季节性需求下受资源限制及缺货之存货模型①

张锦特[1]，赖玫玲[2]
(1. 国立彰化师范大学信息管理所，中国台湾 彰化 50058；2. 桃园县立文昌国民中学，中国台湾 桃园 33000)

摘要：目前，没有任何研究同时对季节性需求、允许缺货及受资源限制之存货管理问题加以探讨. 所以，此研究使用整数规划之方法来求解此一存货管理问题，使用此方法所建立的模型不仅容易应用于现实生活之中. 除此之外，决策者也可轻易地将限制式加入模型之内以符合其实际情况. 最后，使用范例以说明如何实际应用此模型.

关键词：存货；季节性需求；缺货；资源限制
中图分类号：F406　　文献标识码：A　　文章编号：1007 - 9807(2005)03 - 0072 - 09

0　引　言

在存货管理的领域之中，传统的经济订购量(economic order quantity，EOQ)是最为大家所熟知的模式，但是传统的经济订购量(EOQ)模式，假设需求率为固定常数，使其应用于实务上产生了许多的限制与困难. 只有当产品是处于成熟稳定的阶段，否则需求率通常不可能是固定的常数[1,2]. 实务上一些高科技产业(如电子、计算机公司等)的需求常受季节波动的影响，所以需求率为固定常数的假设并不合理. 因此本研究希望能建立全年需求已知，但每月需求受季节波动影响的最佳存货模型，而且本研究为了将研究焦点及心力全部集中在此种新存货模型的建立之上，故不对季节性需求量如何预测作探讨，而直接假设季节性需求量的数值为已知数.

除此之外，在真实的世界之中，需求并不一定都能被及时加以满足，一旦需求不能被满足就会产生缺货，缺货的情况发生就会衍生出缺货成本，为使所提之存货模型的实用性更高，因此本研究在考虑存货订购问题时，同时将缺货成本纳入考量之中. 另外，决策者在决定存货订购决策常常会受到其它现实资源的限制，例如：仓库容量有限、存货投资金额有限等，因此本研究所发展的模型也将资源限制纳入考量，希望能让决策者可容易地依自己所面临的限制，将限制式加入本研究所发展的模型之中，以帮助其做出适当的决策.

在本研究之中，所欲建立的存货模型属于确定性存货模型，就目前所知尚未有其它学者对此种季节性需求下受资源限制及允许缺货的存货问题加以研究. 其中与本文所欲探讨之问题较为相关的存货文献有：Donaldson[3]首先提出需求为线性递增函数的存货模型. 虽然用Donaldson[3]所提出的分析性解法可求得精确的最佳解，但是由于使用其所提议的方法必须花费长时间及复杂的计算才可以求得最佳解，因此陆续有一些学者提出启发式(heuristic)的解法. 例如Silver[4]，Mitra et al.[5]，Teng[6]. 上述所发展的存货模型皆不允许缺货，可是在真实的世界之中，发生缺货是很自然的现象，所以Deb和Chaudhuri[7]是最先将缺货纳入线性递增需求的存货模型中加以考量的先锋. 稍后，Dave[8]指出Deb和Chaudhuri[7]的模式中有三项错误并加以修正. Datta和Pal[9]也对线性递增需求下允许缺货的存货问题加以研究，并且他

① 收稿日期：2003 - 05 - 08；修订日期：2005 - 03 - 03.
作者简介：张锦特(1958 —)，男，台湾新竹人，博士，教授.

们更进一步假设订货周期的长度呈现等差级数减少，发展出启发式解法以求得最佳的订购次数及订购时点. Hariga[10]同时考虑需求函数为线性递增及递减的情况，发展出一种反复叠代(iterative)解法，以求得最佳订购时点.

由于目前尚未有其它学者对此种季节性需求下受资源限制及允许缺货的存货问题加以研究. 为解决此种存货问题，本文使用整数规划之方法来建立存货模型.

1　基本假设与符号定义

为了建立季节性需求下受资源限制及允许缺货的存货模型，本文提出一些基本假设及符号定义.

基本假设：

1°全年总需求量已知.

2°需求随着季节变动.

3°前置时间为零.

4°月初订购商品，所有订购量在同一时间一次送达，没有分批运送的情形.

5°订购点固定于月初，但是一月初一定要订购商品.

6°允许缺货，但是缺货数量不准超过设立的标准量 Z.

7°规划周期的起点与终点都没有缺货.

