基于 OWG 算子的不同形式偏好信息的群决策方法①

樊治平, 姜艳萍
(东北大学工商管理学院, 沈阳 110004)

摘要:具有不同形式偏好信息的群决策是决策分析及群决策支持系统研究的一个新课题,它对于进一步提高群决策支持系统的实用性和灵活性方面具有重要意义. 针对这类群决策分析,提出了一种具有效用值、序关系值、模糊互补判断矩阵、互反判断矩阵等 4 种形式偏好信息的群决策方法. 在该方法中,首先给出了将不同形式的偏好信息均转化为互反判断矩阵形式的计算公式;然后基于 OWG 算子将各决策者的偏好信息集结为群的偏好并进行方案的优选;最后给出了一个算例.

关键词:群决策; 偏好信息; OWG 算子; 一致化; 集结; 方案优选
中图分类号:N 945. 25; C 934 文献标识码:A 文章编号:1007 - 9807(2003)01 - 0032 - 05

0 引 言

近 20 年来,虽然关于群决策方法及群决策支持系统的研究已取得了显著成果[1~3],但仍有一定的局限性. 主要表现在:已有的群决策方法或建立的群决策支持系统对决策者给出的偏好结构的形式有一定的要求或限制,即在一个群决策过程中,大多要求各个决策者给出相同形式的偏好信息,如或者给出序关系,或者给出评价分值等. 但在实际的群决策过程中,每个决策者都有其自己的观点、态度和个性等,所以不同的决策者即使是针对同一决策问题各自给出不同形式的偏好信息是非常自然的. 另一方面,随着信息技术(或电子商务)的飞速发展,未来将会在互联网上实现任何时间、任何地点的群决策. 因此,从进一步提高群决策支持系统的实用性和灵活性角度来看,也迫切需要考虑具有不同形式偏好信息的群决策方法. 因此如何分析具有多种形式偏好信息的群决策问题并为群决策支持系统提供有效的模型与算法,是群决策研究的一个新课题,并已经引起了重视[4~7]. 例如,文[4]给出了群决策中具有语言判断矩阵和数值判断矩阵两种形式偏好信息的集结方法;文[5]采用优化方法研究了具有模糊互补判断矩阵和互反判断矩阵两种形式偏好信息的群决策方法;文[6]研究了群决策中具有效用值、序关系值、模糊互补判断矩阵等 3 种形式偏好信息的集结方法;文[7]研究了群决策中具有效用值、序关系值、互反判断矩阵等 3 种形式偏好信息的集结方法. 本文在文[7]的基础上,对决策者给出效用值、序关系值、模糊互补判断矩阵和互反判断矩阵等 4 种形式偏好信息情况下的群决策问题进行了研究. 具体做法是:首先将不同形式的偏好信息一致化为互反判断矩阵的形式,然后采用近年来最新发展的有序几何加权(ordered weighted geometric, OWG)算子对各决策者给出的偏好信息进行集结和方案优选. 本文提出的分析方法扩展了文[7]给出的方法,而且弥补了其不足之处.

① 收稿日期:2001 - 11 - 28; 修订日期:2002 - 05 - 12.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(70071004);教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目;辽宁省自然科学基金资助项目(002012).
作者简介:樊治平(1961 —),男,江苏镇江人,博士,教授,博士生导师.

1　不同形式偏好信息的描述

为叙述方便,记 $N = \{1,2,\cdots,n\}$,$M = \{1,2,\cdots,m\}$. 在考虑的群决策问题中,设一个有限的决策方案集为 $X = \{x_i \mid i \in N\}$,其中 x_i 表示第 i 个决策方案. 设决策群体集为 $D = \{d_k \mid k \in M\}$,其中 d_k 表示第 k 个决策者. 在本文中,考虑各决策者在群决策中可能提供效用值、序关系值、模糊互补判断矩阵和互反判断矩阵等 4 种形式偏好信息,下面分别给出这 4 种形式偏好信息的简单描述.

1) 效用值(或评价值)　设决策者 d_k 针对方案集 X 给出的效用值向量为 $\mathrm{u}^k = (u_1^k, u_2^k, \cdots, u_n^k)^{\mathrm{T}}$,其中,$u_i^k$ 是实数型数值,并且满足 $u_i^k \geq 0$,$\sum_{i=1}^{n} u_i^k = 1$. 不失一般性,这里假设效用值 u_i^k 越大,对应的方案 x_i 越优. 因此,可将 u_i^k 视为方案 x_i 的权重.

