

需求不确定下的补偿策略理论模型

何勇¹, 何炬², 杨德礼¹

(1. 大连理工大学管理学院, 大连 116024;

2. 复旦大学管理学院, 复旦大学现代物流管理研究中心, 上海 200437)

摘要: 在需求不确定的前提条件下就供应商对销售商的补偿策略进行了深入研究,建立了包含风险偏好的补偿策略理论模型. 在该理论模型的基础上,运用数值分析的手段分析了风险偏好对供应链中参与者决策行为的影响,为供应链决策者制定合理的决策提供了科学依据. 最后,结合我国国情,重点讨论如何在我国正确实施补偿策略.

关键词: 供应链管理; 补偿策略; 需求不确定性; 风险偏好

中图分类号: F273.7

文献标识码: A

文章编号: 1007 - 9807(2004)06 - 0030 - 07

0 引言

补偿策略 (return policy) 是目前最为常用的一种供应链协作机制. 补偿策略是供应商用一个合理的价格从销售商那里买回产品销售期结束时没有卖出的产品,从而刺激销售商增加定购量,扩大产品的销售量. 补偿策略大量用于对时间性要求较严的时尚产品,如书籍、杂志、报纸、音像制品、计算机软件和硬件、贺卡以及医药产品等^[1].

近年来,有关补偿策略的研究文章呈增长趋势^[1~6],但有关需求不确定性对销售商的最优订购量决策的影响,及供应商提供怎样的补偿策略来应对其影响的研究则较少. 而且关于补偿策略理论的研究大多建立在风险中性的基础上,很少研究供应商和销售商的风险偏好对补偿策略的影响^[6]. 然而在现实生活中,风险偏好对决策者的决定往往产生重要的影响. 例如, Patsuris^[7]发现尽管全球 2001 年经济并不是很景气,可许多销售商继续增加库存,甚至定购更多不必要的产品数量. 本文基于这一形势,把供应商和销售的风险偏好引入补偿策略理论中,建立含有风险偏好的供应商对销售商的补偿策略理论模型,并在需求不确定

下对补偿策略进行详细的分析. 最后,根据我国国情,具体分析如何在我国的企业中实施补偿策略.

1 定义和说明

本文讨论的是较长交货提前期和较短销售季节的时令产品,假设产品的残值为零. 为分析方便,符号说明如下: p 为零售价格, w 为供应商出售给销售商的批发价格, c 为单位产品生产成本, Q 为产品订购量或生产量, r 为供应商提供给销售商的补偿价格, c_e 为销售商超量订购的成本, c_u 为销售商的缺货损失费, x 为在产品销售价格为 p 下的随机需求, $f(x)$ 为需求的概率密度函数 (pdf), $F(x)$ 为需求的分布函数 (cdf), k_m 为供应商 (或生产商) 的风险偏好参数, k_r 为销售商的风险偏好参数, m 为供应商 (或生产商) 的实际收益, r 为销售商的实际收益, U_m 为供应商 (或生产商) 的期望收益, U_r 为销售商的期望收益.

供应商和销售商的期望收益和实际收益存在着如下关系^[8,9]:

$$U_m = E(m) - k_m V r(m) \quad (1)$$

收稿日期: 2003 - 05 - 15; 修订日期: 2004 - 05 - 25.
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目 (70031020).
作者简介: 何勇 (1975 -), 男, 安徽人, 博士生.

$$U_r = E(r) - k_r V(r) \quad (2)$$

$$U_m, U_r \geq 0$$

2 完全补偿策略理论模型

利用“报童问题”模型框架说明问题^[10,11], 在供应商给定批发价格和补偿价格前提下, 当产品的市场需求为 x 时, 销售商有着以下的实际营业额和成本函数:

销售商的实际营业额

$$R = p \min(x, Q) \quad (3)$$

在产品销售季节末, 销售商从供应商处得到的总的补偿性回报

$$R_r = r [Q - \min(x, Q)] \quad (4)$$

销售商以批发价格购买供应商的产品总成本

$$W = wQ \quad (5)$$

根据产品的市场行为, 销售商的产品订购量小于市场需求量时, 存在缺货损失状况, 销售商总的缺货损失费

$$C_u = c_u [x - \min(x, Q)] \quad (6)$$

在产品销售期固定的情形下, 销售商的总库存成本

$$C_e = c_e [Q - \min(x, Q)] \quad (7)$$

根据式(3) ~ (7), 产品市场需求为 x 下销售商的实际收益为

$$\begin{aligned} r &= R + R_r - W - C_u - C_e = \\ &= (p + c_e - r + c_u) \min(x, Q) - \\ &= (w + c_e - r) Q - c_u x \end{aligned} \quad (8)$$

对于供应商来说, 产品的生产成本

$$C = cQ \quad (9)$$

供应商提供给销售商的补偿带来的是供应商的额外成本, 供应商的实际营业收入为产品批发的总收入. 因此, 依据同样的分析, 得到供应商的实际收益

$$\begin{aligned} m &= W - C - R_r = \\ &= (w - c - r) Q + r \min(x, Q) \end{aligned} \quad (10)$$

给定了研究的问题集, 根据 LF 博弈 (leader-follower game) 理论考察供应商和销售商之间的相互作用, 供应商是领导者, 销售商是追随者, 供应商给定一个批发价格和补偿价格, 销售商据此确定它的最佳产品订购量, 依据该反应函数,

供应商将最终确立最优的批发价格和补偿价格. 这样的假定是合理和普遍的^[2,3,12], 因为相比销售商, 供应商存在市场决定力的优势. 同时认为产品市场是开放的, 有关产品市场销售价格、需求分布和库存成本参数等信息是对称的. 所以, 作为领导者, 供应商有所有必需的信息推论销售商的产品订购量相对于批发价格和补偿价格的反应函数, 并据此制定最佳决策. 本文假设供应商和销售商是完全理性的, 即它们是自利主义者, 两者在观察到实际需求之前是根据极大化期望收益的原则来进行决策的^[1,3].

定理 1 假设产品的市场需求分布是正态分布, 需求的分布函数为 (μ, σ) . 则产品需求 x 的均值为

$$E(x) = \mu + \sigma [f(z) - f(-z)] + \mu [F(z) + F(-z)] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= (2\sigma^2 - \mu^2) f(z) - \\ &= (2\sigma^2 + \mu^2) f(-z) + \\ &= (\mu^2 + 2\sigma^2) [F(z) + F(-z)] \end{aligned} \quad (12)$$

其中: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$; $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

定理 1 的证明比较容易, 仅要进行参数变换, 即令 $x = \mu + \sigma z$, 经过简单的积分计算就可得出定理 1 的结论. 为了使得理论模型的均衡解更加清晰化, 在定理 1 的基础上进行深入推导, 可以获得以下理论.

定理 2 假设参变量 $A = \min(x, Q)$, 则 A 和 A^2 的均值为

$$E(A) = Q/2 + \sigma [f(z) - f(-z)] + \mu [F(z) + F(-z)] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} E(A^2) &= \frac{Q^2}{2} + (2\sigma^2 - \mu^2) f(z) - \\ &= (\mu^2 + 2\sigma^2) f(-z) + \\ &= (\mu^2 + 2\sigma^2) [F(z) + F(-z)] \end{aligned} \quad (14)$$

前面已经定义了期望收益和实际收益之间的内在关系, 并且在理论模型中主要应用到供应商和销售商的期望利益, 须按照定义的内在关系将实际收益转换为带偏好的期望收益. 根据式(8)和(10), 可以得到

$$\begin{aligned}
 U_r = E(r) - k_r V(r) = & \\
 (p + c_e - r + c_u) E(A) - & \\
 (w + c_e - r) Q - c_u E(x) - & \\
 k_r (p + c_e - r + c_u)^2 V(A) - & \\
 k_r c_u^2 V(x) & \quad (15)
 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 U_m = E(m) - k_m V(m) = & \\
 (w - c - r) Q + rE(A) - k_m r^2 V(A) & \quad (16)
 \end{aligned}$$

比较供应商和销售商带偏好的期望收益函数,能够发现销售商的期望收益函数较为复杂.根据前述分析,首先必须确定销售商的反应函数.本文利用极大化期望收益原则来确立销售商的均衡反应函数.