8°缺货发生时不会丧失销售，所以一旦有缺货发生，缺货须后补(back orders).(即缺货一旦发生，下个月就必须订购以弥补前一期不能立即交货的需求)

9°购价与订购数量无关，即不考虑数量折扣.

10°订购数量受仓库容量限制.

11°每一个订购周期中所订购的存货在整个订购周期中被均匀耗用完毕.

符号定义：

c_1 ——每次订购之成本.

c_2 ——每年每单位的持有成本.

c_3 ——每年每单位的缺货成本.

I_i ——Q_i 扣除 i 月初缺货量后的存货数量，亦即在 i 月可供应后续需求之存货量，($i = 1,2,\cdots,12$).

E_i ——订购点在 i 月初，该订购周期内之缺货数量.

S_{i+1} ——再订购点于 $i+1$ 月所订购的商品尚未送达前的缺货量，此缺货量于前一个订购周期内所发生.($i = 1,\cdots,11$).

Z ——每一订购周期中所允许的最大缺货量.

D ——全年总需求量.

D_i ——i 月的需求量.

$$Q_i = \begin{cases} i \text{ 月所订购的数量，当 } x_i = 1 \\ i \text{ 月不订购，当 } x_i = 0 \end{cases}$$

t_i ——i 月初的时点.

s_j ——缺货开始的时点，亦即存货开始为零的时点，$[t_i, s_j] \le [t_i$，下次订购点 $t_j]$.

H ——规划周期(为决定订购时点将规划周期一年划分为 12 个月).

x_i ——为 0 或 1 之变数.

p_i ——存货为正的期间占全部订购周期的比率，亦即 $[t_i, s_j]$ 占 $[t_i$，下次订购点 $t_j]$ 的比率.

r_i ——缺货期间占全部订购周期的比率，亦即 $[s_j, t_j]$ 占的 $[t_i$，下次订购点 $t_j]$ 比率.

2　模型建立

在建立模型之前，首先假定季节性需求如图 1 所示，其中全年的需求量 $D = \sum_{i=1}^{12} D_i$，每月的需求量列在表 1.

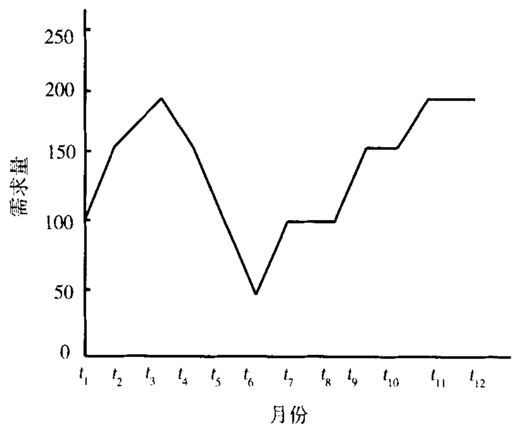

图 1　季节性需求

Fig. 1 Seasonal demand

表 1 全年的月需求量

Table 1. Monthly demand of full year

月份	D_i	月份	D_i
1	100	7	100
2	150	8	100
3	200	9	150
4	150	10	150
5	100	11	200
6	50	12	200

本文所建立的模型以存货总成本最小为目标，由于本研究不对数量折扣加以考量，所以存货取得成本不会影响存货订购的决策，因此本文只需对订购成本、持有成本及缺货成本加以考虑。从图 2，可得知一个订购周期的时间加权平均存货为 $\frac{I_i}{2} \times \frac{[s_j - t_i]}{H}$，为建立本模型上式可以改写为

