第8卷第5期
2005年10月

管理科学学报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol.8 No.5
Oct. 2005

# Max-min DEA 模型及效率讨价还价均衡解①

吴德胜[1]，石 琴[2]，汪 明[1]
(1.中国科学技术大学商学院，合肥 230026；2.合肥工业大学机械汽车学院，合肥 230069)

**摘要：** 建立一类新的 DEA 模型，即 Max-min DEA 模型．该模型通过最大化最小效率单元的效率，结合了自评与互评的思路，在一定程度上克服了仅仅采用自评思想的经典 DEA 模型的缺陷．文中 Max-min 均衡模型问题在于保护“弱小”单元的同时，有可能损害其它单元的效率．为克服该问题，文章通过 Nash 讨价还价模型求解 Max-min 均衡模型与 CCR 模型的讨价还价均衡解．最后用算例进行了演示计算．

**关键词：** 数据包络分析；纳什均衡；规划；权重；讨价还价解

**中图分类号：** O221；N94 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007-9807(2005)05-0090-05

## 0 引 言

经典的 DEA 方法(CCR 模型)是由 Charnes，Cooper 和 Rhodes[1] 建立的，该方法在社会各领域得到了广泛的应用[2~8]．但是，该方法仅适合非盈利性组织的效率评估，如对军队[3]学校[4]公共政府部门[5]和医院[6]的效率评估等．经典的 DEA 模型采用自评的观点，分别优化各个 DMU 自身的效率，约束是其它各 DMU 满足效率的定义，即以下模型(CCR)[8]．该模型没有深入考虑各 DMU 之间的竞争，也必然难以对盈利性组织进行有效评估．

(CCR)

$$\max \frac{U^{\mathrm{T}} Y_0}{V^{\mathrm{T}} X_0} = \theta_0$$

$$\begin{cases} \text{s.t. } \dfrac{U^{\mathrm{T}} Y_j}{V^{\mathrm{T}} X_j} \leqslant 1,\ j = 1,\cdots,n \\ U^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ V^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \end{cases}$$

其中：$X_j$，$Y_j$ 分别为单元 $\mathrm{DMU}_j$ 的投入和产出，$U$，$V$ 为对应的权重向量．模型(CCR)存在两个内在的关联问题：弱识别能力和不合理权重发布．这主要是由于对单元效率的约束过于宽松，导致待评定单元选择最利于自己的权重，而这可能会严重损害其它单元的效率．从经济学的角度来讲，经典的 DEA 模型没有考虑到竞争的存在．实际上，任何一个经营组织既是产品或服务的提供者也是市场的消费者．各个组织将在两个市场上竞争：一方面降低消费成本，另一方面提升产品或服务价值．由于同类产品或服务必然存在竞争，而竞争又必定会对各个单元的效率产生影响．

在考虑竞争公平性的基础上，建立了 Max-min DEA 模型．该模型通过最大化最小效率单元的效率，结合了自评与互评的思路，在一定程度上克服了仅仅采用自评思想的经典 DEA 模型．采用文章 Max-min DEA 模型求解，各个决策单元(DMU)对其它 DMU 的最优权重在效率上是无差异的，从而使 DEA 判别能力和指标权重的设计均有较大程度的改善．由于 Max-min DEA 模型在某种程度上仍然存在不公平，采用 Nash 讨价还价的思想对受损较大的单元进一步进行效率补偿[9]．

## 1 Max-min DEA 模型

设有 $n$ 个 $\mathrm{DMU}_j (j = 1,\cdots,n)$，其输入与输出向量 $X_j$，$Y_j$ 以及输入与输出权向量 $U$，$V$ 分别为

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^{\mathrm{T}} > 0,$$

① 收稿日期：2003-09-25；修订日期：2005-07-07．
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70371023)；教育部博士点基金资助项目(20030358052)；中科院 2004 出国项目资助项目；中科院研究生创新基金与中科大博士创新基金资助项目．
作者简介：吴德胜(1979—)，男，博士．

$j=1,\cdots,n \quad V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$

$Y_j=(y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{sj})^{\mathrm{T}}>0,$