2) 序关系值　设决策者 d_k 针对方案集 X 给出的序关系值向量为 $\mathrm{o}^k = (o_1^k, o_2^k, \cdots, o_n^k)^{\mathrm{T}}$,其中 $o_i^k \in N$ 表示方案 x_i 在所有方案中的位置次序. 不失一般性,这里假设序值 o_i^k 越小,对应的方案 x_i 越优.

3) 模糊互补判断矩阵(或模糊偏好关系矩阵)　设决策者 d_k 针对方案集 X 给出两两方案比较的模糊互补偏好关系[6~9],它可由一个矩阵 $\mathrm{P}^k \subseteq X \times X$ 来描述,相应的隶属函数 $\mu_{p^k}: X \times X \to [0,1]$,其中,$\mu_{p^k}(x_i, x_j) = p_{ij}^k$,$p_{ij}^k$ 可以被理解为方案 x_i 优于方案 x_j 的程度. 矩阵 $\mathrm{P}^k = (p_{ij}^k)_{n\times n}$ 具有非负性和互补性,即满足 $p_{ij}^k \geq 0$,$p_{ij}^k + p_{ji}^k = 1$,$p_{ii}^k = 0.5$,$\forall i, j \in N$.

4) 互反判断矩阵　设决策者 d_k 针对方案集 X 给出一个两两方案比较的互反判断矩阵为 $\mathrm{A}^k = (a_{ij}^k)_{n\times n}$,其中,元素 a_{ij}^k 可由决策者依据 Satty 提出的 1～9 标度法来给出[10],它表示方案 x_i 对方案 x_j 的相对重要程度,矩阵 A^k 满足:$a_{ij}^k > 0$,$a_{ii}^k = 1$,$a_{ij}^k a_{ji}^k = 1$,$\forall i, j \in N$.

2　不同形式偏好信息的一致化

当群决策中有不同形式的偏好信息时,一般需要将不同形式的偏好信息一致化,以便进行群的集结和方案优选. 容易看出,如果将各种形式的偏好信息均转化为序关系后再集结,显然会丢失较多的决策信息;如果都转化为效用值形式,由于根据模糊互补判断矩阵难以直接求出方案效用值,所以这也是不方便的. 因此,这里可以考虑将这 4 种形式偏好信息一致化为判断矩阵的形式. 本文采用的一致化方法是将效用值、序关系值和模糊互补判断矩阵等 3 种不同形式的偏好信息均转化为互反判断矩阵的形式,具体转换方法描述如下.

1) 对于效用值向量 $\mathrm{u}^k = (u_1^k, u_2^k, \cdots, u_n^k)^{\mathrm{T}}$,通过下列转换函数 ζ^1 将其转化为互反判断矩阵的形式.

$$a_{ij}^k = \zeta^1(u_i^k, u_j^k) = 9^{u_i^k - u_j^k}$$
$$\forall i, j \in N;\ \forall k \in M \tag{1}$$

由式(1)可以看出,对于 $\forall i, j \in N$;当 $u_i^k, u_j^k \in [0,1]$ 时,有 $a_{ij}^k \in [1/9, 9]$.

2) 对于序关系值向量 $\mathrm{o}^k = (o_1^k, o_2^k, \cdots, o_n^k)^{\mathrm{T}}$,通过下列转换函数 ζ^2 可将其转化为互反判断矩阵的形式[7].

$$a_{ij}^k = \zeta^2(o_i^k, o_j^k) = 9^{v_i^k - v_j^k}$$
$$\forall i, j \in N;\ \forall k \in M \tag{2}$$

其中

$$v_i^k = (n - o_i^k) / (n - 1)$$
$$\forall i \in N;\ \forall k \in M \tag{3}$$

对于式(2),也有 $a_{ij}^k \in [1/9, 9]$.

3) 对于模糊互补判断矩阵 $\mathrm{P}^k = (p_{ij}^k)_{n\times n}$,通过下列转换函数 ζ^3 可将其转化为按 1～9 标度的互反判断矩阵的形式.

$$a_{ij}^k = \zeta^3(p_{ij}^k) = 81^{p_{ij}^k - 0.5}$$
$$\forall i, j \in N;\ \forall k \in M \tag{4}$$

式中,$a_{ij}^k \in [1/9, 9]$.

对于上述转换方法,可以证明下面的结论.