$$\frac{I_i}{2} \times p_i \times \frac{[t_i, \text{下次订购点 } t_j]}{H}.$$

由图 2 亦可得知一个周期的时间加权平均缺货为

$$\frac{E_i}{2} \times \frac{[\text{缺货发生点 } s_j, \text{下次订购点 } t_j]}{H}$$

相似于平均存货成本的表示方式，也可将上式改写为

$$\frac{E_i}{2} \times r_i \times \frac{[t_i, \text{下次订购点 } t_j]}{H}$$

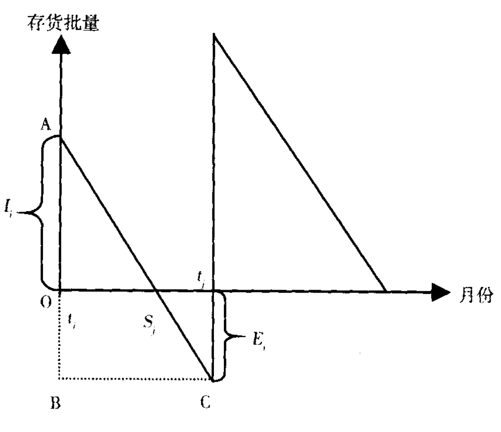

图 2 允许缺货之存货水准变化图

Fig. 2 Inventory level variation with shortages allowed

故全年的存货总成本表达如下：

$$TC = \text{全年订购成本} + \text{全年持有成本} + \text{全年缺货成本} =$$

$$c_1 \sum_{i=1}^{12} x_i + \frac{c_2}{2H} \times \sum \left(I_i \times p_i \times [t_i, \text{下次订购点 } t_j] \right) + \frac{c_3}{2H} \times \sum \left(E_i \times r_i \times [t_i, \text{下次订购点 } t_j] \right) \quad (1)$$

存货总成本的通式 (1) 建立完成之后，首先考虑下列的问题并将其解决：

问题 P1 本文所提议的模型，主要的目标是在于决定出最佳的订购时间点、订购次数及订购量，而且此模型必须达成每个订购周期的缺货数量不得超过设定之标准 Z 之假设。所以，首先在满足上述条件之前提下，权衡全年持有成本及缺货成本使其二者加总之和为最小。

故本文推导出一个整数规划的程序，表示如下：

方程式 G1

$$\begin{aligned} \text{Min } & \frac{c_2}{2H}\Big\{ I_1 p_1 [x_1 + (1-x_2) + (1-x_2)\cdot(1-x_3) + (1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) + \cdots] + \\ & I_2 p_2 [x_2 + (1-x_3) + (1-x_3)(1-x_4) + (1-x_3)(1-x_4)(1-x_5) + \cdots] + \\ & \cdots + I_{12} p_{12} [x_{12}] \Big\} + \\ & \frac{c_3}{2H}\Big\{ E_1 r_1 [x_1 + (1-x_2) + (1-x_2)\cdot(1-x_3) + (1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) + \cdots] + \\ & E_2 r_2 [x_2 + (1-x_3) + (1-x_3)(1-x_4) + (1-x_3)(1-x_4)(1-x_5) + \cdots] + \\ & \cdots + E_{11} r_{11} [x_{11} + (1-x_{12})] \Big\} \end{aligned} \quad (2)$$

s.t.

$$\begin{aligned} & I_1 - x_1 D_1 - x_1 [(1-x_2) D_2 + (1-x_2)\cdot(1-x_3) D_3 + \cdots] \geq -Z \\ & I_2 - x_2 D_2 - x_2 [(1-x_3) D_3 + (1-x_3)\cdot(1-x_4) D_4 + \cdots] \geq -Z \\ & \cdots\cdots \\ & I_{11} - x_{11} D_{11} - x_{11} [(1-x_{12}) D_{12}] \geq -Z \\ & I_{12} - x_{12} D_{12} \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中：I_i 是整数变量，x_i 为 0 - 1 变量。

命题 1

P1 与 G1 意义相同，因此它们有相同的最佳解。

证明

(i) 如果 $x_i = 1$，那么在 t_i 这个时点就会订购

商品,将所订购商品的数量扣除掉前期的缺货数量就是 I_i,如此一来持有成本可由目标函数中的

$$\frac{c_2}{2H}I_i p_i[x_i + (1 - x_{i+1}) + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2}) + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2})(1 - x_{i+3}) + \cdots]$$

加以解释. 而且由于缺货数量为 E_i,故缺货成本也可由目标函数中的

$$\frac{c_3}{2H}E_i r_i[x_i + (1 - x_{i+1}) + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2}) + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2})(1 - x_{i+3}) + \cdots]$$

加以解释.

当订购点发生在 $t_i(x_i = 1)$ 时,限制式(3) 满足订购周期 $[t_i$,下次订购点 $t_j]$ 中的缺货数量不超过设定的标准 Z 假设,故

$$I_i - x_iD_i - x_i[(1 - x_{i+1})D_2 + (1 - x_{i+1}) \cdot (1 - x_{i+2})D_3 + \cdots] \geq - Z$$

除此之外,若 $t_{12}(x_{12} = 1)$ 为最后的订购点,$I_{12} - x_{12}D_{12}$ 会大于等于零以满足最后一个订购周期结束没有缺货之假设.

(ii) 如果 $x_i = 0$ 那么在 t_i 这个时点是不会订购商品的. 其相关之成本已说明于(i) 中. 因此完成命题 1 的证明. 证毕.

