机构投资者的最优变现策略①

仲黎明, 刘海龙, 吴冲锋
(上海交通大学金融工程研究中心, 上海 200052)

摘要: 对于持有某种资产一定规模的机构投资者而言, 其对这种证券的交易行为会导致证券价格的单方向变动, 从而为投资者带来额外的交易成本. 本文以机构投资者的变现行为为例, 研究了在既定风险承受能力下, 可以使得期望利润最大(期望损失最小)的最优变现策略, 并进行了有关参数的敏感性分析. 结果表明, 投资者在构造资产组合时, 应同时考虑资产的收益率、波动性和流动性, 并且应为其变现行为选择合适的变现策略.

关键词: 机构投资者; 最优变现策略; 永久冲击; 瞬时冲击
中图分类号: F224 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2002)05-0018-05

0 引 言

在交易活跃的证券市场中, 普通投资者可以在当前证券价格上, 对其资产组合中某种证券的头寸进行调整(购买或出售标的证券), 而不会对该证券价格产生实质性影响. 而对机构投资者而言, 所持有标的资产的欲变现头寸具有一定规模, 或者欲购买的标的资产数量达到一定规模, 其对该种证券的交易行为会导致证券价格的单方向变动, 从而为投资者带来额外的交易成本. 这方面的交易成本是与交易策略的执行紧密联系在一起的, 通常也被称为"执行成本"(execution cost).

执行成本大小, 直接影响机构投资者从资产组合中获得的收益. 美国市场的 Value-Line 基金在 1965～1986 年间的年均账面收益超过市场平均收益 20 多个百分点, 而最终实际收益仅超过市场收益的 2.5 个百分点, 这其中的巨大差额就来自执行成本[1]. 其他许多对执行成本的深入研究都表明, 控制执行成本对投资者具有重要意义[2-8].

Bersimas 和 Lo 将最优交易策略定义为可以使得执行成本最小化的交易策略, 并利用随机动态规划方法, 得出最优策略闭合形式的解[9]. 但是, 他们忽略了机构投资者在交易过程中因为对资产的持有所带来的风险. 本文采用在既定波动性风险约束下, 使得执行成本最小的交易策略作为最优交易策略的定义[10], 并利用最优控制理论, 求得投资者最优交易策略的解析解.

1 最优交易策略模型的有关设定和假设

以一名资产组合中持有某种证券大量头寸的机构投资者为例, 假定他要在 T 时期内, 对组合中的该种证券进行完全变现, 则在 $(0, T)$ 时期, 证券价格由于该特定交易者的出售行为, 将受到向下价格冲击的压力, 证券价格原有的变动趋势因此而改变.

对该投资者而言, 其变现的目的为在变现期结束时, 对于资产组合中既定数量的标的资产获得最大的现金量. 一方面, 投资者的目标为使其变现行为对证券价格影响最小, 从而可以获得期末的最大资产总值(对于完全变现情况, 该值为全部现金量); 另一方面, 在变现进行过程中, 标的资产

① 收稿日期: 2001-08-22; 修订日期: 2002-07-05.
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(70025303); 国家自然科学基金资助项目(70173031).
作者简介: 仲黎明(1976-), 男, 山东泰安人, 博士生.

具有内在的波动率, 投资者在此期间拥有的该资产头寸越大, 则承受的波动性风险越高.

对于风险厌恶的机构投资者而言, 在进行资产变现时, 同时应当考虑的问题是, 在既定波动性风险的约束条件下, 使得由于其变现行为带来的额外的交易成本最小.

该机构投资者对标的资产初始头寸持有量为 X, 欲在时刻 0 到时刻 T 对该项资产进行变现, 将对该项资产的头寸降为 0.

定义该投资者交易策略 $x(t)$ 为 t 时刻持有资产的头寸, 则 $x(0) = X$, $x(T) = 0$(假定为完全变现); 定义交易速率为 $v(t) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$; 假定资产的价格 $P(t)$ 服从几何布朗运动[11], 初始价格 $P(0) = P_0$. 当不考虑该投资者的变现行为对价格的冲击时, $\mathrm{d}P(t) = \bar{\mu}P(t)\mathrm{d}t + \bar{\sigma}P(t)\mathrm{d}B_t$. 其中: 漂移项系数 $\bar{\mu}$ 的经济意义为标的资产相对于无风险收益率的超额收益率; 扩散项 $\bar{\sigma}$ 的经济意义为欲变现标的资产内在的波动率.