定理 1　对于 $\mathrm{u}^k = (u_1^k, u_2^k, \cdots, u_n^k)^{\mathrm{T}}$,$\mathrm{o}^k = (o_1^k, o_2^k, \cdots, o_n^k)^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathrm{P}^k = (p_{ij}^k)_{n\times n}$,经转换函数 ζ^1、ζ^2、ζ^3 将它们分别转换为 $\mathrm{A}^k = (a_{ij}^k)_{n\times n}$ 之后,对于 $\forall i, j \in N$,则有

1) 若 $u_i^k > u_j^k$(或 $o_i^k < o_j^k$ 或 $p_{ij}^k > 0.5$),则必有 $a_{ij}^k > 1$;

2) 若 $u_i^k = u_j^k$ (或 $p_i^k = o_j^k$ 或 $p_{ij}^k = 0.5$) ,则必有 $a_{ij}^k = 1$;

3) 若 $u_i^k < u_j^k$ (或 $o_i^k > o_j^k$ 或 $P_{ij}^k < 0.5$) ,则必有 $a_{ij}^k < 1$.

定理 1 表明,当将效用值、序关系值和模糊互补判断矩阵分别转化为互反判断矩阵的形式时,决策者对任意两个方案优劣关系做出的判断思维经数学变换之后并没有被改变,改变的只是形式.

3 OWG 算子

当决策者 $d_1, d_2, \cdots, d_m$ 给出的各种形式的偏好信息经过一致化后,可得到 m 个互反判断矩阵,即 $A^1, A^2, \cdots, A^m$. 下面面临的问题是将各决策者的偏好信息集结成群的偏好并进行方案优选. 为此,本文考虑采用近年来最新发展的 OWG 算子[11~14] 来进行处理. OWG 算子是在模糊逻辑的基础上,基于模糊多数的概念,为信息的集结提供了一个柔性工具,使集结结果更能反映人类思维的模糊性[11~14].

设 $a_1, a_2, \cdots, a_l$ 是一组需要集结的元素,则 OWG 算子 Φ_Q^G 定义如下:

$$\Phi_Q^G : R^l \rightarrow R \tag{5}$$

即

$$\Phi_Q^G(a_1, a_2, \cdots, a_l) = \prod_{k=1}^{l} c_k^{w_k} \tag{6}$$

其中, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_l)^T$,其元素 c_k 是集合{ a_1, a_2, $\cdots$, a_l} 中按大小排在第 k 位的那个元素; $w = (w_1, w_2, \cdots, w_l)^T$ 是一个权向量,它由下式给出

$$w_i = Q(i/l) - Q\left((i-1)/l\right) \qquad i = 1, 2, \cdots, l \tag{7}$$

式中: $w_i \in [0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{l} w_i = 1$; $Q(r)$ 是计算 Φ_Q^G 中权向量的模糊量化算子,它由下式给出[6,7]:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & r < \alpha \\ \dfrac{r-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha \le r \le \beta \\ 1 & r > \beta \end{cases} \tag{8}$$

式中, $\alpha, \beta, r \in [0,1]$,在“多数”、“至少一半”和“尽可能多”原则下,模糊量化算子 $Q(r)$ 对应的参数 (α, β) 分别为 (0.3,0.8) ,(0,0.5) 和 (0.5,1)[6,7].

4 群的集结及方案优选方法

根据文献[7],针对 m 个矩阵 $A^1, A^2, \cdots, A^m$ 给出基于 OWG 算子的群的集结及方案优选的具体步骤:

步骤 1 根据式 (7) ,计算群集结的权向量 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_m)^T$,其中

$$g_i = Q(i/m) - Q\left((i-1)/m\right) \qquad i \in M \tag{9}$$

式中,模糊量化算子 $Q(r)$ 由式 (8) 给出. 在群集结中,通常需要考虑大多数决策者的意见,所以采用“至少一半以上”的原则,此时, Q 对应的参数为 $(\alpha, \beta) = (0, 0.5)$ [6,7].

步骤 2 利用 OWG 算子将各决策者的偏好信息 $A^1, A^2, \cdots, A^m$ 集结成为群的偏好 $A^* = (a_{ij}^*)_{n \times n}$,其中, a_{ij}^* 表示群体认为方案 x_i 优于方案 x_j 的程度,其计算公式由式 (6) 给出,即

$$a_{ij}^* = \Phi_Q^G(a_{ij}^1, a_{ij}^2, \cdots, a_{ij}^m) = \prod_{k=1}^{m} (\bar{a}_{ij}^k)^{h_k} \qquad \forall i, j \in N \tag{10}$$

其中,元素 $\bar{a}_{ij}^k$ 是集合{ a_{ij}^1, a_{ij}^2, $\cdots$, a_{ij}^m} 中按大小排在第 k 位的那个元素.