命题 2

针对式(2) 中的 E_i 加以分析,可以发现 E_i 相当于以下的问题.

$$E_i = x_{i+1}S_{i+1} + (1 - x_{i+1})x_{i+2}S_{i+2} + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2})x_{i+3}S_{i+3} + \cdots + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2})(1 - x_{i+3}) \cdot (1 - x_{i+4})(1 - x_{i+5})(1 - x_{i+6}) \cdot (1 - x_{i+7})(1 - x_{i+8})(1 - x_{i+9}) \cdot (1 - x_{i+10})x_{i+11}S_{i+11} \tag{4}$$

证明

首先试想一个季节性需求的情况,其每月的需求量如表 1 所示,在此种季节性需求下假设一种极端的情况发生,即每月初都订购商品而且每月都允许缺货,如此一来毫无疑问的 $E_1 = S_2$, $E_2 = S_3$, …, $E_{11} = S_{12}$. 但是在真实的环境之中,为满足存货总成本最小的目标,订购的时间点及次数是可控制的,因此以上 $E_i = S_{i+1}$ 的极端情况是不太可能成立的.

假设最佳订购决策下的存货水准变化如图 3 所示. 从此图中,可得知 $E_1 = S_3$, $E_3 = S_5$, $E_5 = S_8$, $E_8 = S_{10}$, $E_{10} = S_{12}$. 亦即当 $x_{i+1} = 1$ 即代表在 $i + 1$ 月时有订购可能是由于 $i + 1$ 月初有缺货量 S_{i+1},这是基于缺货需后补的假设所推论而来的;反之,若 $x_{i+1} = 0$,则代表第 $i + 1$ 月初没有缺货量 S_{i+1}. 因此本月初的缺货即是前一次订购周期订购商品不足所产生,基于缺货需后补的前提假设下,故 E_i 可被解释为

$$x_{i+1}S_{i+1} + (1 - x_{i+1})x_{i+2}S_{i+2} + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2})x_{i+3}S_{i+3} + \cdots + (1 - x_{i+1})(1 - x_{i+2})(1 - x_{i+3})(1 - x_{i+4})(1 - x_{i+5})(1 - x_{i+6})(1 - x_{i+7})(1 - x_{i+8})(1 - x_{i+9})(1 - x_{i+10})x_{i+11}S_{i+11}$$

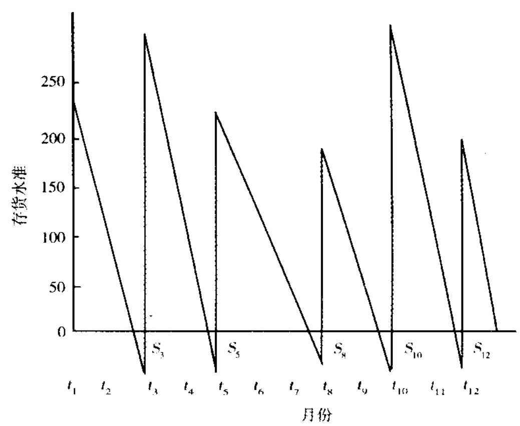

图 3　假设最佳订购决策下的存货水准变化图

Fig. 3 Inventory level variation of the assuming optimal policy

命题 3

接着继续对式(2) 中的 p_i 加以分析,可以发现 p_i 相当于以下的表示方式.

$$p_i = \frac{I_i}{[I_i + E_i]} \tag{5}$$

证明

由图 2,得知三角形 ABC 与三角形 At_is_j 相似,故利用三角形相似定理可得出 $\frac{I_i + E_i}{I_i} = \frac{[t_i,\text{下次订购点 } t_j]}{[t_i,\text{缺货发生点 } s_j]}$,亦即 $[t_i$,缺货发生点 $s_j] = \frac{I_i}{I_i + E_i} \times [t_i$,下次订购点 $t_j]$,因此完成命题 3 之证明. 证毕.

命题 4

最后再对式(2) 中的 r_i 加以分析,可以发现 r_i 相当于以下的表示方式.

$$r_i = \frac{E_i}{[I_i + E_i]} \tag{6}$$

证明

与命题 3 相似,由图 2,亦发现三角形 ABC 与三角形 Ct_js_j 成相似关系,因此使用三角形相似定理可得出

$$\frac{I_i + E_i}{E_i} = \frac{[t_i, \text{下次订购点 } t_j]}{[\text{缺货发生点 } s_j, \text{下次订购点 } t_j]}$$

亦即

$$[\text{缺货发生点 } s_j, \text{下次订购点 } t_j] = \frac{E_i}{I_i + E_i} \times [t_i, \text{下次订购点 } t_j]$$

证毕.

