用序数形式来表示. 本文基于决策者对策略的偏好序数信息而不是支付函数或效用水平, 讨论了一种新的博弈理论或模型, 给出了若干序均衡的概念, 并进行了例示分析. 这种基于序数信息的博弈理论可以看作是现有基于支付函数博弈理论的推广和补充

关键词: 偏好序; 博弈理论; 纳什均衡; 帕累托均衡; 斯坦克博格均衡
中图分类号: F224. 0　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2002)04-0083-05

0 引 言

博弈理论(game theory)是一门研究多个决策主体的行为发生相互作用时的决策活动及其均衡问题的科学. 尽管博弈问题由来已久, 但对博弈理论的系统研究起源于 Von Neumann 和 Morgenstern[1]. 1950 年 Nash"纳什均衡"(Nash Equilibrium)概念的提出为博弈理论的研究和实践奠定了发展基础[2]. 之后, 多位长期致力于博弈理论和应用研究与实践的学者, 如 Harsanyi 和 Selten, 将这一概念进行了不完全信息分析和动态分析, 提出了"精练纳什均衡"(Perfect Nash Equilibrium)、"贝叶斯纳什均衡"(Bayesian Nash Equilibrium)和"精练贝叶斯纳什均衡"(Perfect Bayesian Nash Equilibrium)等概念, 形成了现代博弈理论和应用的基本框架[3]. 蕴涵在这些均衡概念中, 最简单和常见的均衡概念有三种: 纳什均衡(Nash Equilibrium), 帕累托均衡(Pareto Equilibrium)和斯坦克博格均衡(Stackelberg Equilibrium)[4]. 下面将举例说明这三个均衡概念. 近年来, 我国学者对博弈论也有广泛的研究和应用[5-9].

现代博弈理论广泛采用支付函数(payoff function)或效用水平(utility level)来研究博弈行为[10-12]. 事实上, 前面所提到的各种均衡概念都是建立在这种决策信息的效用表示之上的, 可以称之为基于效用信息的博弈理论. 比如, 考虑如表 1 所示的矩阵博弈问题:

例 1　基于效用信息的博弈

表 1　例 1 的博弈模型

参与人A	参与人B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	13. 2, 5. 5	7. 0, 4. 3	5. 6, 3. 1
A_2	10. 3, 9. 9	8. 2, 3. 7	14. 5, 8. 8
A_3	6. 2, 8. 7	6. 6, 8. 5	7. 2, 2. 7

其中参与人A 的决策空间为 $S_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$, 参与人B 的决策空间为 $S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$. 对于参与人A 和B 的每一对策略 (A_i, B_j), 分别用 $U_1(A_i, B_j)$ 和 $U_2(A_i, B_j)$ 表示参与人A 和参与人B 的支付函数或效用水平. 考虑完全信息静态博弈问题, 参与人A 的目标是选择策略 A_i 使得 U_1 最大, 参与人B 的目标是使得 U_2 最大. 每个参与人的最终

① 收稿日期: 2001-04-10; 修订日期: 2002-03-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79870030).
作者简介: 冯俊文(1960-), 男, 山西太原人, 博士, 教授, 博士生导师

结果取决于双方的选择 每个参与人在选择策略时都要考虑到另外一个参与人的决策

这种基于效用信息的博弈理论在应用中碰到的一个重要问题就是如何确定参与各方的效用水平U. 如果只要有一方的效用水平确定不了, 这一博弈问题就难以形成 尽管决策理论中有详尽的确定决策者效用函数的方法, 但它们在实际中仍然难以把握 而在实际问题中, 参与人常常可以容易确定的是给定其他参与人的策略的条件下将自己的可用策略进行排序, 即这时可用的判断策略的信息是用偏好序数形式表示的 这时会形成一个用偏好序数表示的博弈模型, 可称之为基于序数信息的博弈理论

