

具有独立子系统的 C^2GS^2 -ISS 模型及应用研究

段永瑞¹, 田 澎², 张卫平³

(1. 同济大学经济管理学院, 上海 200092; 2. 上海交通大学管理学院, 上海 200052;
3. 上海交通大学信息存储研究中心, 上海 200030)

摘要: 现有的用来评价具有多个独立子系统的复杂系统相对有效性的 YMK-DEA 模型假设不存在规模收益, 且不能评价系统的纯技术有效性. 在假设存在规模收益的条件下, 建立了评价系统纯技术有效性的 C^2GS^2 -ISS 模型, 将效率分解为纯技术效率和规模效率, 从而可以找到系统行为低效的根本原因. 最后用该模型对我国制造业发展进行了评价.

关键词: 独立子系统; 纯技术有效; YMK-DEA 模型; C^2GS^2 -ISS 模型

中图分类号: N945.16 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2005)02-0031-07

0 引 言

对系统进行综合评价一直是人们研究和关注的热点, 评价的“质量”直接影响到决策的“质量”^[1]. 常用的综合评价方法有专家评价法、经济分析法、运筹学和其它数学方法等^[2].

数据包络分析(DEA)是 Charnes 等^[3]提出的, 属于运筹学方法的一种, 用来评价部门间相对有效性的一种非参数方法. 经过 20 多年的发展, 这一理论已经比较成熟, 先后有 C^2GS^2 ^[4]、 C^2W ^[5]、 C^2WH ^[6]、 α DEA 模型^[7]以及不确定性 DEA 模型^[8]、动态 DEA 模型^[9]和逆 DEA 模型^[10]、投入产出都可以变化的 DEA 模型^[11]相继出现, 出版了专著^[12, 13]. 但是现有的 DEA 模型在评价具有多个子系统的复杂系统的相对有效性时结果往往并不令人满意, 主要原因是在对复杂系统的有效性进行评价时, 传统的 DEA 方法是各个子系统看作一个整体来评价. 这样得到的结果会过高地估计其效率, 并不能真正反映系统的效率. 事实上, 一些系统虽然整体效率很高, 但是其中一些子系统并不是最优的. 同时, 一些系统虽然其整体效率不

是最高, 但是其中一些子系统却可能比那些整体效率较高的系统的相应子系统更有效. 而且这种方法不利于对子系统进行比较.

文献[14]中, 在假定不存在规模收益的条件下, 给出了评价具有多个子系统的复杂系统同时为纯技术有效和规模有效的 YMK-DEA 模型. 从生产理论的角度看, 用 C^2R 模型进行相对有效性评价时, 涉及到的生产可能集是一个多面凸锥, 它满足生产可能集公理体系的凸性、锥性、无效性和最小性假设, 但有时人们会发现用凸锥描述生产可能集是缺乏准确性的. 实际上, C^2R 模型并不能评价决策单元的纯技术有效性, 而 C^2GS^2 模型是可以用来评价部门间的纯技术有效性的, 它涉及的生产可能集是一个多面凸集, 由生产可能集公理体系的凸性、无效性和最小性假设所决定. 从另一个角度看, 在 C^2R 模型中假定不存在规模收益, 而在 C^2GS^2 模型中假定规模收益存在, 许多经济问题都存在规模收益.

本文将给出假设存在规模收益时评价具有独立子系统的复杂系统纯技术有效性的 C^2GS^2 -ISS 模型, 并将它应用在我国不同省市制造业发展的

收稿日期: 2002-12-27; 修订日期: 2004-08-02.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70271040).

作者简介: 段永瑞(1975—), 女, 山西太原人, 博士, 讲师.

评价中.

1 具有 P 个独立子系统(P- ISS) 的 C²GS²- ISS 模型

考虑 n 个复杂系统, 每个系统具有 P 个独立子系统, 将每一个复杂系统看作一个 DMU, 设 DMU _{j} 的第 i 个子系统的输入和输出分别是 $X_j^{(i)}$ 、 $Y_j^{(i)}$ ($i = 1, \dots, P, j = 1, \dots, n$), $X_j^{(i)} \in E_{m_i}^+$, $Y_j^{(i)} \in E_{s_i}^+$, $\sum_{i=1}^P m_i = m$, $\sum_{i=1}^P s_i = s$, $X_j = ((X_j^{(1)})^T, (X_j^{(2)})^T, \dots, (X_j^{(P)})^T)^T$, $Y_j = ((Y_j^{(1)})^T, (Y_j^{(2)})^T, \dots, (Y_j^{(P)})^T)^T$ 为 DMU _{j} 的输入和输出.