由于本文的目标是希望求得存货总成本最小,故将上述的式(2)、(4)、(5)、(6)分别替代至存货总成本通式(1)中,即可得出目标式,其所建立之模型表示如下:

建立的模型

$$\begin{aligned}
\text{Min } & c_1 \sum_{i=1}^{12} x_i + \frac{c_2}{2H}\Big\{ \frac{I_1^2}{[I_1 + x_2 S_2 + (1 - x_2) x_3 S_3 + \cdots + (1 - x_2)(1 - x_3)\cdots(1 - x_{11}) x_{12} S_{12}]} \times \\
& [x_1 + (1 - x_2) + (1 - x_2)(1 - x_3) + (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) + \cdots] + \\
& \frac{I_2^2}{[I_2 + x_3 S_3 + (1 - x_3) x_4 S_4 + \cdots + (1 - x_3)(1 - x_4)\cdots(1 - x_{11}) x_{12} S_{12}]} \times \\
& [x_2 + (1 - x_3) + (1 - x_3)(1 - x_4) + (1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_5) + \cdots] + \cdots + \frac{I_{12}^2}{[I_{12}]} \times [x_{12}]\Big\} + \\
& \frac{c^3}{2H}\Big\{ \frac{[x_2 S_2 + (1 - x_2) x_3 S_3 + \cdots + (1 - x_2)(1 - x_3)\cdots(1 - x_{11}) x_{12} S_{12}]^2}{[I_1 + x_2 S_2 + (1 - x_2) x_3 S_3 + \cdots + (1 - x_2)(1 - x_3)\cdots(1 - x_{11}) x_{12} S_{12}]} \times \\
& [x_1 + (1 - x_2) + (1 - x_2)(1 - x_3) + (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) + \cdots] + \\
& \frac{[x_3 S_3 + (1 - x_3) x_4 S_4 + \cdots + (1 - x_3)(1 - x_4)\cdots(1 - x_{11}) x_{12} S_{12}]^2}{[I_2 + x_3 S_3 (1 - x_3) x_4 S_4 + \cdots + (1 - x_3)(1 - x_4)\cdots(1 - x_{11}) x_{12} S_{12}]} \times \\
& [x_2 + (1 - x_3) + (1 - x_3)(1 - x_4) + (1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_5) + \cdots] + \cdots + \\
& \frac{[x_{12} S_{12}]^2}{[I_{11} + x_{12} S_{12}]} \times [x_{11} + (1 - x_{12})]\Big\}
\end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
& I_1 - x_1 D_1 - x_1 [(1 - x_2) D_2 + (1 - x_2)(1 - x_3) D_3 + \cdots] \geq - Z \\
& I_2 - x_2 D_2 - x_2 [(1 - x_3) D_3 + (1 - x_3)(1 - x_4) D_4 + \cdots] \geq - Z \\
& \quad \cdots\cdots \\
& I_{11} - x_{11} D_{11} - x_{11} [(1 - x_{12}) D_{12}] \geq - Z \\
& I_{12} - x_{12} D_{12} \geq 0
\end{aligned}$$

$$S_i \leq Z, \quad i = 2, 3, \cdots, 12 \tag{7}$$

$$x_1 = 1 \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_i Q_i \geq D \tag{9}$$

$$Q_1 = I_1$$

$$Q_{i+1} \leq I_{i+1} + S_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, 11 \tag{10}$$

$$S_{i+1} \leq x_{i+1} M, \quad i = 1, 2, \cdots, 11 \tag{11}$$

$$Q_i \leq x_i M, \quad i = 1, 2, \cdots, 12 \tag{12}$$

$$I_i \leq x_i M, \quad i = 1, 2, \cdots, 12 \tag{13}$$

资源限制式 (14)

$x_i \in \{0, 1\}$, Q_i, I_i, S_{i+1} 皆为整数变量, M 是一个大值.