定理 3 在上述的假设和定义的基础上,可以得到销售商的订购量、产品批发价格、产品补偿价格以及成本参数和需求分布参数间的反应函数为

$$\begin{aligned}
 \{ (p + c_e - r + c_u) - 2k_r(p + c_e - r + c_u)^2 \cdot & \\
 [Q - E(A)] [1 - 2F(\cdot)] = 2(w + c_e - r) & \quad (17)
 \end{aligned}$$

定理 3 描述了销售商的均衡订购量与产品批发价格和补偿价格之间的内在均衡关联性,供应商是基于销售商的均衡反应函数,并按照极大化供应商的期望收益的原则获得批发价格和补偿价格的均衡值.

3 完全补偿策略分析

销售商的均衡反应函数较为复杂,且没有显形的函数表达式及解,为了能对理论模型的结果进行具体的研究,本节利用静态分析和数值分析的方法对均衡解进行讨论.假设产品的生产成本 $c = 1$,销售商的缺货损失费和过量订购持有成本相比可以忽略, $c_e = c_u = 0$,产品的销售价格 $p = 2$,产品市场需求均值 $\mu = 100$,需求分布参数 $\sigma = 15$ 和 25,供应商和销售商的风险偏好分别为 $k_m = 0, 1$ 和 $k_r = 0, 1$.

根据假设并结合已经建立的理论模型,可以得到批发价格、补偿价格及供应商和销售商的期望收益等的均衡数值解,如表 1 所示.

表 1 具有风险偏好的供应商对销售商的补偿策略理论模型的均衡数值解
Table 1 Equilibrium values for supplier's risk preference and return policy for a retailer

需求分布参数	供应商风险偏好 k_m	均衡值	销售商风险偏好	
			$k_r = 0$	$k_r = 1$
15	0	w^*	2 -	2 -
		r^*	1.98	1.983
		Q^*	100	100
		U_r^*	0.90	0.88
		U_m^*	87.1	87.1
25	0	w^*	2 -	2 -
		r^*	1.98	1.985
		Q^*	100	100
		U_r^*	0.80	0.80
		U_m^*	79.3	79.2
15	1	w^*	1.93	1.99
		r^*	0.52	1.84
		Q^*	75.2	70.2
		U_r^*	5.0	0.65
		U_m^*	68.7	64.7
25	1	w^*	1.84	1.97
		r^*	0.18	1.72
		Q^*	66.4	46.1
		U_r^*	9.0	1.0
		U_m^*	54.8	38.1

为极小量, 2 - 表示实验解. 本表中 $\sigma = 0.01$.

依据表 1 的均衡数值解的比较,可以得到 结论:

1) 由表1的第1和6行,在供应商为风险中性且需求分布参数较小的状况下,无论销售商是否具有风险偏好,产品的批发价格为实验解2,但当需求分布参数变大时,产品的均衡批发价格就会为一小于销售价格的值。对相同参数值和销售商风险偏好且不同供应商风险偏好的均衡批发价格比较发现,风险厌恶的供应商提供的均衡价格比风险中性的供应商提供的均衡批发价格要低。但对相同参数值和供应商风险偏好且销售商不同风险偏好的均衡批发价格比较发现,供应商提供给风险厌恶的销售商的均衡价格比供应商提供给风险中性的销售商的均衡批发价格要高。产生其效果的主要原因是风险偏好程度,相比之下,风险厌恶的供应商承担风险的愿望要低,因此风险厌恶的供应商以低批发价格的保守方法来赢取市场和产品订购量。但对表中风险厌恶的销售商,供应商以高的批发价格的激励手法诱使风险厌恶的销售商勇敢面对市场。

