

基于 GARCH 模型和 SV 模型的 VaR 比较

余素红, 张世英, 宋 军
(天津大学管理学院, 天津 300072)

摘要: 简单介绍了 VaR 的含义及计算方法, 指出推测市场因子的波动情况是计算 VaR 的关键. 通过对比 GARCH 和 SV 模型, 得出 SV 模型更能刻画金融市场的实际特征. 将随机波动 SV 模型应用于 VaR 的计算, 最后作实证研究. 通过与 GARCH 模型下的结果对比, 说明基于 SV 模型计算的 VaR 更具有动态性和准确性, VaR 更贴切地反映了金融市场的风险水平.

关键词: VaR; 市场因子; GARCH 模型; SV 模型

中图分类号: F830.91

文献标识码: A

文章编号: 1007 - 9807(2004)05 - 0061 - 06

0 引言

近 20 年来, 金融市场风险成为全球金融机构及监管当局关注的焦点. 与之对应, 风险测量技术也在近年得到了发展. 其中, VaR (value at risk) 由于其明确的经济含义及易操作性成为金融市场风险测量的主流模型.

最基本的分析方法是市场因子看成是具有固定方差的正态分布从而简单估计 VaR. 因为金融市场的时变性, 这样得出的结果显然太过粗糙, 寻找一种最能刻画市场因子回报波动性的模型至关重要. 加权正态模型 (WIN) 考虑到了波动动态时变性, 但权值赋予依赖于经验, 缺乏理论支持^[1]. 近年来, 异方差模型被认为是最能刻画金融市场波动性的模型, GARCH 模型族被广泛应用于 VaR 值的计算, 其中 EGARCH 模型被认为能较理想测量 VaR^[2~4]. 然而, GARCH 模型族面对金融时间序列“高峰厚尾”、杠杆效应、平方序列微弱而持久的自相关性等显著特征也显得十分脆弱, 国外已有大量实证研究指出了这些问题^[5]. SV 模型是另一类异方差模型, 具有数理金融学和金融计量经济学双重根源, 其最显著特征是将随机过程

引入到方差表达式中, 被认为是刻画金融市场波动性的最理想模型. Harvey A^[6]、Kim^[7] 等学者做过大量关于 SV 模型与 GARCH 模型比较研究, 认为 SV 模型所刻画的波动性与金融市场特征更加吻合. 尽管 SV 模型功能强大, 但由于其参数估计困难, 直到近年才开始得到运用, 而基于 SV 模型下 VaR 值的计算及其与基于 GARCH 模型下 VaR 值的比较, 国内外文献均未见报道.

本文旨在利用异方差模型来测量股市的 VaR 值. 从模型出发说明了 SV 模型具有比 GARCH 模型更与金融市场实际特征相吻合的数值指标. 分别得出了基于两种模型下的上海股市的 VaR 值, 实证研究说明利用 SV 模型计算出的 VaR 值更好地反映了上海股市的风险水平. 本文对两种异方差模型进行比较, 并从动态角度考虑 VaR_t 时间序列的特征.

1 VaR 的计算式

VaR 代表在一定置信度水平下, 一定持有期内某一资产或组合所面临的最大潜在损失额. 为了简化计算, 主要考虑股市综指的收益水平. VaR 表示在一定置信度下一定期间内股市所面临的最

收稿日期: 2002 - 07 - 05; 修订日期: 2004 - 02 - 24.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70171001).
作者简介: 余素红 (1978 -), 女, 湖南人, 硕士生.

小收益率,为

$$P\{R_t > -V R_t\} = 1 - \quad (1)$$

其中: R_t 为资产在第 t 期的收益; α 为显著性水平; $V R_t$ 为 t 时刻 α 水平下的 VaR, 取值为正.

可以看出, $V R$ 直接刻画一定显著水平下“损失”的大小,它的量纲为价值单位. 由于一般的异方差模型均认为各时点上收益服从具有时变方差的条件正态分布, 所以有

$$R_t | I_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \quad (2)$$

I_{t-1} 表示过去信息集, 则有

$$\frac{\mu_t + V R_t}{\sigma_t} = U_{1t} \quad (3)$$

这里, U_{1t} 为标准正态分布 $1 - \alpha$ 水平分位数.