限制式(3)确保当订购点发生在 $t_i (x_i = 1)$ 时,订购周期 $[t_i$, 下次订购点 $t_j]$ 中的缺货数量不超过设定的标准值 Z. 此外,若 $t_{12} (x_{12} = 1)$ 为最后的订购点, $I_{12} - x_{12} D_{12}$ 会大于等于零以满足最后一个订购周期结束没有缺货之假设. 限制式(7)满足缺货量不能超过设定标准 Z 之假设. 限制式

(8) 确保第一次订购点为一月初的假设成立. 限制式(9) 代表全年的需求必须加以满足,亦即最后一个订购周期所订购的商品可满足前期所发生的缺货需求以及满足本期所需,故最后一个订购周期结束不会发生缺货的假设亦被满足. 限制式(10) 表示订购量与存货量、缺货量之间的关系. 限制式(11) 是为了确保当 $x_{i+1} = 0$ 时, S_{i+1} 等于 0. 限制式(12)、(13) 分别在确保当 $x_i = 0$, Q_i、I_i 等于 0, $x_i = 0$;反之,若 $x_i = 1$,则 Q_i、I_i 不等于 0. 限制式(14) 为资源限制式,管理者可以依其实际需要加入适当的资源限制条件.

3　范例

例 1

假设 $c_1 = \$30$, $c_2 = \$2$, $c_3 = \$1$, $Z = 10$,全年的需求量 $= 1\,650$,每月的需求量 D_i 如表 1 所示.

依本文所建立的模型为基础,这个例题可表示为以下的程序:

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\ & 30(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{12}) + \\
& \frac{I_1^2}{12[I_1 + x_2S_2 + (1-x_2)x_3S_3 + \cdots + (1-x_2)(1-x_3)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]} \times \\
& [x_1 + (1-x_2) + (1-x_2)(1-x_3) + (1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) + \cdots] + \\
& \frac{I_2^2}{12[I_2 + x_3S_3 + (1-x_3)x_4S_4 + \cdots + (1-x_3)(1-x_4)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]} \times \\
& [x_2 + (1-x_3) + (1-x_3)(1-x_4) + (1-x_3)(1-x_4)(1-x_5) + \cdots] + \cdots + \frac{I_{12}^2}{12[I_{12}]} \times [x_{12}] + \\
& \frac{[x_2S_2 + (1-x_2)x_3S_3 + \cdots + (1-x_2)(1-x_3)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]^2}{24[I_1 + x_2S_2 + (1-x_2)x_3S_3 + \cdots + (1-x_2)(1-x_3)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]} \times \\
& [x_1 + (1-x_2) + (1-x_2)(1-x_3) + (1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) + \cdots] + \\
& \frac{[x_3S_3 + (1-x_3)x_4S_4 + \cdots + (1-x_3)(1-x_4)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]^2}{24[I_2 + x_3S_3 + (1-x_3)x_4S_4 + \cdots + (1-x_3)(1-x_4)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]} \times \\
& [x_1 + (1-x_2) + (1-x_2)(1-x_3) + (1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) + \cdots] + \\
& \frac{[x_3S_3 + (1-x_3)x_4S_4 + \cdots + (1-x_3)(1-x_4)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]^2}{24[I_2 + x_3S_3 + (1-x_3)x_4S_4 + \cdots + (1-x_3)(1-x_4)\cdots(1-x_{11})x_{12}S_{12}]} \times \\
& [x_2 + (1-x_3) + (1-x_3)(1-x_4) + (1-x_3)(1-x_4)(1-x_5) + \cdots] + \cdots + \\
& \frac{[x_{12}S_{12}]^2}{24[I_{11} + x_{12}S_{12}]} \times [x_{11} + (1-x_{12})]
\end{aligned}
$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
& I_1 - x_1D_1 - x_1[(1-x_2)D_2 + (1-x_2)\cdot \\
& (1-x_3)D_3 + \cdots] \geq -10 \\
& I_2 - x_2D_2 - x_2[(1-x_3)D_3 + (1-x_3)\cdot \\
& (1-x_4)D_4 + \cdots] \geq -10 \\
& \quad \cdots\cdots \\
& I_{11} - x_{11}D_{11} - x_{11}[(1-x_{12})D_{12}] \geq -10 \\
& I_{12} - x_{12}D_{12} \geq 0 \\
& S_2 \leq 10 \\
& S_3 \leq 10 \\
& \quad \cdots \\
& S_{12} \leq 10 \\
& x_1 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_1Q_1 + x_2Q_2 + \cdots + x_{12}Q_{12} \geq 1\,650 \\
& Q_1 = I_1 \\
& Q_2 \leq I_2 + S_2 \\
& \quad \cdots \\
& Q_{11} \leq I_{11} + S_{11} \\
& Q_{12} \leq I_{12} + S_{12} \\
& S_2 \leq x_2M \\
& S_3 \leq x_3M \\
& \quad \cdots \\
& S_{12} \leq x_{12}M \\
& Q_i \leq x_iM, \quad (i = 1, 2, \cdots, 12) \\
& I_i \leq x_iM, \quad (i = 1, 2, \cdots, 12) \\
& x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i
\end{aligned}
$$