令 $\bar{X}_{ij} = (0, \dots, (X_j^{(i)})^T, \dots, 0)^T$, $\bar{Y}_{ij} = (0, \dots, (Y_j^{(i)})^T, \dots, 0)^T$, 即取 DMU _{j} 的第 i 个子系统的输入和输出, 其它的输入和输出都取 0.

引入本文建立的 C²GS²- ISS 模型

$$\begin{cases} \min & \frac{u^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i}{v^T X_0} = V_1 \\ \text{s. t.} & v^T \bar{X}_{ij} - u^T \bar{Y}_{ij} - \mu_i \leq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, P, j = 1, 2, \dots, n \\ & v \geq 0, u \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

这里, (X_0, Y_0) 为第 j_0 个决策单元的输入和输出, 对上述问题使用 Charnes-Cooper 变换, 则化为等价的凸规划问题

$$\begin{cases} \min & \mu^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i = V_2 \\ \text{s. t.} & v^T \bar{X}_{ij} - \mu^T \bar{Y}_{ij} - \mu_i \leq 0 \\ & v^T X_0 = 1 \\ & i = 1, 2, \dots, P; j = 1, 2, \dots, n \\ & 0, \mu \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

定理 1 规划(1)和规划(2)在下述意义下是等价的:

(i) 若 v^0, u^0, μ_i^0 是(1)的最优解, 则 $v^0 = t^0 v^0, \mu^0 = t^0 u^0, \mu_i^0 = t^0 \mu_i^0$ 是(2)的最优解, 且最优值相等;

(ii) 若 v_0, μ_0, μ_i^0 是(2)的最优解, 则 v_0, μ_0, μ_i^0 也是(1)的最优解, 且最优值相等.

根据对偶理论知规划(2)的对偶规划为

$$\begin{cases} \min & = V_3 \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^P X_{ij} - X_0 \leq 0 \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^P Y_{ij} - Y_0 \leq 0 \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^P \mu_{ij} = 1 \\ & i = 1, 2, \dots, P, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

定理 2 规划(2)和(3)具有相同的最优解, 且 $V_2 = V_3 = 1$.

定义 1 若(2)存在最优解 $v^0, \mu^0, \mu_i^0, i = 1, 2, \dots, P$, 满足 $V_2 = 1$, 则称 DMU _{j_0} 为弱 DEA 有效的.

定义 2 若(2)存在最优解 $v^0, \mu^0, \mu_i^0, i = 1, 2, \dots, P$, 满足 $V_2 = 1$, 且 $v^0 > 0, \mu^0 > 0$, 则称 DMU _{j_0} 为 DEA 有效的.

定义 3 称 $S = V_{\text{YMK}} / V_{C^2GS^2\text{-ISS}}$ 为 DMU _{j_0} 的规模效率, 其中, V_{YMK} 表示决策单元用文献[14]中提出的 YMK-DEA 模型计算得到的效率, 而 $V_{C^2GS^2\text{-ISS}}$ 表示用本文提出的 C²GS²-ISS 模型得到的效率.

在给出定理 3 之前, 先给出单系统的 C²GS² 模型

$$\begin{cases} \min & \frac{u^T Y_0 + \mu^0}{v^T X_0} = V_4 \\ \text{s. t.} & v^T X_j - u^T Y_j - \mu^0 \leq 0 \\ & j = 1, 2, \dots, n \\ & v \geq 0, \mu \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

定理 3 若 $v, u, \mu_i, i = 1, 2, \dots, P$ 为(1)的可行解, 则 v, u, μ_i 是(4)的可行解, 且目标函数数值相等.

由定理 3, 有下面的结论.

定理 4 $V_1 = V_4$, 因而若 DMU _{j_0} 关于模型(1)是弱有效的, 它关于模型(4)也是弱有效的; 若它关于模型(1)是有效的, 它关于模型(4)也是有效的.

下面给出系统 C²GS²-ISS 有效与子系统 C²GS² 有效之间的关系.

考虑关于子系统 C²GS² 模型

$$\begin{cases} \min & \frac{u_i^T Y_{j_0}^{(i)} + \mu_i}{v_i^T X_{j_0}^{(i)}} = V_{1 \cdot i} \\ \text{s. t.} & v_i^T X_j^{(i)} - u_i^T Y_j^{(i)} - \mu_i \leq 0 \\ & u_i \geq 0, v_i \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, P; j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

式中, $X_j^{(i)}, Y_j^{(i)}$ 为第 j 个决策单元的第 i 个子系统的输入和输出.