对式(3)进行变换, 有

$$V R_t = -\mu_t + U_{1t} \sigma_t \quad (4)$$

即当收益的条件分布为正态时, $V R_t$ 是 μ_t 的线性函数. 近年来理论和实证研究都说明时间序列的非正态性有着其异方差根源, 所以选用当前处理异方差领域的工具——GARCH和SV模型来刻画股市收益的波动性, 并进行比较, 进而获得较精确的 VaR 值.

2 GARCH和SV模型对波动值的计算

本文讨论的模型均有以下分布

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (5)$$

其中, σ_t^2 是 ϵ_t 基于 $t - 1$ 时刻已有信息的条件方差. 如果 σ_t^2 有以下表达式

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 \quad (6)$$

式(5)、(6)便是 GARCH(1,1) 模型. 条件方差 σ_t^2 是前期观测值及条件方差的函数. 当模型用于预测金融资产收益时, 一般选用 GARCH(1,1) 模型. 利用实际数据, 估计出 GARCH(1,1) 中的参数 $\omega, \alpha_1, \alpha_2$ 后, 直接利用式(6)递推计算出各个时间的波动值, 只是要注意消除初始值 σ_0, ϵ_0 的影响.

标准的 SV 模型如下

$$h_t = \frac{h_t}{e^{\lambda}}, \quad \epsilon_t \sim nid(0, 1) \quad (7)$$

$$h_t = \omega + \alpha h_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim nid(0, \sigma^2) \quad (8)$$

其中: $\{\epsilon_t\}$ 是具有零均值, 方差为 1 的正态独立分布; $\{\epsilon_t\}$ 是具有零均值, 方差为 σ^2 的正态独立分布, 且

$\{\epsilon_t\}$ 与 $\{\epsilon_{t'}\}$ 不相关; $\omega, \lambda, \sigma^2$ 为常数. 由于式(8)中 ϵ_t 是随机误差项, 故 h_t 不可观测. 式中, $\epsilon_t = R_t - \bar{R}, h_t = \log \frac{\sigma_t^2}{\bar{\sigma}^2}$. $\bar{\sigma}^2$ 是 σ_t^2 的方差, 由于大多数股指有 $\bar{R} = 0$, 故直接取 $\epsilon_t = R_t, \sigma_t^2$ 为 R_t 的方差.

由于在 SV 模型中, 方差是一个不可观测的变量, 很难计算出其精确的似然函数, 所以对标准 SV 模型进行参数估计存在较大困难. 近年来, 各国学者不断研究并提出多种方法, 对 SV 的参数估计进行改进, 最常见的是广义矩估计 (GMM) 和由 Durbin 和 Koopman 提出的马尔科夫链蒙特卡罗模拟法 (MCMC) [8], 但计算量大且过程复杂, 实际中仍然采用的是近似解法——伪极大似然法 (QML) [9] 对 SV 模型进行估计.

当利用实际数据估计出模型中的参数 ω, λ 和 σ^2 后, 将 SV 模型转换成线性状态空间, 完成对实际波动性的平滑、滤波和预测. 对式(7)两边取对数, 有

$$\log \frac{\sigma_t^2}{\bar{\sigma}^2} = h_t + \log \frac{\sigma_t^2}{\bar{\sigma}^2} \quad (9)$$

定义 $Y_t = \log \frac{\sigma_t^2}{\bar{\sigma}^2}, X_t = h_t, \epsilon_t = \log \frac{\sigma_t^2}{\bar{\sigma}^2}$, 则式(9)、(8)可表示为

$$Y_t = X_t + \epsilon_t \quad (10)$$

$$X_t = \omega + \lambda X_{t-1} + \epsilon_t \quad (11)$$

这是一个线性状态空间形式. 利用伪极大似然法求得 SV 模型参数 $(\omega, \lambda, \sigma^2)$ 的估计, 从而得到 $V R_t$ 估计或预测.

利用 SV 模型和 GARCH 模型计算出各点的波动值 σ_t 后, 代入式(4)即可计算出各个时点的 VaR 值.