为了得出上述问题的解答,本文利用计算机运算软件 LINGO[11] 求解,以获得区域最佳解,之所以只能获得区域最佳解,乃因为本模型所建立之目标式为二次方程式,其属于非线性规划的问题. 当然若再进一步的利用适当的分数规划法 (fractional programming)[12] 再加上一些线性化技术(linearization techniques)[13] 来线性化所提之模型,本问题是可以解得全域最佳解的. 但为了使本文所提的模型能容易的应用在管理实务工作上,本文省略了太复杂的线性化工作. 如此决策者即可将本文所提的存货管理模型,利用一般的计算机运算软件来直接求解. 所以此存货管理模型对实务的工作是很有帮助的. 接下来将所求得的最佳解,汇总于表 2. 得出最佳的决策是一年订购 7 次,且分别于 1,3,4,6,8,10,12 月订购,其目标值为 \$433.933 9. 除此之外,也得到每一次要订购的数量 Q_i,以及存货量 I_i 和缺货量 S_i 的信息.

表 2 例 1 之最佳存货订购决策

Table 2 Results of example 1

月份	x_i	Q_i	I_i	S_i
1	1	240	240	0
2	0	0		0
3	1	200	190	10
4	1	250	240	10
5	0	0		0
6	1	150	140	10
7	0	0		0
8	1	250	240	10
9	0	0		0
10	1	350	340	10
11	0	0		0
12	1	210	200	10

例 2

在例题 1 之中,并未将资源限制纳入考虑. 因此在本例中假设:仓库的空间是有限的,每次只能允许订购 250 单位的商品存放于仓库.

于是基于此项限制,每次所能订购的最大数量为 250,所以限制式 $Q_i \leq 250$ 加入模型之中并重新求得区域最佳解. 其所求得的解答,列于表 3. 在仓库空间受限制下的最佳决策乃一年订购 8 次,订购点依序为 1,3,4,6,8,10,11,12 月,而目标值为 \$434.841 7.

表 3 例 2 之最佳存货订购决策

Table 3 Results of example 2

月份	x_i	Q_i	I_i	S_i
1	1	240	240	0
2	0	0		0
3	1	200	190	10
4	1	250	240	10
5	0	0		0
6	1	150	140	10
7	0	0		0
8	1	250	240	10
9	0	0		0
10	1	150	140	10
11	1	200	190	10
12	1	210	200	10

4 结 论

以往相关的存货文献对需求通常不外乎假设为固定常数或者为随时间改变的线性函数,但是就目前所知现代的决策者在处理存货问题时,其所面临的需求常常受季节波动所影响,而受季节波动影响需求最明显的产业,即为高科技产业. 再加上高科技产业的产品成本往往很高,商品汰换速度很快,一旦没有良好的存货管理政策就很容易使公司蒙受损失. 为解决此一问题,本文建立了一个可行的存货模型,其可供需求受季节波动所影响的供货商作为制定存货管理决策的工具.

另外,本研究进一步将缺货及资源限制的情况纳入考虑,使建立的存货模型更贴近于真实世界的情况. 在研究方法方面,本文使用整数规划的方法来建立此存货模型,依此方式所建立的模型不仅观念上容易理解. 而且也可将它输入计算机运算软件 LINGO[11]之中,并可轻易地求出解答,如此一来即可大大地省去人工运算之麻烦及困难.

除此之外,本研究所建立的存货模型深具弹性,由于不同的供货商其所面临的资源限制可能不尽相同,使用本存货模式,决策者可自行配合其所面临的实际状况再自行加入限制式,以符合个人不同的环境之所需.

由于本文所探讨是在有限的规划周期内,需

求量为确定已知且需求量受季节性变动所影响的存货问题,而且在模型中同时考量缺货及资源限制的情况,使其满足存货总成本为最小的目标,据此以决定出最佳订购量、最佳订购点. 对于未来后续的研究建议可继续朝以下的方向加以发展:

(1) 由于本研究所建立的存货模型为非线性模型,非线性模型所求得之解为区域最佳解,由于受限于时间及资源有限并未将模型化为线性以求得全域最佳解,故后续研究者可朝此一方向改进.