例 2　基于序数信息的博弈: 假定博弈有两个参与人, 参与人A 的决策空间为$S_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$, 参与人B 的决策空间为$S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$. 参与人A 在给定参与人B 的各种策略下的偏好序数信息如下:

给定参与人B 的策略B_1:　$A_1 \geq A_2 \geq A_3$

给定参与人B 的策略B_2:　$A_2 \geq A_3 \geq A_1$

给定参与人B 的策略B_3:　$A_2 \geq A_1 \geq A_3$

参与人B 在给定参与人A 的各种策略下的偏好序数信息如下:

给定参与人A 的策略A_1:　$B_3 \geq B_2 \geq B_1$

给定参与人A 的策略A_2:　$B_1 \geq B_2 \geq B_3$

给定参与人A 的策略A_3:　$B_3 \geq B_1 \geq B_2$

其中“$\geq$ ”表示策略的偏好序, “给定参与人A 的策略A_1: $B_3 \geq B_2 \geq B_1$ ”意味着“给定参与人A 的策略A_1, 参与人B 选择策略的偏好顺序为B_3, B_2, B_1, 即参与人B 首先会选择B_3, 其次会选择B_2, 再次会选择B_1.” 当然, 有时决策者也会遇到在某些策略之间无差异的偏好问题, 这时用符号“$\sim$ ”表示, 如$B_3 \sim B_2$ 意味着此时参与人B 对B_3和B_2无差异, 如$B_3 \sim B_2 \geq B_1$则意味着B_3和B_2无差异, 但B_3和B_2都要比B_1更受参与人B 的偏好, 依次类推 为了把上述基于偏好序数信息的博弈问题用一个模型来表示, 用 1 表示最偏好, 2 表示次之, 依次类推, 假如某个参与人有m 个策略, 那么就用m 来表示最不偏好. 如果两个策略偏好程度相同, 就用相同的偏好序来表示 这样就可以用一个模型来表示基于序数信息的博弈问题 例 2 的博弈问题可以用模型表示见表 2

表 2　例 2 的博弈模型

参与人A	参与人B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1, 3	2, 2	2, 1
A_2	2, 1	3, 2	1, 3
A_3	3, 3	1, 1	3, 2

这里要说明的是, 由基于效用信息的博弈问题可以经过适当转换确定出唯一的基于序数信息的博弈问题, 因为可以把效用看作是序数的一种特殊情况 知道了参与人的效用水平, 自然也就可以确定相应的偏好次序 但, 反过来不成立, 即由序数信息并不能唯一确定效用信息 在这个意义下, 基于序数信息的博弈理论是基于效用信息博弈理论的推广, 而后者可以看作前者的特例

另外, 例 2 给出的偏好表示只是序数表达的一种方式, 还可以用AHP 法以权重的方式来表示序数, 将另文讨论

此外, 这里的 1, 2, 3 等只是用来表示策略的偏好序, 也可以用诸如 a, b, c 之类的符号来表示这种偏好序

本文旨在就两人有限博弈情况, 研究基于序数信息博弈模型的若干均衡概念, 并举例说明

1　基于效用信息的博弈理论: 均衡概念及举例

考虑例 1 所示的博弈问题, 纳什均衡策略有一个, 即(A_1, B_1), 帕累托均衡有 2 个, 即(A_2, B_1)、(A_2, B_3), A 为领先者、B 为追随者的斯坦克博格均衡为(A_1, B_1), B 为领先者、A 为追随者的斯坦克博格均衡为(A_2, B_3).