定理 5 $V_1 = \prod_{i=1}^m \prod_{p=1}^P \{V_{1-i}\}$

定理 6 (i) DMU_{j₀} 为 C²GS²-ISS 弱有效, 当且仅当它至少有一个子系统为 C²GS² 弱有效的;

(ii) DMU_{j₀} 为 C²GS²-ISS 有效, 当且仅当它的每一个子系统都是 C²GS² 有效的.

由文献[13]中定理 8.4, 容易得到下面的结论.

定理 7 设 $u^*, v^*, \mu_i^*, i = 1, 2, \dots, P$ 为模型(1)的最优解, 则有

(i) 若 $\mu_i^* > 0, i = 1, 2, \dots, P$, 则 DMU_{j₀} 为规模收益递增;

(ii) 若 $\mu_i^* < 0, i = 1, 2, \dots, P$, 则 DMU_{j₀} 为规模收益递减;

(iii) 若 $\mu_i^* = 0, i = 1, 2, \dots, P$, 则 DMU_{j₀} 为规模收益不变.

2 我国不同省市制造业发展评价

在当代, 先进强大的制造业仍然是衡量一个国家综合实力和国际竞争力的核心. 即使是已经进入后工业化社会的美国, 制造业仍然是国民经济的支柱产业和国家综合实力的重要体现. 我国正处在向工业化迈进的发展阶段, 1997 年中国人均国民生产总值为 6000 元人民币, 只相当于 730 美元, 2000 年中国人均国民生产总值为 800 美元. 据初步预测, 到 2020 年中国 GDP 总量为 32.4 万亿元, 人均 2.2 万元, 也只相当于 2650 美元, 尚未达到中等发达国家水平^[15]. 因此, 与美国、日本等

经济发达国家的制造业已经呈现衰退的情况比较, 中国的制造业仍然有广阔的发展空间. 我国是一个发展中大国, 生产力发展很不平衡, 既拥有一部分高科技产业, 更多的则是落后的农业和庞大的传统制造业, 所以在重视发展高新技术产业的同时也要重视对传统产业的技术改造. 本节对 1997 年我国不同省市制造业的经济运行效率进行评价.

选择制造业中的四个行业, 即食品制造业、普通机械制造业、服装及纺织业、电子及通信设备制造业. 被评价的我国 30 个省(市)自治区 可以看成是同类型的决策单元, 每一个省市的制造业看作是一个复杂系统, 每一个省市的不同行业则看作是这个复杂系统的不同子系统, 它们的运营过程是将一定量的投入转化为产出, 因此系统的管理效率可以通过在一定时间内运营过程中消耗的投入资源的量和获得的产出的量表现出来. 本文选择的各子系统的投入产出指标分别为:

投入指标 职工总数(万人), 固定资产投资总额(亿元);

产出指标 工业总产值(亿元).

数据来自 1998 年《中国工业经济统计年鉴》^[16].

应用单系统 C²R 模型及 C²GS² 模型, 并将每个省的制造业看作是具有 8 个投入、4 个产出的系统, 评价结果如表 1 所示.

表 1 C²R 模型及 C²GS² 模型计算结果

Table 1 The computing results of C²R and C²GS² model

DMU	s				μ	DMU	s				μ
北京	1.000	1.000	1.000	1.000	0	河南	1.000	1.000	1.000	1.000	0
天津	1.000	1.000	1.000	1.000	0	湖北	1.000	1.000	1.000	1.000	0
河北	0.996	1.000	0.996	0.996	-	湖南	0.644	0.650	0.991	0.991	-
山西	0.671	0.676	0.993	0.993	+	广东	1.000	1.000	1.000	1.000	0
内蒙古	0.863	0.902	0.957	0.957	-	广西	0.903	1.000	0.903	0.903	-
辽宁	0.883	0.884	0.999	0.999	+	海南	1.000	1.000	1.000	1.000	0
吉林	0.469	0.469	1.000	1.000	0	重庆	0.934	1.000	0.934	0.934	-
黑龙江	1.000	1.000	1.000	1.000	0	四川	1.000	1.000	1.000	1.000	0
上海	1.000	1.000	1.000	1.000	0	贵州	0.701	1.000	0.701	0.701	+
江苏	1.000	1.000	1.000	1.000	0	云南	0.654	0.763	0.857	0.857	+
浙江	1.000	1.000	1.000	1.000	0	陕西	1.000	1.000	1.000	1.000	0
安徽	1.000	1.000	1.000	1.000	0	甘肃	0.480	0.693	0.693	0.693	+
福建	1.000	1.000	1.000	1.000	0	青海	1.000	1.000	1.000	1.000	0
江西	1.000	1.000	1.000	1.000	0	宁夏	1.000	1.000	1.000	1.000	0
山东	1.000	1.000	1.000	1.000	0	新疆	1.000	1.000	1.000	1.000	0

由于西藏自治区数据不全, 故没有选择.