步骤 3 计算方案优选对应的 OWG 集结算子的权重 $g^* = (g_1^*, g_2^*, \cdots, g_n^*)^T$,即

$$g_i^* = Q(i/n) - Q\left((i-1)/n\right), \quad i \in N \tag{11}$$

式中, $Q(r)$ 为模糊量化算子,它由式 (8) 给出. 方案优选一般采用“多数”原则[6,7],此时 Q 对应的参数为 $(\alpha, \beta) = (0.3, 0.8)$ [6,7].

步骤 4 基于 OWG 算子,根据方案的寻优原则,可计算在模糊多数意义下方案 x_i 优于其他所有方案的程度 dd_i,即

$$dd_i = \frac{1}{2}\left(1 + \log_9 \Phi_Q^G(a_{i1}^*, a_{i2}^*, \cdots, a_{in}^*)\right) \qquad \forall i \in N \tag{12}$$

或者,也可以计算在模糊多数意义下方案 x_i 不劣于其他所有方案的程度 nd_i,即

$$nd_i = 1 + \log_9 \Phi_Q^G(b_{i1}^*, b_{i2}^*, \cdots, b_{in}^*) \qquad \forall i \in N \tag{13}$$

其中,矩阵 $B^* = (b_{ij}^*)_{n \times n}$ 的元素由下式给出

$$b_{ij}^* = \min\{ a_{ij}^*, 1\} \qquad \forall i, j \in N \tag{14}$$

步骤 5 方案优选. 记 $X^{dd} = \{ x_i \mid x_i \in X,$

$dd_i = \sup_{x_j \in X} dd_j\}$, $X^{nd} = \{x_i \mid x_i \in X, nd_i = \sup_{x_j \in X} nd_j\}$. X^{dd} 和 X^{nd} 分别称为最优方案和最不劣方案. 若 $X^{dd} \cap X^{nd} \neq \Phi$,则 $x_i \in X^{dd} \cap X^{nd}$ 即为所求的最优方案,并且 dd_i 或 nd_i 的值越大,相应的方案 x_i 越好;否则, $X^{ddnd} = \{x_i \mid x_i \in X^{dd}, nd_i = \sup_{x_j \in X^{dd}} nd_j\}$ 或 $X^{nddd} = \{x_i \mid x_i \in X^{nd}, dd_i = \sup_{x_j \in X^{nd}} dd_j\}$ 中的元素即为所求的最优方案.

5　算例

假设某用户公司需要对 4 个信息系统外包项目进行优选,它们分别是:公司网站的建立与维护 (x_1),公司管理信息平台维护 (x_2),公司内部局域网架构 (x_3) 和公司在线销售信息系统 (x_4). 用户公司所请的 4 位决策者(即 d_1, d_2, d_3, d_4) 针对方案集 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4,\}$ 分别给出如下形式的偏好信息:

$$u^1 = \{0.22, 0.30, 0.43, 0.05\}$$

$$o^2 = \{3, 1, 4, 2\}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 & 1/5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 5 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

其中, u^1 为效用值向量; o^2 为序关系值向量; A^3 为互反判断矩阵; P^4 为模糊互补判断矩阵. 为了进行群决策分析,首先,根据式(1) ～ (4) 将 u^1, o^2, P^4 分别转换为互反判断矩阵的形式,即

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.839 & 0.630 & 1.453 \\ 1.192 & 1 & 0.752 & 1.732 \\ 1.586 & 1.331 & 1 & 2.305 \\ 0.688 & 0.577 & 0.434 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4.327 & 0.481 & 2.080 \\ 0.231 & 1 & 0.111 & 0.481 \\ 2.080 & 9 & 1 & 4.327 \\ 0.481 & 2.080 & 0.231 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.268 & 0.172 & 3.737 \\ 3.737 & 1 & 0.415 & 1.552 \\ 5.800 & 2.408 & 1 & 2.408 \\ 0.268 & 0.644 & 0.415 & 1 \end{bmatrix}$$