3 两种模型金融数据特征刻画能力的比较

对比用 SV 和 GARCH 模型计算的 VaR 值之前, 先比较这两类模型对金融市场上一些典型特征的刻画能力.

“高峰厚尾”和收益残差平方序列微弱而持久的自相关性是金融市场上两个典型的特征, 在模型中通过较高的峰度值和较低的相关系数值反映. 对于 GARCH 模型, 可以推导出 GARCH(1,1) 模型的峰度 k_1 和一阶相关系数 ρ_1 表达式为

$$\rho_1^G = \frac{(1 - 3 \rho_1^{-1})}{3(1 - \rho_1^{-1})} + \quad (12)$$

根据 Harvey^[6] 给出的 SV 模型的峰度和自相关系数表达式,可以得到标准 SV 模型的峰度和一阶相关系数 ρ_1 的表达式为

$$\rho_1^{SV} = \frac{1/3 \cdot \rho_1^{SV} - 1}{\rho_1^{SV} - 1} = \frac{\rho_1^{SV} - 3}{3(\rho_1^{SV} - 1)} \quad (13)$$

利用公式(12)、(13) 做图 1、图 2.

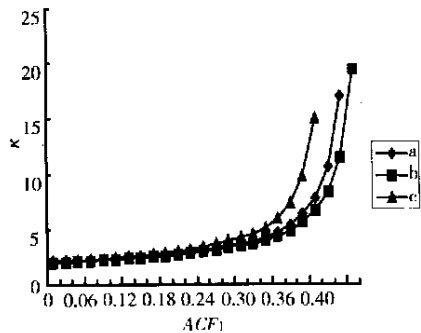


图 1 GARCH 模型下 ρ -ACF1 的关系

Fig. 1 Relationship between ρ and ACF1 on the GRACH model

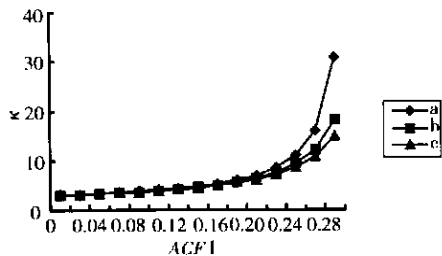


图 2 SV 模型下 ρ -ACF1 的关系

Fig. 2 Relationship between ρ and ACF1 on the SV model

图 1 中 a) $\rho + \rho_1 = 0.98$; b) $\rho + \rho_1 = 0.95$; c) $\rho + \rho_1 = 0.9$. 图 2 中 a) $\rho = 0.9$; b) $\rho = 0.95$; c) $\rho = 0.98$. 在 SV 模型下, ACF_1 即 ρ_1 值基本处于小于 0.3 的范围, 而峰度值较大, 在较小的 ρ_1 值范围内增幅也较明显, 在 ρ_1 值为 0.24 时, ρ 值已达到 10. 图 2 中, $ACF_1 \in (0, 0.3)$, 而 $\rho \in (3, 30)$ 左右. 在 GARCH 模型下, ρ 值变化平缓, 直到 ρ_1 值大于 0.3 以后, ρ 值才有上扬趋势. 在图 1 中, $ACF_1 \in (0, 0.42)$, 而 $\rho \in (2.05, 18)$. 可以看出, SV 模型较 GARCH 模型更能刻画高的 ρ 值、低的 ρ_1 值.

金融市场的两个典型特征: 分布的“高峰厚尾”性; 平方序列 $\{r_t^2\}$ 微弱而持续的自相关性. 反映在数值指标上便是高的 ρ 值、低的 ρ_1 值. 因此, SV 模型对金融市场上的两个特征比 GARCH 模型

有较强的刻画能力, 利用 SV 模型计算得出的 VaR 值更能反映市场的风险水平.

4 实证研究 ——测定上海股市的 VaR

4.1 数据选取

样本为上海股市 1992 - 05 - 21—2001 - 12 - 31 综合指数每日的收盘数据, 用 $R_t = \log P_t - \log P_{t-1}$ 计算日收益率, 共得到 2 367 个数据, P_t 表示上证指数第 t 个交易日收盘价. 表 1 为上海股市收益率统计特征.