(2) 本研究假设前置时间为零,未来研究可放宽此一假设允许前置时间变动.

(3) 本研究未将数量折扣纳入考量,后续研究可将此纳入考虑.

(4) 本研究假设订购量一次送达,未来可朝订购量分批运送的方向研究.

(5) 本研究所考虑的为单一货品的供应问题,未来可考虑多个产品的供应问题.

(6) 本研究假设订购点固定在月初,未来可放宽此一假设允许订购点不固定在月初.

(7) 本研究限制规划周期一开始及规划周期结束不允许缺货存在,未来可假设规划周期一开始时不需订购商品,可允许缺货持续一段期间之后才订购商品,而且在规划周期结束时允许有缺货的情况.

参 考 文 献:

[1] Chung K J, Tsai S F. Inventory systems for deteriorating items with shortages and a linear trend in demand-taking account of time value[J]. Computers & Operations Research, 2001, 28: 915-934.

[2] Yang J, *et al*. Comparison of several heuristics using an analytic procedure for replenishment with non-linear increasing demand[J]. International Journal of Production Economics, 1999, 58: 49-55.

[3] Donalson W A. Inventory replenishment policy for a linear trend in demand: An analytic solution[J]. Operational Research Quarterly, 1977, 28: 663-670.

[4] Silver E A. A simple inventory replenishment rule for a linear trend in demand[J]. Journal of the Operational Research Society, 1979, 30: 71-75.

[5] Mitra A, Cox J F, Jesse R R. A note on determining order quantities with a linear trend in demand[J]. Journal of the Operational Research Society, 1984, 35: 141-144.

[6] Teng J T. A note on inventory replenishment policy for increasing demand[J]. Journal of the Operational Research Society, 1994, 45: 1335-1337.

[7] Deb M, Chaudhuri K. A note on the heuristic for replenishment of trended inventories considering shortages[J]. Journal of the Operational Research Society, 1987, 38: 459-463.

[8] Dave U. On a heuristic inventory replenishment for item with a linearly increasing demand incorporating shortages[J]. Journal of the Operational Research Society, 1989, 40: 827-830.

[9] Datta T K, Pal A K. A note on a replenishment policy for an inventory model with linear trend in demand and shortages[J]. Journal of the Operational Research Society, 1992, 43: 993-1001.

[10] Hariga M A. The inventory lot-sizing problem with continuous time-varying demand and shortages[J]. Journal of the Operational Research Society, 1994, 45: 827-837.

[11] Schrage L. LINGO release4.0. LINDO System Inc, 1998.

[12] Chang Ching-Ter. On the posynomial fractional programming problems[J]. European Journal of Operational Research, 2002, 143 (1): 42-52.

[13] Chang Ching-Ter. An efficient linearization approach for mixed integer problems[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 123: 652-659.

Inventory models with resource constraints and shortages allowed on seasonal demand

CHANG Ching-Ter[1] , *LAI Wen-ling*[2]

1. Department of Information Management , National Changhua University of Education , Taiwan Changhua 50058 , China ;
2. Taoyuan County Wen-Chang Junior High School , Taiwan Taoyuan 33000 , China

Abstract : To the best of authors' knowledge there is no work done on the inventory problem with seasonal demand , shortages allowed , and resource constrainted. In this study , we propose an integer programming method to solve the problem. The proposed model not only can easily be applied to real life but also allow constraints to be added by decision maker to fit for the real world situations. Finally , some examples are included for demonstrating the usefulness of the proposed model.

Key words : inventory ; seasonal demand ; shortages ; resource constraints

(上接第 27 页)

Affiliated value model considering effect of commission

BI Zhi-wei[1] , *WANG Yan*[2]

1. Department of Mathematics , Huazhong University of Science and Technology , Wuhan 430074 , China ;
2. College of Mathematics and Statistics , Wuhan University , Wuhan 430072 , China

Abstract : The auction company is induced as a third side in standard auction model which considers only bidders and seller. The auction company takes some commission from the winner of the auction. The main result is that the volume of the commission rate k has both effects on the bidder's bid strategy and the expected profits of the seller : bidder's bid becomes more passive but its expected profits is not dependent on the commission rate k ; the seller's expected profit has really decreased. In fact , the commission obtained by auctioneer comes from the profit of the seller. With the affiliated value model that induced commission , this paper considers the strategy in the first-price auction and second-price auction.

Key words : auction ; commission rate ; equilibrium expected revenue