$j=1,\cdots,n \quad U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$

考虑如下模型

$(\overline{F}'^{\mathrm{CCR}})$

$$\max_{U,V}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{U^{\mathrm{T}}Y_j}{V^{\mathrm{T}}X_j}=V_{\overline{F}'}^{\mathrm{CCR}}$$

$$\begin{cases}\text{s.t. } \dfrac{U^{\mathrm{T}}Y_j}{V^{\mathrm{T}}X_j}\leqslant 1 \quad j=1,\cdots,n\\ U^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\ V^{\mathrm{T}}\geqslant 0\end{cases}$$

令 $\alpha=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\dfrac{U^{\mathrm{T}}Y_j}{V^{\mathrm{T}}X_j}$，则$(\overline{F}'^{\mathrm{CCR}})$转变为模型$(\overline{F}^{\mathrm{CCR}})$

$(\overline{F}^{\mathrm{CCR}})$

$$\max \quad V_{\overline{F}}^{\mathrm{CCR}}=\alpha$$

$$\begin{cases}\text{s.t. } 0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{U^{\mathrm{T}}Y_j}{V^{\mathrm{T}}X_j}\leqslant 1 \quad j=1,\cdots,n\\ U^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\ V^{\mathrm{T}}\geqslant 0\end{cases}$$

模型$(\overline{F}^{\mathrm{CCR}})$表明各DMU在效率的竞争上在一定程度上是公平的.这体现在优化目标只与全体DMU中的最小者相关，而与其它具体的某个DMU无关.另外，在各DMU的效率约束域中增加了下限，体现了互评的含义.

对任意单元进行Charnes-Cooper变换，即令 $t=\dfrac{1}{V^{\mathrm{T}}X_i}$，$\forall i\in[1,n]$，$\omega=tV$，$\mu=tU$ 则模型$(\overline{F}^{\mathrm{CCR}})$转变为模型$(F^{\mathrm{CCR}})$.

$(F^{\mathrm{CCR}})$

$$\max V_F^{\mathrm{CCR}}=\alpha$$

$$\begin{cases}\text{s.t. } \omega^{\mathrm{T}}X_j-\mu^{\mathrm{T}}Y_j\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n & (1)\\ \alpha\omega^{\mathrm{T}}X_j-\mu^{\mathrm{T}}Y_j\leqslant 0 & (2)\\ \omega^{\mathrm{T}}X_i=1 & (3)\\ \omega^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\ \mu^{\mathrm{T}}\geqslant 0\end{cases}$$

关于规划$(\overline{F}^{\mathrm{CCR}})$和$(F^{\mathrm{CCR}})$有如下关系：

**定理1** 规划$(\overline{P})$与$(P)$在下列意义下等价：

1）若 $U^*$，$V^*$ 为$(\overline{P})$的解，则 $\omega^*=t^*V^*$，$\mu^*=t^*U^*$ 为$(P)$的解，并且$(\overline{P})$与$(P)$的最优值相等，其中 $t^*=\dfrac{1}{V^{*\mathrm{T}}X_0}$.

2）若 $\omega^*,\mu^*$ 为$(P)$的解，则 $\omega^*,\mu^*$ 也是$(\overline{P})$的解，并且$(\overline{P})$与$(P)$的最优值相等.

**证明** 事实上，规划$(\overline{F}^{\mathrm{CCR}})$和$(F^{\mathrm{CCR}})$的约束域相同，该定理显然成立.

从规划$(\overline{F}^{\mathrm{CCR}})$中可知，规划$(F^{\mathrm{CCR}})$的目标值$\alpha$与任何单个DMU无关，而与全体DMU相关，亦即改变规划$(F^{\mathrm{CCR}})$约束(3)的待评价单元，最优目标值不变，但是，$\omega$与$\mu$的值可能变化.

设求解规划$(F^{\mathrm{CCR}})$后的最优解为$(\alpha_1^*,\omega_{1i}^*,\mu_{1i}^*)$，则所有DMU可分为2类：

$\mathrm{DMU}_{j1} \quad j_1\in J_1, J_1=\{j\mid\alpha_1^*\omega_{1i}^{*\mathrm{T}}X_j-\mu_{1i}^{*\mathrm{T}}Y_j=0\}$，

$\mathrm{DMU}_{j2} \quad j_2\in J_2, J_2=\{j\mid\alpha_1^*\omega_{1i}^{*\mathrm{T}}X_j-\mu_{1i}^{*\mathrm{T}}Y_j>0\}$

其中，$J_1\cup J_2=[1,2,\cdots,n]$.