其中： θ_i 表示应用 C^2R 模型得到的技术效率； θ_i^* 表示应用 C^2GS^2 模型得到的纯技术效率； s_i^- / θ_i 表示规模效率； μ 值为“+”表示 $\mu > 0$ ，为“-”表示 $\mu < 0$ ，为“0”表示 $\mu = 0$ 。

应用 C^2GS^2 -ISS 模型及 YMK-DEA 模型，并将每个省的制造业看作具有 4 个子系统的复杂系统，计算结果如表 2 所示。

从表 1 的计算结果可以看出，如果将制造业看作是具有 12 个投入产出指标的简单生产过程，在 30 个省市中有 19 个同时为规模有效和纯技术有效的，这样的结果显然没有太大的意义。而应用具有独立子系统的模型，没有任何省市同时为纯技术有效和规模有效的，但是有 8 个省市为弱有效的，这些省市基本都在东部或沿海地区。

表 2 应用具有 4 个独立子系统的 YMK-DEA 及 C^2GS^2 -ISS 模型的计算结果

Table 2 The computing results by using YMK-DEA and C^2GS^2 -ISS model with 4 independent subsystems

DMU	子系统 1			子系统 2			子系统 3			子系统 4			总体		
	1	1	μ_1	2	2	μ_2	3	3	μ_3	4	4	μ_4		μ	
北京	0.950	0.953	+	0.591	0.675	-	0.474	0.475	+	0.452	0.464	+	0.950	0.953	#
天津	1.000	1.000	0	0.903	0.993	-	0.635	0.646	-	0.773	0.785	+	1.000	1.000	#
河北	0.261	0.287	+	0.841	0.940	-	0.636	0.661	-	0.621	0.623	+	0.841	0.940	#
山西	0.113	0.142	+	0.450	0.485	+	0.324	0.465	+	0.426	0.443	+	0.450	0.485	+
内蒙古	0.234	0.336	+	0.589	0.618	+	0.486	0.523	+	0.636	0.712	+	0.636	0.712	+
辽宁	0.399	0.404	+	0.556	0.591	-	0.465	0.475	-	0.468	0.470	+	0.556	0.591	#
吉林	0.284	0.300	+	0.396	0.411	-	0.260	0.312	+	0.366	0.391	+	0.396	0.411	#
黑龙江	0.364	0.396	+	0.634	0.666	-	0.404	0.530	+	0.455	0.463	+	0.634	0.666	#
上海	0.825	0.852	-	0.752	0.840	-	0.922	0.924	+	1.000	1.000	0	1.000	1.000	#
江苏	0.616	0.618	+	0.706	0.825	-	0.949	1.000	-	1.000	1.000	0	1.000	1.000	#
浙江	0.964	0.967	+	0.827	0.977	-	1.000	1.000	0	0.854	0.858	+	1.000	1.000	#
安徽	0.349	0.365	+	1.000	1.000	0	1.000	1.000	0	1.000	1.000	0	1.000	1.000	#
福建	0.967	0.976	+	0.878	0.953	-	0.691	0.729	-	0.704	0.726	+	0.967	0.976	#
江西	0.279	0.292	+	0.678	0.731	+	1.000	1.000	0	0.432	0.450	+	1.000	1.000	#
山东	0.624	0.635	-	0.866	1.000	-	0.613	0.648	-	0.830	0.831	-	0.866	1.000	-
河南	0.303	0.322	+	0.842	0.994	-	0.453	0.462	+	0.633	0.635	+	0.842	0.994	#
湖北	0.439	0.460	+	0.780	0.849	-	0.935	0.940	-	0.630	0.632	+	0.935	0.940	#
湖南	0.224	0.244	+	0.475	0.483	+	0.417	0.455	+	0.463	0.470	+	0.475	0.483	+
广东	1.000	1.000	+	0.896	1.000	-	0.750	1.000	-	0.935	0.940	+	1.000	1.000	#
广西	0.418	0.442	+	0.599	0.648	-	0.440	0.513	+	0.547	0.561	+	0.599	0.648	#
海南	0.579	0.639	+	1.000	1.000	0	0.694	1.000	+	0.794	1.000	+	1.000	1.000	#
重庆	0.243	0.274	+	0.456	0.475	+	0.207	0.409	+	0.452	0.465	+	0.456	0.475	+
四川	0.744	0.746	+	0.492	0.500	+	0.321	0.347	+	0.514	0.520	+	0.744	0.746	+
贵州	0.210	0.228	+	0.360	0.661	+	0.367	0.633	+	0.312	0.371	+	0.367	0.633	+
云南	0.311	0.487	+	0.433	0.499	+	0.201	0.372	+	0.465	0.509	+	0.465	0.509	+
陕西	0.465	0.473	+	0.587	0.599	+	0.431	0.492	+	0.321	0.333	+	0.587	0.599	+
甘肃	0.238	0.264	+	0.527	0.565	+	0.326	0.543	+	0.384	0.433	+	0.527	0.565	+
青海	0.124	0.808	+	0.420	1.000	+	0.424	1.000	+	0.287	0.845	+	0.424	1.000	+
宁夏	0.212	1.000	+	0.472	0.757	+	0.189	1.000	+	0.609	0.667	+	0.609	1.000	+
新疆	0.347	1.000	+	0.324	0.752	+	0.294	0.796	+	0.363	0.853	+	0.363	1.000	+

