模糊随机风险偏好下的证券投资组合选择方法①

秦学志[1], 吴冲锋[2]
(1. 大连理工大学管理学院, 大连 116024; 2. 上海交通大学管理学院, 上海 200030)

摘要:在投资者风险偏好具有随机性和模糊性且效用函数具有线性可加性的假设条件下,建立了相应的证券投资组合选择方法. 在特定的效用函数下该方法只涉及一元不等式和一元积分的计算,具有简单实用的特点. 应该指出的是,该方法不同于传统的证券组合选择方法,它是建立在 Risto L 等提出的随机多目标可接受分析——SMAA 思想的基础上的.

关键词: 投资组合; 风险偏好; 不等式; 模糊
中图分类号: F830 文献标识码:A 文章编号:1007 - 9807(2003)04 - 0073 - 04

0 引 言

Markowitz 首次提出的证券投资组合决策方法[1]以及随后众多学者提出的证券投资组合决策方法,如单指数模型(single-index model)、多指数模型(multi-index model)[2]、效用函数方法[3]等,均未着重考虑投资者风险偏好程度的变化对投资组合选择的影响. Robert M[4]考察了证券投资组合期望收益的灵敏度分析问题,但也未从根本上考察投资者风险偏好程度的变化对投资组合的影响. Chue S 和 Hiroyuki N[5]提出了 α-风险容许最大期望收益率模型(α-risk permission maximum mean model),对证券组合投资方法进行了简明精当的回顾,同时指出只有一部分风险厌恶的投资者可能采用传统的投资组合方法,而另有一部分甘冒风险的投资者,他们的投资组合与传统的有效投资组合相差甚远,这意味着投资者风险偏好是确定投资组合的关键因素之一. 虽然文献[5]中回顾与考察了不同风险偏好投资者投资组合的确定方法,但没有针对同一投资者风险偏好程度呈现变化的情况进行相应的研究. 目前的投资组合选择方法中对投资者风险偏好程度可能变化的这种情况重视不够,尚没有学者专门对此进行深入地研究. 实际上,受信息、环境、品格、心态、学识等各种因素的影响,投资者风险偏好程度常常会发生变化,甚至是随机的、模糊的. 因此,为了使所建立的模型具有较好的一般性,本文在模糊随机的环境下考察投资者证券投资组合问题. 效用函数在经济决策研究中经常采用,但由于投资者效用函数一般较难具体确定,因此,其在应用上遇到了些麻烦,Fabio M[6]从计算简便性和结果易解释性的角度建议采用形式为 $U(\cdot) = E(\cdot) - A \cdot Var(\cdot)$ 的效用函数,其中 $E(\cdot)$ 和 $Var(\cdot)$ 为均值和方差,A 为实数. 本文在下述讨论中将使用 Fabio M 效用函数.

应该指出的是,本文的基本思想源于占优技术和随机多目标可接受分析(SMAA)[7].

1 基本符号及假设条件

考察市场上 n 种证券 $s_i(i = 1, \cdots, n)$ 的投资组合问题. 假设证券 s_i 的期望收益率为 r_i,收益率的方差为 $\sigma_i^2(i = 1, \cdots, n)$. 证券投资组合问题就是确定投资于证券 $s_i(i = 1, \cdots, n)$ 的资金比例 $x_i(i = 1, \cdots, n)$,满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. 若要求 $x_i \geq 0\ (i = 1, \cdots, n)$,

① 收稿日期:2001 - 11 - 02; 修订日期:2003 - 03 - 27.
基金项目:国家杰出青年基金资助项目(70025303); 国家自然科学基金资助项目(70273020).
作者简介:秦学志(1965 —),男,辽宁大连人,博士,副教授.

则对应于证券不允许卖空的情况;若 x_i 的符号不受限制,则对应于证券允许卖空的情况. 可以建立许多种确定最优证券组合的模型[1-3],下列是将效用函数 $u(\mathrm{x}, b)$ 作为目标函数时的一种模型(仅以不允许证券卖空的情况为例)

$$(\mathrm{P1})\begin{cases} \max & u(\mathrm{x}, b) \\ \mathrm{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \ (i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

其中:$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$; $b > 0$ 反映了投资者的风险厌恶程度,此时 b 越大风险厌恶程度越高,b 越小风险厌恶程度越小; $b < 0$ 反应了投资者的风险喜好程度,此时 b 越小风险喜好程度越高. 由于投资者的风险偏好程度很难保持不变,而极可能是随机的,甚至是模糊的. 因此,假设投资者的风险偏好程度为随机三角模糊数 $\tilde{b}_k = (b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3})\ (k = 1, \cdots, w)$, $\tilde{b}_k$ 对应的概率为 $p_k \geq 0$, 满足 $\sum_{k=1}^{w} p_k = 1$. 其中 $\tilde{b}_k$ 的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{b}_k}(x) = \begin{cases} 0, & x < b_{k_1} \text{ 或 } x > b_{k_3} \\ \dfrac{x - b_{k_1}}{b_{k_2} - b_{k_1}}, & b_{k_1} \leq x \leq b_{k_2} \\ \dfrac{x - b_{k_3}}{b_{k_2} - b_{k_3}}, & b_{k_2} \leq x \leq b_{k_3} \end{cases}$$