一般地, 考虑两人博弈问题, 假定参与人A 的策略空间为$S_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$, 参与人B 的策略空间为$S_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$, 参与人A 的支付函数为$U_1(A_i, B_j)$, 参与人B 的支付函数为$U_2(A_i, B_j)$. 将这一博弈问题记为$\{S_1, S_2; U_1, U_2\}$. 有如下定义[5, 6]:

定义 1(纳什均衡) (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; U_1, U_2\}$ 的(纯) 纳什均衡, 如果成立:

1) 对任意的A_i, $U_1(A_{i0}, B_{j0}) \geq U_1(A_i, B_{j0})$

2) 对任意的B_j, $U_2(A_{i0}, B_{j0}) \geq U_2(A_{i0}, B_j)$

定义 2(帕累托均衡) (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; U_1, U_2\}$ 的帕累托均衡, 如果不存在(A_i, B_j) 使得$U_1(A_i, B_j) \geq U_1(A_{i0}, B_{j0})$ 和$U_2(A_i, B_j) \geq U_2(A_{i0}, B_{j0})$, 且其中至少有一个成立严格不等式

定义 3(斯坦克博格均衡) (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; U_1, U_2\}$ 的以A 为领先者、B 为追随者的斯坦克博格均衡, 如果成立:

1) 对任意的A_i, 令

$$U_2(A_i, B_{ji}) = \max_j U_2(A_i, B_j)$$

2) $$U_1(A_{i0}, B_{j0}) = \max_i U_1(A_i, B_{ji})$$

同样, (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; U_1, U_2\}$ 的以B 为领先者、A 为追随者的斯坦克博格均衡, 如果成立:

3) 对任意的B_j, 令

$$U_1(A_{ij}, B_j) = \max_i U_1(A_i, B_j)$$

4) $$U_2(A_{i0}, B_{j0}) = \max_j U_2(A_{ij}, B_j)$$

下面将这些均衡概念扩展到基于序数信息的博弈模型中

2 基于效用信息的博弈模型到基于序数信息的博弈模型的转换

给定基于效用信息的博弈模型, 可以很容易地将其转化为一个基于序数信息的博弈模型 考虑例 1, 经过转化的博弈模型如表 3

例 3 支付函数到偏好序的转换

表 3 例 1 的博弈模型转换(例 3)

参与人A	参与人B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	3, 1	2, 2	3, 3
A_2	2, 1	1, 3	1, 2
A_3	1, 2	3, 1	2, 3

值得注意的是, 这种转换还可以用来处理效用水平不确定但可以表示为一个效用区间的博弈问题, 以及模糊效用或其他效用形式表示的博弈问题 因此, 基于序数信息的博弈模型具有较为广泛的应用前景

3 基于序数信息的博弈模型: 均衡概念及举例

仍考虑两人博弈问题, 假定参与人A 的策略空间为$S_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$, 参与人B 的策略空间为$S_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$, 对于参与人A 和B 的每一对策略$(A_i, B_j)$, 用$R_1(A_i, B_j)$ 表示参与人A 在参与人B 采取策略B_j 时采取策略A_i 的偏好序, 用$R_2(A_i, B_j)$ 表示参与人B 在参与人A 采取策略A_i 时采取策略B_j 的偏好序, 并将这一基于偏好序的博弈问题记为$\{S_1, S_2; R_1, R_2\}$.

考虑参与人A, 给定参与人B 的一个策略B_j, 可以用$\sim$ 和$\geq$ 来衡量参与人A 的偏好序的级别, 即如果A_i 比A_k 的偏好序高, 就记为$R_1(A_i, B_j) \geq R_1(A_k, B_j)$, 如果$A_i$和$A_k$的偏好序一样, 就记为$R_1(A_i, B_j) \sim R_1(A_k, B_j)$, 在所有偏好序中偏好序最高的策略, 记为$\mathrm{Maxorder}_i R_1(A_i, B_j)$, 即对于任意的$R_1(A_i, B_j)$, 必有$\mathrm{Maxorder}_i R_1(A_i, B_j) \sim R_1(A_i, B_j)$ 或$\mathrm{Maxorder}_i R_1(A_i, B_j) \geq R_1(A_i, B_j)$. 同理可以讨论参与人B 的偏好序级别问题

同样地, 给定参与人A 和B 的两对策略(A_i, B_j) 和(A_k, B_h), 如果$R_1(A_i, B_j) \sim R_1(A_k, B_h)$ 和$R_2(A_i, B_j) \sim R_2(A_k, B_h)$, 记为$(R_1(A_i, B_j), R_2(A_i, B_j)) \sim (R_1(A_k, B_h), R_2(A_k, B_h))$.