表 1 上海股市收益率的统计特征

Table. 1 Statistical characteristics of returns ratio for Shanghai stock market

	均值	标准差	偏态	峰态	J-B
R_t	0.000 101 75	0.029 095	1.342 4	15.472	24.320

在正态分布假设下, S (偏度) = 0, (ρ 峰度) = 3, J-B = $\frac{\rho - 3}{\sqrt{6}}$ (2). 由表 1 可以看出, 样本偏态和峰态均显著异于正态分布特征, J-B 统计量也远大于任何合理的显著水平下 $\chi^2(2)$ 的临界值. 上海股市数据统计特征再次说明了收益在分布上的“高峰厚尾”性, 因此, 为获得准确的 VaR 数值, 利用最能刻画金融时间序列波动特征的 SV 模型成为必要.

4.2 模型的估计

用伪极大似然法, 利用卡尔曼滤波对 SV 模型进行了估计, 对 GARCH(1, 1) 的估计采用一般的极大似然法, 利用 Matlab 编写计算机程序.

上海股市波动模型的表达式为

GARCH 模型

$$r_t^2 = \omega + \alpha_1 r_t^2 + \beta_1 r_{t-1}^2 \quad (5.265) \quad (22.109) \quad (181.877)$$

SV 模型

$$r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 h_t + \beta_1 h_{t-1} + \gamma_1 r_{t-1}^2 \quad (-434.717) \quad (1663.261)$$

$$\epsilon_t \sim N(0, 0.286370^2) \quad (512.79)$$

括号中的数值为估计参数的 t 统计量.

4.3 基于两种模型下的 VaR_t

一般情况下, 日收益分布均值 μ_t 为 0, 本文取 μ_t 为样本总体均值 0.000 101 75, 正态分布分位数 $U_{95\%} = 1.65$, 代入公式(4), 这样上海股市间隔为

d, 置信度为 95 % 的 VaR 表达式为

$$V R_t = -0.00010175 + 1.65 \sigma_t \quad (14)$$

利用已估计出的 GARCH 和 SV 模型, 可计算出上海股市 1992 - 05 - 21 至 2001 - 12 - 31 的收益波动序列 $\{\sigma_t\}$, 再利用公式 (14) 则可计算序列 $\{V a R_t\}$, 由于数据太多无法全部列出, 仅列出部分数据, 见表 2. 根据 VaR 值作出图 3. 从表中可知 2001 - 12 - 31, 基于 GARCH 模型的 VaR 值为 0.040062, 按本文的定义, 2002 - 01 - 01 上海股市

的最低收益不会小于 - 0.040062, 而基于 SV 模型, 估计得出的结果是 2002 - 01 - 01 股市的最低收入不会小于 - 0.037441.

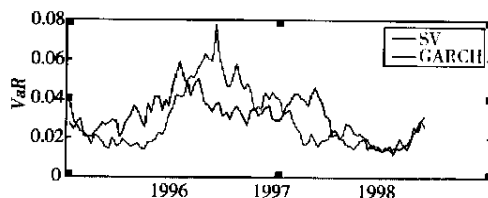


图 3 两种模型下的 VaR 值

Fig. 3 Results of VaR for GARCH and SV models

表 2 基于 GARCH 和 SV 模型的 VaR 值

Table 2 Results of VaR based on GARCH and SV models

时间	$V R_t^*$	$V R_t^{**}$	时间	$V R_t^*$	$V R_t^{**}$
1992 - 05 - 21	0.036160	0.041567	1997 - 02 - 24	0.046497	0.050647
1992 - 05 - 22	0.037654	0.041837	1997 - 02 - 25	0.051840	0.046751
1992 - 05 - 25	0.030561	0.040613	1997 - 02 - 26	0.058491	0.044393
1992 - 05 - 26	0.026002	0.039233	1997 - 02 - 27	0.063276	0.042178
1992 - 05 - 27	0.029045	0.041237	1997 - 02 - 28	0.058380	0.044427
...
1997 - 02 - 17	0.029669	0.053904	2001 - 12 - 25	0.040702	0.038637
1997 - 02 - 18	0.034791	0.056846	2001 - 12 - 26	0.032900	0.036667
1997 - 02 - 19	0.044533	0.060812	2001 - 12 - 27	0.029874	0.035960
1997 - 02 - 20	0.050795	0.056251	2001 - 12 - 28	0.033526	0.036358
1997 - 02 - 21	0.049768	0.052670	2001 - 12 - 31	0.040062	0.037441