假设:

H1:向量 $(r_i, \sigma_i^2) \neq (r_j, \sigma_j^2)$, $\forall i, j = 1, \cdots, n$, $i \neq j$;

H2:投资者的投资效用函数具有线性可加性[8],即若投资者的风险偏好系数为 b,且其将全部资金投资于证券 s_i 时,其效用为 $u_i(b)\ (i = 1, \cdots, n)$,则投资组合为 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 时,其效用函数为 $u(\mathrm{x}, b) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i(b)$;

H3:不允许证券卖空.

如有必要,其它假设条件随时给出.

2 投资者风险偏好程度为单个模糊数的情况

为了讨论方便,先考察投资者风险偏好系数为区间数的情况,设该区间数为 $[b_{k_1}, b_{k_3}]$, 其中 $b_{k_3} > b_{k_1}$. 则优化问题

$$(\mathrm{P2})\begin{cases} \max & u(\mathrm{x}, b) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i(b) \\ \mathrm{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

的最优解为 $x_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } b \in B_i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,其中 $B_i = \{b \mid u_i(b) \geq u_j(b), j = 1, \cdots, n, j \neq i, b_{k_1} \leq b \leq b_{k_3}\}$ $(i \in \{1, \cdots, n\})$. 并规定,当 $b \in B_{i_0} \cap B_{i_1}$ 时(由下面的证明可知:每个 b 最多只能包含于两个相邻的集合 B_{i_0} 和 B_{i_1} 中),若 $i_0 < i_1$,则令 $x_{i_0} = 1$, $x_{i_1} = 0$;反之,令 $x_{i_0} = 0$, $x_{i_1} = 1$.

为了简单,取 $u_i(b)$ 为 Fabio M 效用函数:$u_i(b) = r_i - b\sigma_i^2\ (i = 1, \cdots, n)$.

定义 1 对某个 $b \in [b_{k_1}, b_{k_3}]$,证券 s_i 不劣于 s_j 当且仅当 $u_i(b) \geq u_j(b)$.

由 B_i 和定义 1 及(P2)知,B_i 表示证券 s_i 不劣于其它所有证券这一条件所对应的 b 的集合,即若 $b \in B_i$,则证券 s_i 不劣于其它所有证券. 若 $B_i = \varnothing$(空集),则说明对任意 $b \in [b_{k_1}, b_{k_3}]$,一定存在某个 $j_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $j_0 \neq i$,使 $u_{j_0}(b) \geq u_i(b)$.

记 $|B_i|$ 表示 B_i 所组成线段的长度(空集和单个点的长度设为 0). 令 $\overline{B_i} = \{b \mid u_i(b) > u_j(b), j = 1, \cdots, n, j \neq i, b_{k_1} \leq b \leq b_{k_3}\}\ (i = 1, \cdots, n)$. 则有

定理 1 $B_i = \overline{B_i}$ a.s. $(i = 1, \cdots, n)$, 即 $|B_i| = |\overline{B_i}|\ (i = 1, \cdots, n)$,其中 a.s. 表示“几乎必然”.

证明 B_i 与 $\overline{B_i}$ 的惟一区别在于 $u_i(b) \geq u_j(b)\ (j = 1, \cdots, n, j \neq i)$ 和 $u_i(b) > u_j(b)\ (j = 1, \cdots, n, j \neq i)$ 的不同. 对任意 $\{k_1, k_2, \cdots, k_l\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ 且 $k_j \neq i\ (j = 1, \cdots, l)$,由假设 H1 可知线性方程组 $u_i(b) = u_{k_j}(b)\ (j = 1, \cdots, l)$ 要么有唯一解要么无解,所以,$B_i = \overline{B_i}$ a.s. $(i = 1, \cdots, n)$,即 $|B_i| = |\overline{B_i}|\ (i = 1, \cdots, n)$.

定理 2 $\overline{B_i} \cap \overline{B_j} = \varnothing\ (i, j = 1, \cdots, n, i \neq j)$; $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = [b_{k_1}, b_{k_3}]$.