在上述优化基础上可以形成进一步的优化模型$(F^{1\mathrm{CCR}})$

$(F^{1\mathrm{CCR}})$

$$\max \quad \alpha$$

$$\begin{cases}\text{s.t. } \omega^{\mathrm{T}}X_j-\mu^{\mathrm{T}}Y_j\geqslant 0 & \forall j\in J_2\\ \alpha\omega^{\mathrm{T}}X_j-\mu^{\mathrm{T}}Y_j\leqslant 0 & \forall j\in J_2\\ \alpha_1^*\omega^{\mathrm{T}}X_j-\mu^{\mathrm{T}}Y_j=0 & \forall j\in J_1\\ \omega^{\mathrm{T}}X_i=1\\ \omega^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\ \mu^{\mathrm{T}}\geqslant 0\end{cases}$$

由于$(\alpha_1^*,\omega_{1i}^*,\mu_{1i}^*)$是$(F^{1\mathrm{CCR}})$的可行解，所以$(F^{1\mathrm{CCR}})$有最优解.记$(F^{1\mathrm{CCR}})$的最优解为$(\alpha_2^*,\omega_{2i}^*,\mu_{2i}^*)$，类似$(F^{1\mathrm{CCR}})$模型可以进一步形成优化模型.最后，得到最优解$(\alpha_l^*,\omega_{li}^*,\mu_{li}^*)$，将所有单元分成$l(l\leqslant n)$类，且 $1\geqslant\alpha_l^*>\alpha_{l-1}^*>\cdots>\alpha_1^*>0$[10].

$\mathrm{DMU}_{j_k}: j_k\in J_k, J_k=\{j\mid\alpha_k^*\omega_{li}^{*\mathrm{T}}X_j-\mu_{li}^{*\mathrm{T}}Y_j=0\}$，

$k=1,\cdots,l$

其中，$\bigcup\limits_{k=1,\cdots,l}J_k=[1,2,\cdots,n]$.

不失一般性，记 $\omega_{li}^{*\mathrm{T}}=\omega_i^{*\mathrm{T}}$，$\mu_{li}^{*\mathrm{T}}=\mu_i^{*\mathrm{T}}$.若选择不同的$\mathrm{DMU}_i$，则可以得到$n$组权重 $W_i^*=(\omega_i^*,\mu_i^*)$，$i=1,\cdots,n$.

记 $E_j(W_i^*)=\dfrac{\mu_i^{*\mathrm{T}}Y_j}{\omega_i^{*\mathrm{T}}X_j}$，$i,j=1,\cdots,n$，则由上述优化过程可知

$$E_j(W_i^*)=E_j(W_j^*),\ \forall i,j=1,\cdots,n$$

其中，$E_j(W_j^*)$是在公平竞争下的自评效率.

$E_j(W_i^*)$是在公平竞争下的它评效率.

因此可以得到第2节中的定理与算法.

## 2 基于 Max-min DEA 模型的均衡与性质

**定义 1** (Max-min 均衡技术效率)：若记 $W_i=(\omega_i,\mu_i)$，$E_j(W_i)=\dfrac{\mu_i^{\mathrm T}Y_j}{\mu_i^{\mathrm T}X_j}$，$i,j=1,\cdots,n$，若 $E_j(W_i)=E_j(W_j)$，则称 $E_j(W_i)$ 为对于 $\mathrm{DMU}_j$ 的均衡技术效率.

**定理2** 对于模型($\mathrm{F^{CCR}}$)，存在一组策略权重 $W_i^*=(\omega_i^*,\mu_i^*)$，$i=1,\cdots,n$，使得每个DMU有均衡技术效率，并且均衡技术效率值为 $\alpha_j^*$.