由于本文只考虑短期内的变现, 变现前后价格变动差额相对较小, 从而可以将价格服从的几何布朗运动近似为服从算术布朗运动, 即令 $\mu = \bar{\mu}P(t) \approx \bar{\mu}P_0$, $\sigma = \bar{\sigma}P(t) \approx \bar{\sigma}P_0$, 在变现期内, μ、σ 为不随时间变化的常数.

当特定的投资者对该资产变现, 随着变现的进行, 资产价格将会承受一持续的负向冲击[2, 12], 这种对资产价格的冲击将一直持续到变现期末, 本文将其称为永久冲击.

假定这种冲击对价格的影响定义为变现交易速率的函数 $g(v)$, 函数形式为线性形式 $g(v) = \gamma v(t)$. 则资产价格 $P(t)$ 服从的布朗运动为

$$\mathrm{d}P(t) = (\mu - \gamma v)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t$$

另一方面, 考虑任一$(t, , t + \Delta t)$ 时期内, 投资者按照期初确定的交易策略, 应当交易 $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, 而在这一时期内, 该项变现行为也会对资产价格产生一瞬时的负向冲击[12], 该类冲击将只持续 Δt 时期, 使得价格由 $P(t)$ 变为 $P(t + \Delta t)$, 假设该类瞬时冲击对价格的影响为交易策略的线性函数 $f(v)$, $f(v) = \beta v$, 其中 β 为常数, 则

$$P(t + \Delta t) = P(t) - f(v)$$

2　最优变现模型的建立

首先, t 时刻资产价格为

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 + \int_0^t \mathrm{d}P(t) = \\ &P_0 + \int_0^t (\mu - \gamma v)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t = \\ &P_0 + \mu t + \sigma B_t - \gamma(X - x) \end{aligned} \tag{1}$$

式(1) 表明, 在 t 时刻资产的价格与该投资者持有资产的头寸变化, 即已变现资产数量成反比, 持有的资产头寸越大, 资产价格在$(0, t)$ 时期, 承受由于该投资者变现产生的负向冲击越小, 从而价格变动也就越小.

投资者在该期间内对资产进行变现获得的现金数量 C_t 为

$$\Delta C_t = (-\Delta x) \cdot \frac{P(t + \Delta t) + P(t)}{2} \tag{2}$$

令 $\Delta t \to 0$, 式(2) 写成微分形式:

$$\mathrm{d}C_t = (-\mathrm{d}x) \cdot \left[P(t) - \frac{f(v)}{2}\right] \tag{3}$$

由式(3) 可得, 在变现期末 T 时刻, 变现获得的所有现金总和为

$$\begin{aligned} C_{\text{total}} &= \int_0^T \mathrm{d}C_t = \int_x^0 [P(t) - \frac{f(v)}{2}](-\mathrm{d}x) = \\ &\int_0^x [P_0 + \mu t + \sigma B_t - \gamma(X - x) - \frac{\alpha + \beta v}{2}]\mathrm{d}x = \\ &XP_0 + \mu\int_0^X t\mathrm{d}x + \sigma\int_0^X B_t\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{2}X^2 - \frac{\beta}{2}\int_0^X v\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4}$$

对式(4) 利用 $\mathrm{d}x = -v\mathrm{d}t$ 和分部积分公式, 得

$$\begin{aligned} C_{\text{totol}} = XP_0 + \mu\int_0^T x\mathrm{d}t + \sigma\int_0^T x\mathrm{d}B_t - \\ \gamma\int_0^T xv\mathrm{d}t - \frac{\beta}{2}\int_0^T v^2\mathrm{d}t \end{aligned}$$

由于 XP_0 为初始资产价值, C_{total} 为期末变现后获得的现金资产总值, 可定义交易成本 $C_{\text{total}} = XP_0 - C_{\text{total}}$ 为资产价值的变化.

由于对于不同的交易策略 x, 期末所得的现金是不同的, 从而 C_{total} 可以当作是依赖于交易策略的随机变量, 其均值和方差可以分别作为交易

策略 x 的期望利润(损失) 和变现期内对资产头寸的持有所承受风险的度量

故对于任意的交易策略函数 $x(t)$, 记 $E(x)$ 为随机变量 C_{total} 的期望值, $V(x)$ 为 C_{total} 的方差, 则

$$E x = \frac{\gamma}{2}X^2 + \int_0^T (-\mu x + \frac{\beta}{2}v^2)\mathrm{d}t \qquad (5)$$