如果$R_1(A_i, B_j) \sim$ 或$\geq R_1(A_k, B_h)$ 和$R_2(A_i, B_j) \sim$ 或$\geq R_2(A_k, B_h)$, 且其中至少有一个成立$\geq$ 时, 记为$(R_1(A_i, B_j), R_2(A_i, B_j)) \geq (R_1(A_k, B_h), R_2(A_k, B_h))$

下面给出基于偏好序信息的若干均衡概念

定义 4(序纳什均衡) (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; R_1, R_2\}$ 的偏好序为(n_1, n_2) 的序纳什均衡, 如果$R_1(A_{i0}, B_{j0}) = n_1$, $R_2(A_{i0}, B_{j0}) = n_2$ 其中n_1 和n_2 为偏好序级别数, $n_1 \leq n$, $n_2 \leq m$.

定义 5(最优序纳什均衡): (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; R_1, R_2\}$ 的最优序纳什均衡, 如果

1) 对任意的A_i

$$R_1(A_{i0}, B_{j0}) \sim \text{或} \geq R_1(A_i, B_{j0})$$

2) 对任意的B_j

$$R_2(A_{i0}, B_{j0}) \sim \text{或} \geq R_2(A_{i0}, B_j)$$

定义 6(序帕累托均衡) (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; R_1, R_2\}$ 的序帕累托均衡, 如果不存在 (A_i, B_j) 使得 $(R_1(A_i, B_j), R_2(A_i, B_j)) \geq (R_1(A_{i0}, B_{j0}), R_2(A_{i0}, B_{j0}))$.

定义 7(序斯坦克博格均衡) (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; R_1, R_2\}$ 的以A 为领先者、B 为追随者的序斯坦克博格均衡, 如果成立:

1) 对任意的A_i, 令 $R_2(A_i, B_{ji}) = \underset{j}{\mathrm{Maxorder}}\, R_2(A_i, B_j)$

2) $R_1(A_{i0}, B_{j0}) = \underset{i}{\mathrm{Maxorder}}\, R_1(A_i, B_{ji})$

同样地, (A_{i0}, B_{j0}) 称为博弈问题$\{S_1, S_2; R_1, R_2\}$ 的以B 为领先者、A 为追随者的序斯坦克博格均衡, 如果成立:

3) 对任意的B_j, 令 $R_1(A_{ij}, B_j) = \underset{i}{\mathrm{Maxorder}}\, R_1(A_i, B_j)$

4) $R_2(A_{i0}, B_{j0}) = \underset{j}{\mathrm{Maxorder}}\, R_2(A_{ij}, B_j)$

容易证明下列结论: (A_{i0}, B_{j0}) 为博弈问题$\{S_1, S_2; R_1, R_2\}$ 的最优序纳什均衡, 当且仅当(A_{i0}, B_{j0}) 为偏好序为(1, 1) 的序纳什均衡

考虑如表 2 所示的博弈问题, 偏好序为(2, 1) 的序纳什均衡有(A_2, B_1) 和(A_1, B_3), 偏好序为(3, 3) 的序纳什均衡有(A_3, B_1), 不存在偏好序为(1, 2) 的序纳什均衡 最优序纳什均衡即偏好序为(1, 1) 的序纳什均衡为(A_3, B_2). 在表 3 所示的博弈问题中, 不存在最优序纳什均衡

在表2 所示的博弈中, (A_3, B_2) 是唯一的序帕累托均衡, 而在表 3 所示的博弈问题中, 有 5 个序帕累托均衡, 即(A_1, B_1), (A_2, B_1), (A_2, B_3), (A_3, B_1) 和(A_3, B_2).