**证明** 由以上分析过程可知，该定理成立.

**推论** 若 $WW_i^*=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\omega_i^*,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i^*\right)$，$\lambda_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，则

$$E_j(WW_i^*)=\alpha_j^*$$

**证明** 显见式(4)成立.

$$\alpha_j^*\omega^{*\mathrm T}X_j-\mu^{*\mathrm T}Y_j=0 \tag{4}$$

式(4)中的每个方程左右两边同乘 $C=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，得到式(5).

$$\alpha_j^*(\omega^{*\mathrm T}C)X_j-(\mu^{*\mathrm T}C)Y_j=0 \tag{5}$$

结论成立.

定理2的意义在于：每个DMU都可达到均衡.此时，$\forall\, i,j$，有 $E_j(W_i^k)=E_j(W_j^k)$，即各DMU的最优效率对其它DMU的最优权重无差异，因此各DMU无偏离该均衡点的动力.

根据定理2及其证明，求解DEA均衡的算法如下：

**步骤1** $k=1$;

**步骤2** 求解规划($\mathrm{F^{CCR}}$).

($\mathrm{F^{CCR}}$)

$$\max\ \alpha$$

$$\begin{cases}\text{s.t.}\ \ \omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j\geqslant 0, & j\in[1,\cdots,n]\\ \alpha\omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j\leqslant 0 & j\in[1,\cdots,n]\\ \omega^{\mathrm T}X_k=1\\ \omega^{\mathrm T}\geqslant 0,\ \mu^{\mathrm T}\geqslant 0\end{cases}$$

得到最优解($\alpha_1^*,\omega_{1i}^*,\mu_{1i}^*$).

步骤2.1 $l=2$;

步骤2.2 求解以下规划($\mathrm{F^{lCCR}}$)

($\mathrm{F^{lCCR}}$)

$$\max\ \alpha_l$$

$$\begin{cases}\text{s.t.}\ \ \omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j\geqslant 0 & \forall j\in J_l\\ \alpha_l\omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j\leqslant 0 & \forall j\in J_l\\ \alpha_{l-1}^*\omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j=0 & \forall j\in J_{l-1}\\ \vdots\\ \alpha_1^*\omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j=0 & \forall j\in J_1\\ \omega^{\mathrm T}X_k=1\\ \omega^{\mathrm T}\geqslant 0,\ \mu^{\mathrm T}\geqslant 0\end{cases}$$

其中，$J_t=\{j\mid\alpha_t^*\omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j=0\}$，$t=1,\cdots,l-1$

$J_l=\{j\mid\alpha_{l-1}\omega^{\mathrm T}X_j-\mu^{\mathrm T}Y_j<0\}$

$$\left(\bigcup_{t=1,\cdots,l-1}J_t\right)\cup J_l=[1,2,\cdots,n]$$

步骤2.3 若 $J_l\neq\varnothing$，则 $l=l+1$ 并转入步骤2.1.

否则，转步骤3.

**步骤3** 记录达到均衡时的最优权重($\omega_k^*,\mu_k^*$)和均衡效率 $\alpha_t$，$t=1,\cdots,l$;

**步骤4** 若 $k<n$，则 $k=k+1$ 并转入步骤2.

否则，程序结束.

上述算法可以求得达到均衡时各DMU的最优权重和各DMU的均衡技术效率.如果只需要计算各DMU的均衡技术效率，只需要选择任意 $k(k\in[1,\cdots,n])$，并执行步骤2到步骤3，因为 $\forall\, k\in[1,\cdots,n]$，$W_k^*=(\omega_i^*,\mu_i^*)$.

令 $e_i=\alpha_i$ 为相对于 $\mathrm{DMU}_i$ 的均衡技术效率，$\theta_i$ 为由CCR模型得到的技术效率.引入虚拟单元 $\mathrm{DMU}_i'$：$(\alpha_i^*X_i,Y_i)=(X_i',Y_i')$，$i=1,\cdots,n$，与原来 $n$ 个DMU合并，则共有 $2n$ 个DMU待评价.