其中： θ_i 表示用 C^2R 模型得到的子系统 i 的技术效率； θ_i^* 表示用 C^2GS^2 模型得到的子系统 i 的纯技术效率； s_i^- / θ_i 表示子系统 i 的规模效率； θ 表示用 YMK-DEA 模型得到的系统整体的技术效率； θ^* 表示用 C^2GS^2 -ISS 模型得到的系统整体的纯技术效率； s^- / θ 为系统整体的规模效率； μ 值为“+”表示 $\mu > 0$ (规模收益递增)，为“-”表示 $\mu < 0$ (规模收益递减)，“0”表示 $\mu = 0$ (规模收

益不变)， μ 值为“#”表示规模收益不确定； μ_i 的表示类似， $i = 1, 2, 3, 4$ 。

由表 2 的计算结果可以看出，从总体上讲有 12 个省市处于规模收益递增状态，如山西省、内蒙古自治区等；有 1 个省 (山东省) 处于规模收益递减状态；其余不确定。有 12 个省市为纯技术弱有效的，如上海、江苏等省市，即这 12 个省市都至少有一个行业是纯技术有效的。但是不存在每一

个行业都是纯技术有效的省市,如安徽省虽然其它行业的效率都比较高,食品制造业的效率却很低,仅为 0.349.

在 22 个非弱有效的省市中,有的是非技术有效的,如北京市;有的是非规模有效的,如山东省;还有的是既非规模有效又非技术有效的,如河南、湖北、湖南等省.对于既非技术有效也非规模有效的省市,应当先解决技术上的问题,然后再考虑规模上存在的问题.

比较表 1 和表 2 的结果,在表 1 中一些相对有效的省市,如青海、宁夏、新疆等在表 2 中仅为纯技术弱有效的,且在规模上存在严重的问题,这一点可以通过考察各行业的相对效率得到验证.在应用具有独立子系统的模型评价时,绝大部分省市的技术效率降低的幅度都很大,而且辽宁、黑龙江、湖南、广西、重庆、四川、甘肃、青海、宁夏、新疆等省市的纯技术效率降低的幅度也很大,同时不同省市之间各项效率的差别也变大.这就说明,应用本文建立的具有独立子系统的模型能更准确地得到不同省市制造业发展上的差距,有利于及时采取措施,而且这些结果仅仅应用文献[14]中提出的模型是得不到的.

由上面的分析结果,效率较高的省市基本都在东部或沿海地区,这些省市的制造业规模、产品

结构、技术开发能力都比中西部强.中西部地区虽然具有较好的资源优势,但由于资本、技术、管理、产品结构、市场环境等方面的相对不足,没有真正转变为产品优势.同时,由于中西部地区没有完全建立起适应市场经济的现代企业制度,管理水平不高,对市场缺乏快速的反应能力,也是导致效率低下的制约因素.

3 结束语

考虑到文献[14]中模型的局限性,本文给出了评价具有独立子系统的复杂系统纯技术有效性的 C^2GS^2 -ISS 模型,应用该模型可以将系统的效率分解为纯技术效率与规模效率,从而可以得到系统行为低效的根本原因.同时,应用本文提出的模型还可以克服单系统 C^2GS^2 模型在应用中的一些不足,如将一些具有“较劣”子系统的系统判定为相对有效的,得到了更符合实际的结果.实证分析的结果表明,我国不同省市制造业效率以及同一个省市不同行业的效率差别都比较大.东部或沿海地区效率相对较高,而中西部地区效率较低.一些省市的制造业虽然其中一些行业具有较高的效率,但同时也存在效率极低的行业.因此,加快地区之间的联动,做到优势互补,是制造业发展的趋势.