2) 表1的均衡数据明显反映了均衡补偿价格小于批发价格,这也是市场行为的真实写照。比较表1的第2和7行可知,在供应商为风险中性的前提下,无论销售商的风险偏好如何,均衡补偿价格随着需求分布参数的增大而增加。因此,当需求分布参数增大时,供应商通过提高补偿价格来补足销售商的市场风险。但表中第12和17行比较,却发现风险厌恶的供应商提供的补偿价格随着需求分布参数的增大而降低,导致其结果的实质是如果需求分布参数增加,说明产品的市场风险加大,供应商和销售商驾驭市场的能力就减弱,风险厌恶的供应商不愿意冒险的心态产生的结果必然是转嫁风险,唯一的方法就是降低补偿价格。不同偏好销售商均衡补偿价格的横向比较的结果,则是供应商提供给风险厌恶的销售商的补偿价格相比要高一些,产生这一结论的原因与上一结论的说明相同。

3) 表1的数据说明如果供应商是风险厌恶型,销售商的均衡订购量随着需求分布参数的增大而减少。因为供应商厌恶市场风险,为了减小市场风险带来的不稳定因素,供应商必然调整批发价格和补偿价格,使得销售商降低产品的订购量,这是销售商的正常反应。从横向比较,风险厌恶型销售商的均衡订购量则更低,其结论是由于

供应商和销售商对市场风险的消极态度共同产生的结果。

4) 根据表中的均衡数值解的比较分析得到的结论是:供应商的期望收益与需求分布参数及供应商的风险偏好存在着反向变化的关系,而销售商的期望收益的发展趋势则较为复杂,当供应商为风险中性,不论销售商是否风险中性或风险厌恶,销售商的期望收益随着需求分布参数的增加而减少;但在供应商为风险厌恶的情况下,不论销售商是否风险中性或风险厌恶,销售商的期望收益随着需求分布参数的增大而增加;且风险厌恶的销售商的期望收益远远小于风险中性的销售商的期望收益。如果供应商为风险中性,风险厌恶的销售商的期望收益略小于风险中性的销售商的期望收益。产生上述结果的原因是供应商或销售商对待市场风险的态度,是否愿意承担市场风险及抵御市场风险的能力决定的。

4 现阶段在我国的具体运用

脱胎于计划经济的我国工业企业,在相当长一段时期内,企业机制和管理思想都滞后于市场经济发展的要求。虽然我国一些企业具备了一定的供应链技术方法,补偿策略也得到了一定的运用,但以下这些问题的存在,阻碍了补偿策略在我国的进一步发展。

1) 市场经济体制不完善

由于我国市场经济体制建立的时间相对较短,传统计划经济的影子还根深蒂固,因此,非市场因素常常影响市场机制的正常运转。如政治、经济、法律等外界因素的影响,大大增加了市场的不确定性,导致难以制定合理的补偿策略。

2) 信用机制尚未建立起来

相对西方发达国家,我国还缺乏健全的信用环境,各种拖欠货款、隐藏努力程度等道德问题普遍存在,供应商和销售商之间缺乏信任是阻碍补偿策略实施的重要因素之一。

3) 信息不对称、信息扭曲较为严重

供应链中供应商与销售商及用户之间缺乏有效沟通,供应链协作、集成和反馈信息流不畅通,这些也是补偿策略难以得到执行的重要原因之一。尤其由于供应链中存在“牛鞭效应”,使需求信

息扭曲以放大形式向供应链的上游蔓延(方差变大),从而加大了实施补偿策略的难度^[13]。

4) 供应商和销售商的风险偏好对补偿策略的影响尤为明显

由于我国众多国有企业的特殊性,使供应链协作关系中短期行为普遍存在,企业在实施补偿策略过程中带有很强的非经济因素和个人偏好行为。

由于这些问题的存在,使补偿策略在我国的运用受到了很大阻力。针对上述这些问题导致的各种风险,供应链企业在实施补偿策略时,应根据产生风险的原因和特征采取不同的防范措施。对于前三个外生风险,企业可以通过建立战略合作伙伴关系,提高信息透明度和共享性,优化合同模式,建立监督机制,采用柔性化设计等措施来解决。

有别于西方资本主义企业的目标是追求自身利益最大化,社会主义的重要特征之一就是追求社会整体福利最大化。由于人们的风险偏好不同,同一风险收益的效用值以及由此体现的社会福利水平是不同的,因此,供应链风险由谁承担要视供应商和销售商的风险偏好而定。