$$V x = \sigma^2 \int_0^T x^2 \mathrm{d}t \qquad (6)$$

由于交易策略 x 为时间 t 的函数, 显然式(5)、(6) 都是依赖于函数 $x(t)$ 的泛函

定义最优变现策略为如下交易策略, 满足投资者在交易过程中, 或者在固定的期望利润下承受的风险最小的交易策略, 或者在固定的风险承受下期望利润最大的交易策略

这样, 求解最优策略 $x^*(t)$ 可以转换成具有约束条件的泛函极值问题

根据对偶原理, 上述两种情况下求得的极值曲线是相同的 下面只考虑约束条件为 $V x = V^*$, 对泛函 $E x$ 求解极值的情况

3 模型的求解

最优策略 $x^*(t)$ 为满足以下条件的函数

在积分约束条件 $\sigma^2 \int_0^T x^2 \mathrm{d}t = V^*$ 和边界条件 $x(0) = X, x(T) = 0$ 下, 使得泛函 $E(x) = \frac{\gamma}{2}X^2 + \int_0^T (-\mu x + \frac{\beta}{2}v^2)\mathrm{d}t$ 取得极小值

下面将利用拉格朗日法进行求解

令 $L(x) = E(x) + \lambda V(x)$, 上述问题转化成对 $L(x)$ 求极小值

可以看出, 拉格朗日乘子 λ 代表了投资者对风险的厌恶程度: $\lambda > 0$ 时, 投资者是风险厌恶的, λ 越大, 投资者对风险厌恶程度越高; $\lambda = 0$ 时, 投资者是风险中性的; $\lambda < 0$ 时, 投资者是风险偏好的

根据现实中的合理假设, 下文将只考虑投资者是风险厌恶或风险中性, 即 $\lambda \geq 0$ 的情况

为使 $L(x)$ 取得极值, 变量函数 $x^*(t)$ 应满足如下欧拉方程:

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

其中:

$$H(x) = \frac{\gamma}{2}\frac{X^2}{T} - \mu x + \frac{\beta}{2}v^2 + \lambda\left(\sigma^2 t x^2 - \frac{V^*}{T}\right) \qquad (7)$$

即 $-\mu + 2\lambda\sigma^2 x - \beta\ddot{x} = 0$

式 (7) 为二阶线性微分方程, 利用边界条件 $x(0) = X, x(T) = 0$, 其通解的形式有两种

1) $\lambda > 0$ 时

$$x^*(t) = \frac{\sinh(\rho T) - \sinh(\rho(T-t)) - \sinh(\rho t)}{\sinh(\rho T)}\frac{\mu}{2\lambda\sigma^2} + \frac{\sinh(\rho(T-t))}{\sinh(\rho T)}X \qquad (8)$$

式中: $\rho^2 = \frac{2\lambda\sigma^2}{\beta}$, $\sinh(\rho T)$、$\sinh(\rho t)$ 及 $\sinh(\rho(T-t))$ 为对应的双曲正弦函数

2) $\lambda = 0$ 时, 其通解形式为

$$x^*(t) = -\frac{\mu}{2\beta}t^2 + \left(\frac{\mu}{2\beta}T - \frac{X}{T}\right)t + X \qquad (9)$$

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 其通解恰好是当 $\lambda > 0$ 时, 通解在 $\lambda \to 0$ 时的极限, 故可采用式(8) 作为 $\lambda \geq 0$ 时统一的最优变现策略

4 最优策略中参数的敏感性分析

首先, 确定标的资产的有关参数

假定该项资产的超额收益率为 15% (年率), 年波动率为 50%, 在时刻 0, 初始价格为 20 元, 一年中的交易日数为 250 天, 该资产平均日交易量为 5 百万股; 投资者对该项资产初始头寸为 1 百万股, 欲在一周内(5 个交易日) 对资产进行变现 从而得到参数值为

$$\mu = P_0\bar{\mu} = 20 \times 0.15/250 = 0.012$$

$$\sigma = P_0\bar{\sigma} = 20 \times 0.5/\sqrt{250} = 0.63, T = 5$$

假定当文中所考察的投资者对该项资产的当日交易量达到平均日交易量的 1% 时, 将对资产价格产生瞬时冲击, 使价格变动一个单位 0.01 元; 当达到 5% 时, 产生永久冲击, 使价格变动一个单位 0.01 元 从而得到参数值为

$$\beta = 0.01/(5 \times 10^6 \times 1\%) = 2 \times 10^{-7}$$

$$\gamma = 0.01/(5 \times 10^6 \times 5\%) = 4 \times 10^{-8}$$

对于 λ 的取值, 图 1 给出 $\lambda = 10^{-5}$, $\lambda = 10^{-6}$, $\lambda = 0$ 时, 不同最优策略的极值曲线