**定理3** 在扩展的可能集上(引入虚拟单元以后)的CCR模型与在经典的CCR可能集上求解均衡的模型等价.

**证明** 在引入虚拟单元以后的CCR模型(L)即

(L)

$$\min\ V_D=\theta$$

$$\begin{cases}\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_jX_j+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^*\gamma_jX_j\leqslant\theta X_0\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_jY_j+\sum_{j=1}^{n}\gamma_jY_j\geqslant Y_0\\ \lambda_j\geqslant 0,\ \gamma_j\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n,\alpha_j^*\ \text{已知}\end{cases}$$

其对偶规划(M)为

(M)

$$\max \quad V_P = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_0$$

$$\begin{cases} \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j \geqslant 0,\ j = 1,\cdots,n \\ \alpha_j^* \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j \geqslant 0 \\ \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_0 = 1 \\ \boldsymbol{\omega} \geqslant 0,\ \boldsymbol{\mu} \geqslant 0 \end{cases}$$

模型(M)为第1节中所阐述的经典CCR可能集上求解的均衡解模型.故命题得证.

## 3　效率讨价还价解

Max-min均衡模型采用最大化最小效率单元的效率的思路,可能导致的问题是:仅仅保护"弱小"单元,会"损害"其它单元的效率,尤其是某些有效单元的效率.下面通过Nash讨价还价模型(6)求解Max-min均衡模型与CCR模型的讨价均衡解.

$$\max_{U,V} \prod_{j=1}^{n} \left( \theta_j^* - \frac{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j} \right) \left( \frac{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j} - \alpha_j^* \right)$$

$$j \neq l,\ l \in IE$$

$$\begin{cases} \text{s.t. } \theta_j^* \geqslant \dfrac{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j} \\ \alpha_j^* \leqslant \dfrac{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j} \quad j = 1,\cdots,n,\ j \neq l \\ \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

其中:$\alpha_j^*$,$\theta_j^*$ 分别为Max-min DEA均衡模型及CCR模型计算的效率,$IE$ 为通过Max-min DEA均衡模型计算的有效单元指标集.$\dfrac{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j}$ 表示参与讨价过程的单元 $\mathrm{DMU}_j$ 的效率.由于单元 $\mathrm{DMU}_l$($l \in IE$)被Max-min DEA均衡模型与CCR模型同时判定为有效,故它(们)不再参与Nash讨价还价过程.模型(6)以最大化各参与单元的Nash讨价还价乘积为目标[11].设模型(6)最优解为($\boldsymbol{U}^*$,$\boldsymbol{V}^*$),则参与Nash讨价还价过程得到的各单元均衡效率解为

$$\theta B_j^* = \frac{\boldsymbol{U}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_j}{\boldsymbol{V}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_j} \ (j \neq l,\ l \in IE)$$

最终所有单元的效率为

$$\theta B_j^* (j \neq l,\ l \in IE,\ j = 1,\cdots,n),\ \theta_l^* (l \in IE).$$

## 4　算例分析

算例包括5个DMU,数据见表1.应用经典CCR DEA模型计算,得到各DMU的最优效率(表2).

表1　例子原始数据

Table1 Original date

| DMU | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 输入1 | 1 | 3 | 5 | 3 | 6 |
| 输入2 | 4 | 1 | 1 | 3 | 1.5 |
| 输出1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

表2　CCR模型最优解

Table2 Optimal solution of CCR model

| | | DMUA | DMUB | DMUC | DMUD | DMUE |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 输入权重 | $\omega_1$ | 0.272 7 | 0 | 0 | 0.2 | 0 |
| | $\omega_2$ | 0.181 8 | 1 | 1 | 0.13 | 0.67 |
| 输出权重 | $\mu$ | 1 | 1 | 1 | 0.73 | 0.67 |
| CCR效率 | | 1 | 1 | 1 | 0.73 | 0.67 |

表3　Max-min均衡解

Table3 Max-min equatibrium

| | | DMU A | DMU B | DMU C | DMU D | DMU E |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 均衡效率 | | 0.555 61 | 1 | 0.714 269 | 0.555 61 | 0.555 61 |
| 输入权重 | $\omega_1^*$ | 0.111 1 | 0.2 | 0.142 86 | 0.111 1 | 0.111 1 |
| | $\omega_2^*$ | 0.222 2 | 0.4 | 0.285 7 | 0.222 2 | 0.222 2 |
| 输出权重 | $\mu^*$ | 0.555 6 | 1 | 0.714 3 | 0.555 6 | 0.555 6 |

比较表2与表3的结果,单元DMUA由有效变为无效,受"损害"程度较大,有必要进行调整.这一点通过图1显示的Max-min均衡解与CCR解可以得到进一步说明.图1中,各单元由原来点A,B,C,D,E投影到A',B',C',D',E'.各单元的前沿面由分段线性面ABC移动到线性面A'D'E'.