注: 表中列出的数据为样本前 5 个, 中间 10 个和最后 5 个; $V R_t^*$ 为基于 GARCH 模型的数值, $V R_t^{**}$ 为基于 SV 模型的数值.

4.4 数据分析及结论

1) 迄今为止, SV 模型被认为是对异方差最精确的估计模型, 本文通过对 SV 与 GARCH 两个模型的对比说明, 利用 SV 模型得出的方差序列可以认为是对股市波动性最准确的反映. 图 3 中, 利用 GARCH 和 SV 计算出的 VaR 序列宏观上大体趋势一致, 说明两个模型估计的波动没有大的偏差, 但对于微观的具体时段中, 特别是 1996 年之前, SV 模型处理的结果显得更加精确, 灵敏性更高, 而基于 GARCH 模型下的 VaR 则相对粗糙. 表 2 中 $V R_t^{**}$ 优于 $V R_t^*$, 切实地反映了上海股市总体风险水平. 图 3 中 $V a R_t^{**}$ 最大值 0.094372, 最小值 0.020354, 均值 0.043219. 实际上, “厚尾”分布表示有更多偏离均值较大的事件发生. SV 模型较其他异方差模型能做出较为精确的判断. 图 3 中表现为较多时间基于 SV 模型计算的 VaR 值骤然增大, 说明由于收益突变较多, 波动较大, 自

然也有较多 VaR 值的突变情形.

2) 为了对比讨论基于两种模型下 VaR 对风险测度的准确性, 本文计算了下一天实际回报低于 - VaR 的数目, 利用这个数据除以 2367 得到的百分数定义为误判率. 本文中选取置信度为 95%, 若模型理想, 误判率应等于 5%; 若误判率过度小于 5%, 则说明利用模型估计的波动性大于实际情况, 导致 VaR 值较高, 高估了市场风险; 误判率大于 5%, 则说明模型估计的波动性小于实际情况, 导致 VaR 值偏低, 低估了市场风险. 在本实证中, 2367 d 中基于 SV 模型下有 114 d 的实际收益低于 - VaR, 误判率为 4.82%, 在 GARCH 模型下有 108 个实际收益低于 - VaR, 误判率为 4.56%, 显然, SV 模型下的 VaR 的误判率更接近 5% 而较理想, 而基于 GARCH 模型下的 VaR 值高估了市场风险. 从误判率水平来看, 基于 SV 模型的 VaR 值更为理想. 4.82% 误判率水平下的 VaR 值既没

有低估风险,也没有高估风险,比较贴近实际水平。

3) 价格波动序列持续性是金融风险研究的热门问题。 $V R_t$ 是 r_t 线性变换,若 $\{r_t\}$ 为一长记忆过程,则 $V R_t$ 具有与 r_t 同样的持续性和长记忆性。SV 和 GARCH 模型均能很好地反映 r_t 的持续性,显然利用这两种模型估计出的 VaR 值也有同样的性质。这在图 3 中可以清楚地看出:两个 VaR 序列均有较强的集聚性, VaR 值不会急剧衰减,在一个较高的 VaR 值之后必然会有一段较高的 VaR 值持续存在。由图 3 可知,基于 SV 模型的 VaR 对风险做出的反映更快,持续时间更长。基于 SV 模型下的 $V R_t^*$ 和基于 GARCH 模型下的 $V R_t^*$ 的一阶自相关系数分别为 0.987、0.973。VaR 的持续性是金融风险管理上关心的问题。

5 结束语

本文讨论了如何利用 GARCH 和 SV 模型计

算 VaR 值,并通过实证分析得知,基于 SV 模型下的 VaR 值更具有动态性、准确性,但是还存在几个问题有待完善。

1) 仅研究了基本市场因子回报的简单的 VaR 值的测度,而实际中遇到的常是一些多个资产组合潜在损失的问题。如何利用 SV 模型测定包含多个市场因子波动性,并寻求适当的资产定价公式,计算具体资产的风险是需要进一步讨论的问题。