由式(9), 明显可见: 对于风险中性的投资者而言, 其采取的最优变现策略是时间的二次曲线, 出售标的资产的速度是递减的, 在变现期内, 将始终持有相对较大的资产头寸; 对于具有较高风险厌恶的投资者而言($\lambda = 10^{-5}$), 其最优变现策略是在变现期内始终持有较低的资产头寸, 以提高交易成本为代价, 降低承受的资产波动性风险

事实上, 上述模型中资产超额收益率(对应参数 μ), 内在波动性(对应参数 σ), 投资者变现行为对证券价格的瞬时影响(对应参数 β) 的变动, 同样会影响最优变现策略 如图 2～ 图 4 所示

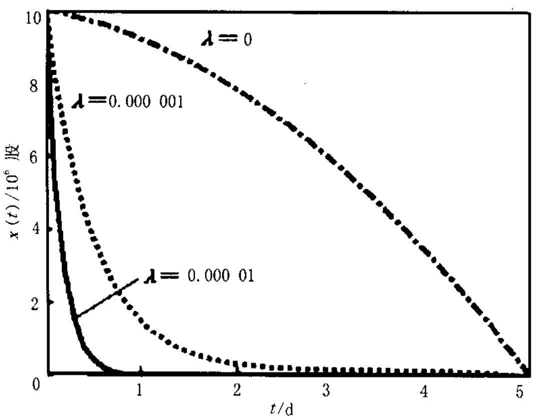

图 1　不同风险厌恶投资者的最优变现策略
($\lambda = 0, 10^{-6}, 10^{-5}$)

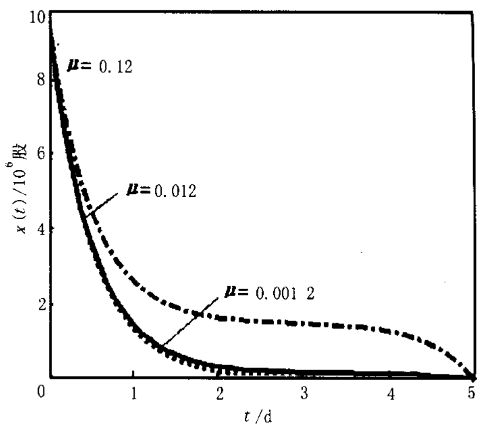

图 2　不同的超额收益率下机构投资者的最优变现策略
($\mu = 0.12, 0.012, 0.001\,2, \sigma = 0.63, \beta = 2.0 \times 10^{-7}, \lambda = 10^{-6}$)

从图 2～ 图 4 可以看出: 在其他参数既定情况下, 资产的超额收益率越高, 投资者的最优变现策略为在变现期内更多的时间中持有较大比例的该种资产, 获得高额的资产收益; 资产波动性越大, 投资者的最优变现策略是更快、更早地变现, 控制自身承受的资产波动性风险; 变现行为对资产的瞬时影响越强烈(β 越大), 投资者的最优变现策略应当为更缓慢地出售资产, 减少对价格的冲击

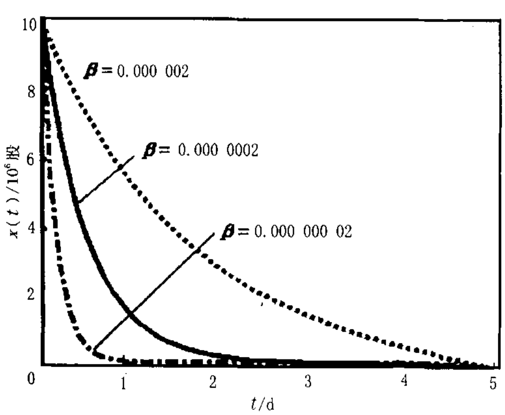

图 3　不同资产波动性的机构投资者最优变现策略
($\sigma = 0.063, 0.63, 1.63$; $\mu = 0.012$, $\lambda = 10^{-6}$, $\beta = 2.0 \times 10^{-7}$)