在表 2 所示的博弈中, 以A 为领先者、B 为追随者的序斯坦克博格均衡为(A_2, B_1), 以B 为领先者、A 为追随者的序斯坦克博格均衡为有两个, 即(A_3, B_1) 和(A_2, B_3).

对于策略有限的基于序数信息的博弈问题, 尽管有些序纳什均衡和最优序纳什均衡可能不存在, 但可以证明, 序帕累托均衡和序斯坦克博格均衡总是存在的 同样, 也可以证明, 如果最优序纳什均衡存在的话, 那么序帕累托均衡和序斯坦克博格均衡都相同, 为最优序纳什均衡 这时三个均衡都相同

值得注意的是, 最优纳什均衡的概念在基于效用信息的博弈问题研究中是没有定义的

4 结束语

本文讨论了一种基于决策者关于策略的序数偏好而不是效用水平的博弈问题, 称之为基于序数信息的博弈问题 给出了这种博弈问题的若干序均衡概念 这些序均衡概念是基于效用信息博弈问题纳什均衡概念类的推广. 新的博弈模型对于处理难以用效用形式表示支付函数的博弈问题将是非常有用的, 它也是现有博弈模型的必要补充和完善 可以相信这种新的理论或模型借助于现代数学序分析理论和综合评价方法(如AHP) 会有较大的发展

本文是就两人博弈问题展开讨论的, 相关的序均衡概念可以很容易地推广到多人的情形 有关序均衡概念还可以进行动态分析和不完全信息分析 另外, 基于序数信息的博弈均衡模型仍然有许多需要深入研究的理论问题, 如各种序均衡解的存在性、稳定性、求解算法等 这些理论及其应用问题都是今后值得研究的一些课题

参 考 文 献:

[1] Von Neumann, Morgenstern O. The game theory and economic behavior[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1947

[2] Nash J. Noncooperative games[J]. Annals of Mathematics, 1951, 54(2): 286- 295

[3] Harsanyi J C, Selten R. A general theory of equilibrium selection in games[M]. Cambridge: MIT Press, 1988

[4] Von Stackelberg H. The game of the market economy[M]. Oxford: Oxford University Press, 1952

[5] 张维迎 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海三联书店, 上海人民出版社出版, 1997

[6] 谢识予. 经济博弈论[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1998

[7] 周 晶等 基于动态博弈的企业集团政策动态一致性分析[J]. 管理科学学报, 2000, 3(2): 49- 53

[8] 安瑛晖等. 期权博弈理论的方法模型分析与发展[J]. 管理科学学报, 2001, 4(1): 38- 42

[9] 姚海鑫著. 经济政策的博弈论分析[M]. 北京: 经济管理出版社, 2001

[10] Cruz J B, Simaan M A. Ordinal games and generalized Nash and Stackelberg solutions[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2000, 107(2): 205- 222

[11] Simaan M, Cruz J B. Additional aspects of the stackelberg solution in nonzero sum games[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1973, 11(2): 613- 626

[12] Simaan M, Cruz J B. On the Stackelberg solution in nonzero sum games[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1973, 11(2): 533- 555

Game theory with ordinal data inputs

FENG Jun-wen

School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, 210094 Nanjing, China

Abstract: In many social or political science problems, the personal subjective preference information can be the result from qualitative analysis, which is difficult to be expressed in the utility form, but can be expressed in ordinal form. Based upon ordinal preference information the decision-makers expressed, instead of the payoff function or utility level, this paper developed a rank-ordering based game theory or model, proposed some concepts of rank-ordering equilibrium, and gave some numerical demonstrations. This new game theory could be considered as the necessary and valuable generalization and supplement to the traditional utility or payoff based game theory.

Key words: preference rank order; game theory; Nash equilibrium; Pareto equilibrium; Stackelberg equilibrium