证明 由 $\overline{B_i}$、$\overline{B_j}$ 的定义立即可得 $\overline{B_i} \cap \overline{B_j} = \varnothing(i,$

$j=1,\cdots,n,i\neq j)$;由 B_i 的定义知,$B_i\subset[b_{k_1},b_{k_3}]$,所以,$\bigcup_{i=1}^{n}B_i\subset[b_{k_1},b_{k_3}]$;反之,对 $\forall b\in[b_{k_1},b_{k_3}]$,一定存在{1,2,⋯,n} 的一个排序 $\{\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{n}\}$,其中 $\forall\bar{i}\in\{1,2,\cdots,n\}$,使 $u_{\bar{1}}(b)\geq u_{\bar{2}}(b)\geq\cdots\geq u_{\bar{n}}(b)$,即 $b\in B_{\bar{1}}\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$,从而 $[b_{k_1},b_{k_3}]\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$. 综上分析可得 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=[b_{k_1},b_{k_3}]$.

推论　$\bigcup_{i=1}^{n}\bar{B}_i=[b_{k_1},b_{k_3}]$ a. s.

由 $\bar{B}_i\cap\bar{B}_j=\varnothing(i,j=1,\cdots,n,i\neq j)$ 和 $\bigcup_{i=1}^{n}\bar{B}_i=[b_{k_1},b_{k_3}]$ a. s. 知 $\bar{B}_i(i=1,\cdots,n)$ 为 $[b_{k_1},b_{k_3}]$ 的一个划分.

下面考察投资者风险厌恶程度为单个模糊数的情况.

投资者风险厌恶程度 b 为模糊数 $\tilde{b}_k$ 时,其隶属函数记为 $\mu_{\tilde{b}_k}(x)\ (x\in[b_{k_1},b_{k_3}])$,令 $\chi_{B_i}(x)=\begin{cases}1, & x\in B_i\\ 0, & x\notin B_i\end{cases}(i=1,\cdots,n)$,$\bar{f}(x)=\dfrac{\mu_{\tilde{b}_k}(x)}{\int_{k_1}^{k_3}\mu_{\tilde{b}_k}(x)\mathrm{d}x}(x\in[b_{k_1},b_{k_3}])$. 采用一般处理模糊问题常采用的重心法(centroid method)或一阶矩法(one moment method)[9],令 $\alpha_i=\int_{k_1}^{k_3}\chi_{B_i}(x)\bar{f}(x)\mathrm{d}x=\int_{B_i}\bar{f}(x)\mathrm{d}x,(i=1,\cdots,n)$. 则有

定理 3　(Ⅰ) $\alpha_i\geq 0(i=1,\cdots,n)$;且

(Ⅱ) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$.

证明　(Ⅰ) 显然;$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}\bar{f}(x)\mathrm{d}x=$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}\frac{\mu_{\tilde{b}_k}(x)}{\int_{k_1}^{k_3}\mu_{\tilde{b}_k}(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x=\frac{\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}\mu_{\tilde{b}_k}(x)\mathrm{d}x}{\int_{k_1}^{k_3}\mu_{\tilde{b}_k}(y)\mathrm{d}y},$$

由定理 2 或推论知,$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$,即(Ⅱ)成立.

由 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 的意义及上述分析,利用 SMAA 的思想,可知 α_i 表示投资者倾向投资于证券 s_i 的可能性,因此,该投资者投资于证券 s_i 资金额的"期望值"为 $\alpha_i\times I_T$,其中 I_T 为总的投资额,即 α_i 为投资于证券 s_i 的资金占整个资金的可能性比例,因此将 α_i 作为 x_i,即令 $x_i=\alpha_i(i=1,\cdots,n)$.

在本节除了假设 $b_{k_3}>b_{k_1}$ 外,对 b_{k_1}、b_{k_3} 未加任何限制,实际上,$b_{k_3}=b_{k_1}$ 时,上述方法即退化为传统的方法,不是本文所要讨论的问题;另外,$b_{k_1}\geq 0$ 对应投资者风险厌恶的情况;$b_{k_3}\leq 0$ 对应投资者风险喜好的情况;$b_{k_1}<0$ 且 $b_{k_3}>0$ 对应投资者既可能厌恶风险又可能喜好风险的情况.

3　投资者风险偏好程度为随机模糊数的情况

由第 2 节得到的对应于模糊数 $\tilde{b}_k$ 的投资组合记为 $\mathrm{x}_k=(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk})^{\mathrm{T}}$,其中 x_{ik} 表示风险偏好程度为模糊数 $\tilde{b}_k$ 时投资于证券 s_i 的资金占总投资资金的比例. 令 $x_i=\sum_{k=1}^{w}p_kx_{ik}(i=1,\cdots,n)$,则有

定理 4　(Ⅰ) $x_i\geq 0(i=1,\cdots,n)$;

(Ⅱ) $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.