现代委托代理理论认为,一个风险在一个避险者和一个冒险者或风险中性者之间分担时,让避险者获取一份固定收入,冒险者或风险中性者承担全部风险是一种帕雷托最优^[14]。而供应链中供应商和销售商的关系可以视为委托代理问题,供应商是委托人,销售商是代理人^[15]。由于现实中的委托代理关系有对等和非对等信息的不同情况^[16],因此,本文将探讨以下两种情况的解决方案。

1) 供应商拥有销售商努力程度的完全信息。

如果供应商属于风险中性,销售商属于风险厌恶,则供应商可以向销售商提供一个较高的批发价格和一个较高的补偿价格,从而减小销售商承担的风险,保证销售商有一个较为稳定的收入,并使供应商享受大部分的剩余索取和承担大部分的风险。如果销售商没有达到规定的努力程度,供应商可以给予其一定的惩罚。因此,这个稳定的收入等于在帕累托最优情况下,销售商的努力得到的保底值。

考虑到极限情况,当销售商具有无限的风险厌恶度时,为了吸引销售商加入,供应商可以提供略低于市场价格的批发价格,并且补偿价格等于批发价格。

如果供应商属于风险厌恶,销售商属于风险中性,则供应商向销售商提供一个较低的批发价格和一个较低的补偿价格,这样可以使供应商完全可以拿到一个较为稳定的收入,让销售商承担大部分的剩余索取和市场风险。

当供应商具有无限的风险厌恶度时,为了转嫁所有的风险,供应商将会提供一个略高于生产成本的批发价格,并且补偿价格等于产品残值。

如果供应商和销售商都是风险中性的,则把 $k_r = k_m = 0$ 代入到定理 3 中,很容易求出风险中性情况下的均衡订购量 $Q^* = \mu + F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{K}{D}\right)$, 其中, $D = p + c_e - r + c_u$, $K = w + c_e - r$ 。结合式(15)和(16),将得到补偿价格水平下的均衡批发价格、供应商和销售商的均衡期望收益等值。

2) 供应商和销售商之间存在信息不对称,即供应商只能观察到销售商的销售结果,无法观察到销售商的努力程度

这种情况分析起来较为复杂,根据拉丰和赫蒂摩^[17]的激励理论得知,当销售商是风险中性的时候,尽管努力不可观测到,但通过对销售商提供补偿策略的激励机制,最优的努力仍然可以实现,即仍然可以实现社会性帕累托最优。

但如果销售商是风险厌恶的,则由道德风险带来的努力水平提供的无效性就显露出来,此时,补偿策略将会失效。这一点得到了 Gan^[18]等人的证实。这种情况下,通过签署利润共享协议(revenue-sharing contract)来实行风险共担被证明是最为有效的协作机制。

5 结束语

由于供应商和销售商在供应链中分属不同的经济实体,因而,如果缺乏有效的协作机制,供应商和销售商之间必然存在冲突,从而导致供应链中总体利润之和下降的局面发生。但从本文的研究结果来看,供应商可以通过综合考虑生产成本和零售价格,以及自己和销售商的风险偏好来确定合理的批发价格和补偿价格与销售商进行合作,可以实现供应链总体利润最大化,达到双赢的

理想局面。但如果存在信息不对称情况且销售商为风险厌恶时,纯粹的补偿策略将会失去协作作用。因此,利用含有风险偏好的补偿策略理论模型,可以较为合理地分析在需求不确定的情况下

供应商和销售商的市场行为,从而为决策者,尤其为我国企业的决策者提供了切实可行的理论工具,来科学地选择和设计补偿策略,实现社会性帕累托最优。

参考文献:

- [1] Pasternack B A. Optimal pricing and return policies for perishable commodities[J]. *Marketing Science*, 1985, 4(2): 166—176.
- [2] Kandel E. The right to return[J]. *Journal of Law and Economics*, 1996, 39: 329—356.
- [3] Emmons H, Gilbert S M. Returns policies in pricing and inventory decisions for catalogue goods[J]. *Management Science*, 1998, 44(2): 276—283.
- [4] Genues J, Zeng A Z. Impacts of inventory shortage policies on transportation requirements in two stage distribution systems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 129: 299—310.
- [5] Mantrala M K, Raman K. Demand uncertainty and supplier's return policies for a multi-store style-good retailer[J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 115: 270—284.
- [6] Lau H S, Lau A H L. Manufacturer's pricing strategy and return policy for a single-period commodity[J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 116: 291—304.
- [7] Patsuris P. Christmas sales: The worst growth in 33 years[ED/OL]. <http://www.forbes.com/2001/10/30/1030retail.html>. 2001-10-30.
- [8] Markowitz H. *Portfolio Selection*[M]. New York: John Wiley, 1959.
- [9] Farrar D E. *The Investment Decision Under Uncertainty*[M]. Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1962.
- [10] Silver E, Pyke D, Peterson R. *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1998.
- [11] Nahmias S. *Production and Operations Analysis*[M]. New York: McGraw-Hill, 1993.
- [12] Padmanabhan V, Png I P L. Manufacturer's returns policies and retail competition[J]. *Marketing Science*, 1997, 16(1): 81—94.
- [13] 达庆利, 张 钦, 沈厚才. 供应链中牛鞭效应问题研究[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(3): 86—93.
Da Qingli, Zhang Qin, Shen Houcai. Study on bullwhip effect in supply chain[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(3): 86—93. (in Chinese)
- [14] 熊胜绪. 论企业家的风险偏好、利益激励和市场约束[J]. *中南财经大学学报*, 1997, (5): 39—43.
Xiong Shengxu. Discussion on entrepreneur's risk preference, benefits incentives, and market restraint[J]. *Journal of Zhongnan University of Finance and Economics*, 1997, (5): 39—43. (in Chinese)
- [15] 杨治宇, 马士华. 供应链企业间的委托代理问题研究[J]. *计算机集成制造系统*, 2001, 7(1): 19—22.
Yang Zhiyu, Ma Shihua. Study on the principal-agent problem in supply chain enterprises[J]. *CIMS*, 2001, 7(1): 19—22. (in Chinese)
- [16] 杨 雷, 席酉民. 委托-代理关系的决策模型[J]. *决策与决策支持系统*, 1995, 5(2): 87—91.
Yang Lei, Xi Youmin. The decision-making model about the principal-agent relationship[J]. *Journal of Decision Making and Decision Support Systems*, 1995, 5(2): 87—91. (in Chinese)
- [17] 让-雅克·拉丰, 大卫·马赫蒂摩. 激励理论: 委托-代理模型[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2002.
Laffont J J, Martimort D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*[M]. Beijing: China People's University Press, 2002. (in Chinese)
- [18] Gan X H, Sethi S, Yan H. Supply Chain Coordination with a Risk-averse Retailer[R]. University of Texas, 2003.

Theoretical model of return policy under demand uncertainty

HE Yong¹, HE Ju², YANG De-li¹

1. Management School, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Management School, Modern Logistics Management, Fudan University, Shanghai 200437, China

Abstract : This paper does some research on the return policy under demand uncertainty, models the theory of return policy with risk preference of the retailer and supplier. Based on this theoretical model, a numerical example is employed to analyze the influence of risk preference on decision of the participants in a supply chain. From this paper the decision-maker of the supply chain can make a scientific decision by using this model. At last, according to the situation of China, the problem how Chinese corporations use the return policy properly is discussed.

Key words : supply chain management; return policy; demand uncertainty; risk preference

(上接第 29 页)

Pricing of Asian options with time-dependent parameters

ZHAN Hui-ming, CHENG Qian-sheng

School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract : This paper provides six analytical price formulas and one put-call parity for continuous geometric-average European Asian options using risk-neutral valuation and properties of stochastic integral when the price of underlying asset follows the model with time-dependent parameters, i. e. time-dependent riskless interest rate $r(t)$, and risk asset has time-dependent expected rate of return $\mu(t)$, volatility $\sigma(t)$ and pays time-dependent dividend yield $g(t)$. By adjusting the form of strike price, approximated formulas for fixed-strike continuous arithmetic-average Asian options are also obtained.

Key words : Asian options; risk-neutral valuation; put-call parity; geometric-average; arithmetic-average