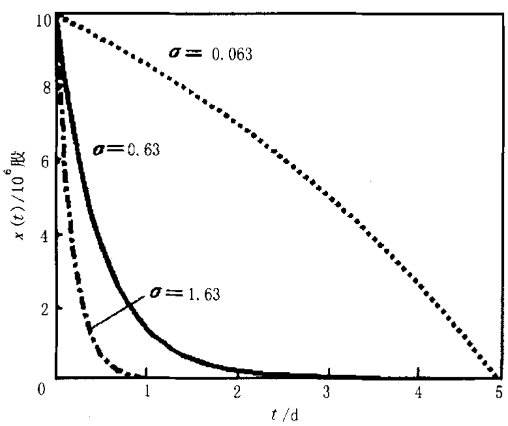

图 4　不同瞬时冲击的机构投资者最优变现策略
($\beta = 2.0 \times 10^{-6}, 2.0 \times 10^{-7}, 2.0 \times 10^{-8}$; $\mu = 0.012, \lambda = 10^{-6}$; $\sigma = 0.63$)

5 结束语

(1) 投资者对其资产组合中的资产进行变现, 最后可以得到的资产变现值(现金量) 是依赖于该投资者采取的变现策略的随机变量 不同的交易策略将可以使投资者获得不同的现金额 在既定风险承受能力下, 存在一种最优变现策略, 使得变现期初和期末标的资产总值差额最小;

(2) 投资者对资产变现可得的现金量与标的资产自身的一些特性有关, 诸如资产波动性(σ)、流动性(γ, β) 等 这就要求投资者在构造投资组合时需要考虑的不仅仅是该资产的波动性特性, 还包括未来对该资产进行变现时由于资产的流动性所带来的流动性风险

(3) 在敏感性分析中, 有关资产的超额收益率、波动性和流动性仅仅是一个示例, 而在实践中, 有关资产的收益率、波动性和流动性可以通过对资产价格做实证分析得到有关参数, 由此, 可以确定针对性更强的变现策略, 使得策略更具有可操作性;

4) 本文只考虑了对资产的完全变现操作, 而相应的资产非完全变现及对资产相反方向的最优买入策略, 将另文发表

参 考 文 献:

[1] Pérold A. The implement shortfall: Paper versus reality[J]. Journal of Portfolio Management, 1988, 14: 4- 9

[2] Holthausen R W, Leftwich R W, Mayers D. The effect of large block transactions on security prices: A cross-sectional analysis[J]. Journal of Financial Economics, 1987, 19: 237- 267

[3] Hasbrouck J, Schwartz R. Liquidity and execution costs in equity markets[J]. Journal of Portfolio Management, 1988, 14: 10- 16

[4] Brinson G, Singer B, Beebower G. Determinants of portfolio performance ii: An update[J]. Financial Analyst Journal, 1991, 47: 40- 48

[5] Chan L, Lakonishok J. Institutional trades and intra-day stock price behavior[J]. Journal of Financial Economics, 1993, 33: 173- 199

[6] Chan L, Lakonishock J. The behavior of the stock prices around institutional trades[J]. Journal of Finance, 1995, 50: 1147- 1174

[7] Keim D, Madhavan A. The upstairs market for large-block transactions: Analysis and measurement of price effects [J]. Review of Financial Studies, 1996, 9: 1- 36

[8] 刘海龙, 樊治平, 潘德惠 带有交易费用的证券投资最优策略[J]. 管理科学学报, 1999, 2(4): 39- 43

[9] Bertsima D, Lo A W. Optimal control of liquidation costs[J]. Journal of Financial Markets, 1998, (1): 1- 50

[10] Almegren R, Chriss N. Value under liquidation[J]. Risk, 1999, (12): 61- 67

[11] 刘海龙, 樊治平, 潘德惠 一种证券收益与风险动态模型的辨识方法[J]. 管理科学学报, 1999, 2(1): 37- 41

[12] Holthausen R W, Leftwich R W, Mayers D. Large block transactions, the speed of response, and temporary and permanent stock-price effects[J]. Journal of Financial Economics, 1990, 26: 71- 95

Institution investors' optimal liquidation strategy

ZHONG Li-ming, LIU Hai-long, WU Chong-feng

Financial Engineering Research Center, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract: To the institution investor who take a large block security, his transactions will make the unidirectional change of the security price, which causes the additional costs This paper considers the investor's liquidation behavior, and studies the optimal liquidation strategy which maximum the expected profit (minimum the expected loss) under certain volatility-endurance ability, and analyzes the sensitivity of the strategy. The conclusion suggests that the investors should consider the excess return, volatility and liquidity of the asset when they structure the portfolio, and take the appropriate liquidation strategy.

Key words: institution investor; optimal liquidation strategy; permanent impact; temporary impact