证明　(Ⅰ) 显然;$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{w}p_kx_{ik}=\sum_{i=1}^{n}p_k\left(\sum_{k=1}^{w}x_{ik}\right)=\sum_{i=1}^{n}p_k=1$,(Ⅱ)得证.

因此,类似于第 2 节的分析,将 $\mathrm{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 作为投资组合.

4　示例

下列给出一个简单例子.

(1) 基本数据

考察 3 个证券的投资组合问题,证券的期望收益率及其方差由表 1 所示,采用 Fabio M 效用函数.

表 1　证券 s_i 的期望收益率及其方差

证　券	s_1	s_2	s_3
期望收益率	0.10	0.15	0.20
收益率的方差	0.02	0.08	0.15

投资者的模糊随机风险偏好系数为三角模糊数 $\tilde{b}_1=(-0.3,1.0,1.8)$,$\tilde{b}_2=(1.5,2.0,2.4)$,对应的概率为 $p_1=0.6$,$p_2=0.4$.

(2) 计算结果

表 2 模糊随机风险偏好系数对应的 $B_i(i = 1,2,3)$

	B_1	B_2	B_3
$\tilde{b}_1$	(5/6, 1.8]	(5/7, 5/6]	[-0.3, 5/7]
$\tilde{b}_2$	[1.5, 2.4]	Ø	Ø

表 3 $\tilde{b}_1$ 和 $\tilde{b}_2$ 对应的投资组合 x_1, x_2, x_3

	x_1	x_2	x_3
$\tilde{b}_1$	0.530	0.094	0.376
$\tilde{b}_2$	1.00	0	0

表 4 投资组合的最终结果

x_1	x_2	x_3
0.718	0.056	0.226

5 结束语

在投资者的投资效用具有线性可加性及投资者风险偏好程度为随机模糊数等的假设条件下,本文建立了基于模糊随机风险偏好的证券投资组合选择方法. 若采用 Fabio M 效用函数,则该方法相当简单,只涉及一元不等式及一元积分的计算. 本文方法完全不同于传统的方法,在证券投资组合问题的研究中开辟了一条新途径,可以证明在更一般的效用函数假设条件下(将另文讨论),上述结果仍然成立,即可将其它形式的效用函数取代上述的 Fabio M 效用函数,对分析结果并无根本影响,只是在计算 B_i 时略微不同些. 值得指出的是,效用函数的线性可加性使本文结论的使用限制在一定的范围内,当不同证券的收益率相关时,效用函数的线性可加性假设可能会对结果产生不良影响,但是幸运的是,利用主成分分析方法可以将证券收益率相关的情况通过构造“新的证券”化为收益率无关的情况,这样就可以利用上述方法进行讨论,有关细节这里不予讨论. 另外,本文未研究允许证券卖空的情况,在本文的研究框架下上述情况相对复杂,有待进一步研究.

参 考 文 献:

[1]Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 3(7): 77—91
[2]Elton E J, Gruber M J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis[M]. 3rd ed. New York: Wiley, 1987
[3]Konno H, Yamazaki H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market[J]. Management Science, 1991, 37: 519—531
[4]Michael J B, Robert R G. Sensitivity analysis for mean variance portfolio problems[J]. Management Science, 1991, 37: 980—990
[5]Chue S, Hiroyuki N. Interactive decision system in stochastic multi-objective portfolio selection[J]. Int J Production Economics, 1999, 60-61: 187—193
[6]Fabio M. Claim pricing and hedging under market incompleteness and "mean-variance" preferences[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 133: 635—652
[7]Risto L, Joonas H, Pekka S. SMAA—Stochastic multiobjective acceptability analysis[J]. European Journal of Operational Research, 1998, 106: 137—143
[8]潘介人. 决策分析中的效用理论[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2000
[9]James J B, Yoichi H. Applications of fuzzy chaos to fuzzy simulation[J]. Fuzzy Sets and System, 1998, 99: 151—157

Portfolio selection method under investor's fuzzy stochastic risk preference

QIN Xue-zhi[1], *WU Chong-feng*[2]
1. School of Management, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

Abstract: Under the assumption that the investor's risk preference is stochastic and even fuzzy and utility function is of linear additivity, this paper establishes the method for determining the investment portfolio based on fuzzy stochastic risk preference. The method is very simple and concise when the utility function is of the form provided by Fabio Mercurio, because it only needs to solve inequalities and calculate integrals with one variable. It worth mentioning that the method established here is different from the classical ones because it is based on the main idea of SMAA (stochastic multi-objective acceptability analysis) proposed by Risto Lahdelma, *et al*.

Key words: portfolio; risk preference; inequality; fuzzy