2) 所采取的标准 SV 模型虽然较其他的异方差模型更能刻画“厚尾”现象,但其对随机项的条件正态假设,仍使其难以对实际数据做更好的概括,所以应探索扩展 SV 模型。一般认为,对金融序列“高峰厚尾”性质的刻画,SV-t 和 SV-GED 模型要比 SV-正态更有效。

3) VaR 是金融市场风险管理的一种重要工具,但它也存在一些缺点,如它不是一致性风险度量等。近年来已提出了一些改进途径,如文献[10]提出的条件风险价值(CVaR)等。

参考文献:

- [1]Morgen J P. Risk Metrics-Technical Document[M]. 3rd ed. New York: Morgen Trust Company Global Research, 1995.
- [2]Billo M, Pelizzon L. Value-at-risk: A multivariate switching regime approach[J]. Journal of Empirical Finance, 2000, 7: 531—554.
- [3]Vlaar P J G. Value at risk models for Dutch bond portfolios[J]. Journal of Banking and Finance, 2000, 24: 1121—1154.
- [4]Beltratti A, Morana C. Computing value at risk with high frequency data[J]. Journal of Empirical Finance, 1999, (6): 421—455.
- [5]Joans Andresson. On the normal inverses Gaussian stochastic volatility model[J]. Journal of Bussiness of Economics Statistics, 2001, 19: 44—52.
- [6]Harvey A C, Ruiz E, Shephard N. Multivariate stochastic variance models[J]. Review of Economic Studies, 1994, 61: 247—267.
- [7]Kim Shephard, Chib. Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models[J]. Review of Economic Studies, 1998, 65: 361—393.
- [8]Durbin J, Koopman S J. Monte Carlo maximum likelihood estimation for non-Gaussian state space models[J]. Biometrika, 1997, 84: 669—684.
- [9]Ruiz E. Quasi-maximum likelihood estimation of stochastic volatility models[J]. Journal of Econometrics, 1994, 63: 289—306.
- [10]Rockafeller T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. Journal of Risk, 2000, 2(3): 21—24.
- [11]柯珂,张世英. ARCH 模型的诊断分析[J]. 管理科学学报, 2001, 4(2): 12—18.
KE Ke, ZHANG Shi-ying. Diagnose analysis in ARCH models[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(2): 12—18. (in Chinese)
- [12]何信,张世英,孟利锋. 动态一致性风险度量[J]. 系统工程理论方法应用, 2003, 12(3): 243—247.
HE Xin, ZHANG Shi-ying, MENG Li-feng. Dynamic coherent risk measures[J]. Systems Engineering—Theory, Methodology, Applications, 2003, 12(3): 243—247. (in Chinese)

Comparison of VaR based on GARCH and SV models

YU Su-hong, ZHANG Shi-ying, SONG Jun

School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract : This paper reviews the concept and the calculating method of Value at Risk (*VaR*) and points out the importance of predicting the volatility of market factor for calculating *VaR*. Compared with GARCH models, SV model is superior to describe the characters of financial market. A SV model is used to define the volatility which is needed to estimate *VaR*. The experimental research manifest that the SV model predicts the volatility of market return perfectly and the following *VaR* reflect the risk level of Chinese stock market properly.

Key words : *VaR*; market factor; GARCH model; SV model

(上接第55页)

while how to select appropriate benchmark is the bottleneck of this method. Aiming at this problem, this paper discusses how to collect and analyze the characteristics of supply chains with density-based clustering mining technology, so that it can provide decision support to compare and improve supply chain performance with benchmarking. In the approach, firstly, the index values of supply chain performance are standardized. Then, they are classified by density-based clustering technology (improved *K*-average clustering method). After the analysis of each cluster, the problem of benchmark selection is solved. Finally, a numerical example is given to illustrate the proposed approach.

Key words : SCM; performance assessment; benchmarking; density-based clustering method; data mining