然后,采取“至少一半以上”的原则,根据式(7) ～ (9) 可得到相应的 OWG 算子的权向量 $g = (1/2, 1/2, 0, 0)^T$,再由式(6) 和(10) 可将各决策者给出的偏好信息(即 A^1, A^2, A^3, A^4) 集结为群的偏好 A^*,即

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1.905 & 0.551 & 2.788 \\ 5.115 & 1 & 1.502 & 1.861 \\ 4.171 & 4.655 & 1 & 3.228 \\ 1.855 & 1.157 & 0.932 & 1 \end{bmatrix}$$

依据矩阵 A^*,若最优方案的选取采取“最优”原则,即模糊量化算子对应的参数为(0.3, 0.8),则可得出相应的 OWG 算子的权向量为 $g^* = (0, 0.4, 0.5, 0.1)^T$,根据式(12) ～ (14) 可得 $dd_1 = 0.5451$, $dd_2 = 0.603$, $dd_3 = 0.763$, $dd_4 = 0.5117$;并且

$$B^* = (b^*_{ij})_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.551 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.932 & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵 B^* 可得出, $nd_1 = 0.9729$, $nd_2 = 1$, $nd_3 = 1$, $nd_4 = 0.9968$. 可见 $X^{dd} \cap X^{nd} = \{x_3\}$, 所以最优方案为 x_3.

6　结束语

本文针对具有 4 种不同形式偏好信息的群决策问题给出了一种分析方法,方法首先将不同形式的偏好信息一致化,然后基于 OWG 算子进行群的集结和方案优选. 本文给出的方法不仅扩展了文[7]给出的方法,还弥补了其不足之处. 具体表现如下:

1) 将文[7]考虑的 3 种形式偏好信息扩展为 4 种.

2) 文[7]给出的一致化方法,将效用值向量转化为互反判断矩阵不够规范,它使转换后的矩阵元素可能不在由 1～9 标度法规定的范围,使得与其它一致化的信息不具有可比性. 本文方法较好地解决了这一点.

3) 文[7]没有对不同形式偏好信息一致化进行分析. 本文定理1表明,将各决策者给出的偏好信息经数学变换后,并没有改变决策者判断思维的逻辑关系,这点在理论上是非常重要的.

参 考 文 献:

[1]Hwang C L. Group Decision Making under Multiple Criteria, Methods and Applications [M]. New York: Springer-Verlag, 1987

[2]方卫国,周 泓. 多人决策支持系统评述[J]. 控制与决策, 1999, 14(1): 1—7

[3] 方卫国,周 泓. 逼近群体理想点的多目标群体决策算法[J]. 管理科学学报, 1998, 1(4): 34—38

[4]Delgado M, Herrera F, Herrera-Viedma E, *et al*. Combining numerical and linguistic information in group decision making [J]. Information Sciences, 1998, 107: 177—194

[5] 肖四汉,樊治平,王梦光. 群决策中两类判断矩阵的一种集成方法[J]. 控制与决策, 2001, 16(5): 569—572

[6]Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97: 33—48

[7]Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129: 372—385

[8]Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1: 155—167

[9] 姚 敏. 计算机模糊信息处理技术[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1999

[10]Satty T L. The Analytic Hierarchy Process [M]. New York: McGraw-Hill, 1980

[11]Yager R R. Families of OWA operators [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 59: 125—148

[12] Yager R R. Applications and extensions of OWA aggregations [J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1992, 37: 103—132

[13] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18: 183—190

[14] Zadeh L A. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages [J]. Computers and Mathematics with Applications, 1983, 9: 149—184

Approach to group decision-making with different forms of preference information based on OWG operators

FAN Zhi-ping, JIANG Yan-ping

School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China

Abstract: The group decision-making based on different form of preference information is a new topic in decision analysis and group decision support systems. It is significant to improve the practical effect and flexibility of group decision support systems. This paper proposes an approach to group decision-making problems with four forms of preference information, such as preference ordering, utility value, fuzzy reciprocal judgement matrix and multiplicative judgement matrix. In the approach, firstly, the computational formulas are given to uniform the four different forms of preference information into the form of multiplicative judgement matrix. Then, based on OWG operators, the preference information provided by every decision maker is aggregated into group preference and a method is also given to select the most desirable alternative(s). Finally, a numerical example is used to illustrate the use of the proposed approach.

Key words: group decision making; preference information; OWG aggregation operator; uniformity; aggregation; alternative selection