参考文献:

- [1]赵丽艳,顾基发.东西方评价方法论对比研究[J].管理科学学报,2000,3(1):87—93.
Zhao Liyan, Gu Jifa. The contrast of oriental and western evaluation methodologies[J]. Journal of Management Sciences in China, 2000, 3(1): 87—93. (in Chinese)
- [2]王宗军.综合评价的方法、问题及其研究趋势[J].管理科学学报,1998,1(1):73—79.
Wang Zongjun. On the methods, problems and research trends of comprehensive evaluation[J]. Journal of Management Sciences in China, 1998, 1(1): 73—79. (in Chinese)
- [3]Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units[J]. European Journal of Operational Research, 1978, 12: 429—444.
- [4]Charnes A, Cooper W W, Golany B, et al. Foundation of data envelopment analysis for Pareto Koopmans efficient empirical production[J]. Journal of Econometrics (Netherlands), 1985, 30: 91—107.
- [5]Charnes A, Cooper W W, Wei Q L. A Semir infinite Multi-criteria Programming Approach to Data Envelopment Analysis with Infinitely Many Decision-making Units[R]. The University of Texas at Austin, Center for Cybernetic Studies, Report CCS551, 1986.
- [6]Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, et al. Cone ratio data envelopment analysis and multiobjective programming[J]. International Journal of System Science, 1989, 20: 1099—1118.
- [7]Yu G, Wei Q L, Brockett P. A generalized data envelopment analysis model: A unification and extension of existing methods for efficiency analysis of decision-making units[J]. Annals of Operational Research, 1996, 66: 47—92.
- [8]Sunsan X L. Stochastic models and variable returns to scales in DEA[J]. European Journal of Operational Research, 1998, 104: 532—548.

[9]李金光. 评价相对效率的投入—产出型 DEA[J]. 管理科学学报, 2001, 4(2): 58—62.
 Li Jinguang. Input-and-output-oriented DEA for assessing relative efficiency[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(2): 58—62. (in Chinese)

[10]Rolf Färe, Shawna Grosskopf. Network DEA[J]. Socio-Economic Planning Science, 2000, 34: 35—49.

[11]Wei Q L. An inverse DEA model for input/outputs estimate[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 121: 151—163.

[12]魏权龄. 评价相对有效性的 DEA 方法[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1988.
 Wei Quanling. DEA Method for Evaluating Relative Efficiency[M]. Beijing: Publishing Company of Renmin University of China, 1988. (in Chinese)

[13]盛昭瀚, 朱 乔, 吴广谋. DEA 理论、方法与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
 Sheng Zhaohan, Zhu Qiao, Wu Guangmou. The Theory, Method and Application of DEA[M]. Beijing: Publishing Company of Science, 1996. (in Chinese)

[14]Yang Y S, Ma B J, Masayuki K. Efficiency measuring model for production system with k independent subsystems[J]. Journal of Operational Research Society of Japan, 2000, 43(3): 343—353.

[15]魏后凯. 中西部工业与城市发展[M]. 北京: 经济管理出版社, 2000. 1—50.
 Wei Houkai. The Industry and City Development of the Middle Part and West of China[M]. Beijing: Publishing Company of Economy and Management, 2000. 1—50. (in Chinese)

[16]中国工业经济统计年鉴[M]. 北京: 中国统计出版社, 1998.
 The Yearbook for the Stat. of Chinese Industry and Economy[M]. Beijing: The Stat Publishing Company of China, 1998. (in Chinese)

C²GS²-ISS model with independent subsystems and its application

DUAN Yong-rui¹, TIAN Peng², ZHANG Wei-ping³

1. School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. School of Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China;
3. Information Storage Research Center, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

Abstract: The existing DEA model used to evaluate the relative efficiency of system with independent subsystems assumes that there exists no returns to scale, and one can't obtain pure technique efficiency by using this model. In this paper, C²GS²-ISS model that allows decision-making units to exhibit variable returns to scale is introduced. This model can be used to evaluate the pure technique efficiency of decision-making units. Efficiency of every decision-making unit is divided into pure technique efficiency and scale efficiency, so the real reason of inefficiency is obtained. In the end, the model is applied to evaluate the manufacturing industry's development all over the country.

Key words: independent subsystem; pure technique efficiency; YMKDEA model; C²GS²-ISS model

附录: 有关定理的证明

定理 1 证明

(i) 设 v^0, u^0, μ_i^0 为 (1) 的最优解, 对于 (2) 的可行解 μ, i , 不难看出 μ, i 为 (1) 的可行解, 且由于 $v^T X_0 = 1$, 故

$$\frac{(u^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^p \mu_i^0}{(v^0)^T X_0} = \frac{\mu^T Y_0 + \sum_{i=1}^p \mu_i}{v^T X_0} = \mu^T Y_0 + \sum_{i=1}^p \mu_i$$

又考虑到 $\frac{(u^0)^T Y_0}{(v^0)^T X_0} = \mu_0^T Y_0$ 及 $v^0 = t^0 v^0 = \frac{v^0}{(v^0)^T X_0}$,

$\mu_0 = t^0 u^0 = \frac{u_0}{(v^0)^T X_0}$, $i^0 = t^0 \mu_i^0$, 为 (2) 的可行解, 因此

v^0, μ^0, i^0 为 (2) 的最优解, 且最优值

$$V_2 = (\mu^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^p i^0 = \frac{(u^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^p \mu_i^0}{(v^0)^T X_0} = V_1$$

(ii) 设 v^0, μ^0, i^0 为 (2) 的最优解, 则 v^0, μ^0, i^0 为 (1) 的可行解. 又因为对于 (1) 的任意可行解 v, u, μ_i , 不难看出 $v = tv, \mu = t\mu, i = ti$ 也是 (1) 的可行解, 这里 $t = \frac{1}{v^T X_0}$. 因而有

$$(\mu^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0 \mu_i^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i = \frac{u^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i}{v^T X_0}$$

又因为 $v^T X_0 = 1$, 故 $\frac{(\mu^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0 \mu_i^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i}{(v^0)^T X_0} = (\mu^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0$, 因此对 (1) 的任一可行解 u, v, μ_i , 均有

$$\frac{(\mu^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0 \mu_i^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i}{(v^0)^T X_0} \geq \frac{u^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i}{v^T X_0}, \text{ 即 } \mu^0, \mu_i^0 \text{ 也是 (1) 的最优解, 且最优值}$$

$$V_1 = \frac{(\mu^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0 \mu_i^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0}{(v^0)^T X_0} = (\mu^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0 = V_2 \quad [\text{证毕}]$$

定理 2 证明 令 $\mu^* = \frac{X_0}{X_0^2} \geq 0, \mu^* = (\mu_1^*, 0, \dots, 0)^T, \mu_i^* = 0$.

这里, $\mu_1^* = \min_{j \in n} \frac{\mu^* X_{1j}}{X_{1j}^{(1)}}$; $X_{1j} = ((X_j^{(1)})^T, 0, \dots, 0)^T$; $Y_{1j} = ((Y_j^{(1)})^T, 0, \dots, 0)^T$; $X_j^{(1)}, Y_j^{(1)}$ 为第 j 个 DMU 的第一个子系统的输入和输出向量; $X_j^{(1)}$ 为 $Y_j^{(1)}$ 的第一个元素. 显然 $\mu^* \geq 0, \mu_i^* = 0$, 且 $\mu^* X_0 = 1$. 考虑到 μ^* 只有第一个元素非 0, 则有

$$\mu^* X_{ij} - \mu_i^* Y_{ij} - \mu_i^* = \begin{cases} \mu^* X_{1j} - \mu_1^* Y_{1j}^{(1)} & 0, \quad i = 1 \\ \mu^* X_{ij} > 0, & i = 2, \dots, P \end{cases}$$

成立, 因而 μ^*, μ_i^* 为 (2) 的可行解.

对 (3) 显然 $\mu_i = 1, i = (i_1, i_2, \dots, i_n)^T, \mu_j = \begin{cases} 1, j = j_0 \\ 0, j \neq j_0 \end{cases}$ 为 (3) 的可行解, 由对偶理论式 (2) 和 (3) 有相等的最优值. 根据

$$\mu^* X_{ij} - \mu_i^* Y_{ij} - \mu_i^* = 0, i = 1, \dots, P$$

$$\sum_{i=1}^P (\mu^* X_{ij_0} - \mu_i^* Y_{ij_0} - \mu_i^*) = \mu^* X_0 - \sum_{i=1}^P \mu_i^* Y_0 - \sum_{i=1}^P \mu_i^* = 0$$

即 $\mu^* Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^* Y_0 - \mu_i^* Y_0 = 1, V_3 = V_2 = 1$ [证毕]

定理 3 证明 设 u, v 是 (1) 的可行解, 则 $v^T X_{ij} - u^T Y_{ij} - \mu_i = 0, i = 1, 2, \dots, P, j = 1, 2, \dots, n$, 所以 $(v^T X_j^{(i)} - u^T Y_j^{(i)} - \mu_i) = 0$, 由于 $\sum_{i=1}^P X_{ij} = X_j, \sum_{i=1}^P Y_{ij} = Y_j$,

因而 $v^T X_j - u^T Y_j - \sum_{i=1}^P \mu_i = 0$, 即 u, v, μ_i 是 (4) 的可行解, 且目标函数值相等. [证毕]

定理 5 证明 设 u, v, μ_i 为 (1) 的任一可行解, 先将 u, v 写成下面的形式: $u = ((u_1)^T, (u_2)^T, \dots, (u_k)^T)^T, u_i = E_{i1}, v = ((v_1)^T, (v_2)^T, \dots, (v_k)^T)^T, v_i = E_{mi}$.

由 $v^T X_{ij} - u^T Y_{ij} - \mu_i = 0$ 有 $v_i^T X_j^{(i)} - u_i^T Y_j^{(i)} - \mu_i = 0, i = 1, 2, \dots, P$ (A1) 并且

$$v^T X_{j_0} = \sum_{i=1}^P v_i^T X_{j_0}^{(i)} > 0$$

$$u^T Y_{j_0} + \sum_{i=1}^P \mu_i = \sum_{i=1}^P (u_i^T Y_{j_0}^{(i)} + \mu_i) > 0$$

令 $I = \{i \mid i = 1, 2, \dots, P, v_i^T X_{j_0}^{(i)} = 0\}$, 且 $\frac{u_i^T Y_{j_0}^{(i)} + \mu_i}{v_i X_{j_0}^{(i)}} = m_i X_i \left\{ \frac{u_i^T Y_{j_0}^{(i)} + \mu_i}{v_i^T X_{j_0}^{(i)}} \right\}$

由式 (A1) 和文献 [14] 中的引理 2, 有 (v_{i_0}, u_{i_0}) 为 $(1 - i_0)$ 的可行解, 且 $0 < V_{1..i} = 1$, 再由 u, v 的任意性, 有 $V_{1..i_0} = \min_{i \in I} m_i X_i V_{1..i}$.

不失一般性, 现假设 $V_{1..1} = \min_{i \in I} m_i X_i V_{1..i}$, u_1^0, v_1^0, μ_1 为 (5) 的最优解. 令 $u^0 = ((u_1^0)^T, 0, \dots, 0)^T, v^0 = ((v_1^0)^T, 0, \dots, 0)^T, \mu_i^0 = \begin{cases} \mu_i, i = 1 \\ 0, i = 2, \dots, P \end{cases}$, 则 (u^0, v^0, μ_i^0) 为 (1) 的可行解, 且 $\frac{(u^0)^T Y_{j_0} + \sum_{i=1}^P \mu_i^0}{(v^0)^T X_{j_0}} = \frac{(u_1^0)^T Y_{j_0}^{(1)} + \mu_1}{(v_1^0)^T X_{j_0}^{(1)}} = V_{1..1}$, 再由 $V_{1..i} = V_{1..1}$, 有 $V_{1..i} = \min_{i \in I} m_i X_i V_{1..i}$. [证毕]

定理 6 证明

- (i) 显然成立.
- (ii) 充分性显然成立, 下证必要性.

由 DMU_{j₀} 的有效性, 存在最优解 $u^0 \geq 0, v^0 \geq 0, \mu_i^0$

$$\text{s. t. } \frac{(u^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0}{v^0 X_{j_0}} = 1 \quad (A2)$$

$$(v^0)^T X_{ij} - (u^0)^T Y_{ij} - \mu_i^0 = 0$$

将 u_0, v_0 写成 $u^0 = ((u_1^0)^T, (u_2^0)^T, \dots, (u_p^0)^T)^T, v^0 = ((v_1^0)^T, (v_2^0)^T, \dots, (v_p^0)^T)^T$, 由 (A2): $(v_i^0)^T X_j^{(i)} - (u_i^0)^T Y_j^{(i)} - \mu_i^0 = 0$, 即 $0 < \frac{(u_i^0)^T Y_j^{(i)} + \mu_i^0}{(v_i^0)^T X_j^{(i)}} = 1$, 且 $1 =$

$$\frac{(u^0)^T Y_0 + \sum_{i=1}^P \mu_i^0}{(v^0)^T X_0} = \frac{\sum_{i=1}^P ((u_i^0)^T Y_j^{(i)} + \mu_i^0)}{\sum_{i=1}^P ((v_i^0)^T X_0^{(i)})}$$

理 3, u_i^0, v_i^0, μ_i^0 为 (5) 的可行解, 且 $V_{1..i} = 1$. 结论成立. [证毕]