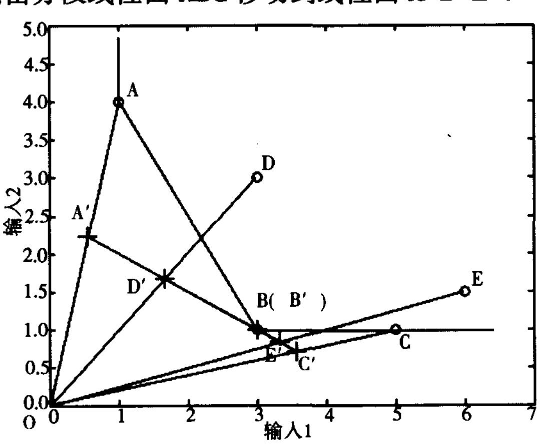


图1　Max-min均衡解与CCR解

Fig.1 Max-min equilibrium solution and CCR solution

利用模型(6)的Nash讨价还价方法得到4个单元的讨价均衡解为DMU A:0.777 8;DMU C:0.858 7;DMU D:0.733 3;DMU E:0.675 4;最终单元排序为DMU B>DMU C>DMU A>DMU D>DMU E.所有被评估单元被有效的区分开来.

## 5 结 论

DEA 模型应用广泛[12].本文建立了 Max-min DEA 模型，该模型通过最大化最小效率单元的效率，考虑了 DMU 之间竞争的公平性，结合了自评与互评的思路，在一定程度上克服了仅仅采用自评思想的经典 DEA 模型.Max-min 均衡模型带来的问题在于保护“弱小”单元的同时，有可能损害其它单元的效率.文中通过 Nash 讨价还价模型求解 Max-min 均衡模型与 CCR 模型的讨价均衡解.演示算例进一步说明文中方法的可行性，比较经典的 CCR 模型，文中方法具有易操作、判别性强的特点.

**参 考 文 献:**


[1]Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision-making units[J]. European Journal of Operational Research, 1978, 2: 429—444.

[2]Charnes A, Cooper W W. Preface to topics in data envelopment analysis[J]. Annals of Operations Research, 1985, 2(1): 59—94.

[3]Charnes A, Thomas D. Measuring the impact of advertising on army recruiting: DEA and advertising effectiveness, CCS Research Report No. 656 Center for Cybernetic Studies, The University of Texas as Austin, 1990.

[4]盛昭瀚，朱 乔，吴广谋. DEA 理论方法与应用[M]. 北京：科学出版社. 1996: 22—41.
Sheng Zhaohan, Zhu Qiao, Wu Guangmo. DEA Theory and Applications[M]. Beijing: Science Press, 1996. 22—41.(in Chinese)

[5]Colli T J. A multi-stage methodology for the solution of orientated DEA models[J]. Operations Research Letters, 1998, 23: 143—149.

[6]Jaume P J. Partitioning input cost efficiency into its allocative and technical components: An empirical DEA application to hospitals [J]. Socio Economic Planning Sciences, 2000, 34(3): 199—218.

[7]Farrell M J. The measurement of productive efficiency[J]. Journal of the Royal Statistic Society, 1957, Ser. A 120, 253—281.

[8]Seiford L M, Thrall R M. Recent development in DEA, the mathematical programming approach to Frontier analysis[J]. Journal of Econometrics, 1990, 46: 7—38.

[9]张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海：上海人民出版社. 1996.
Zhang Weiying. Game Theory and Information Economics[M]. Shanghai: Shanghai People Press, 1996.(in Chinese)

[10]马振华. 现代应用数学手册[M]. 北京：清华大学出版社. 1997.
Ma Zhenhua. Handbook of Modern Application Mathematics[M]. Beijing: Tsinghna University Press, 1997.(in Chinese)

[11]Friedman J W. Game Theory with Application To Economics[M]. New York: Oxford University Press, 1986.

[12]李光金. 评价相对效率的投入—产出型 DEA[J]. 管理科学学报, 2001, 4(2): 199—218.
Li Guangjin. Evaluating relatively efficiency input-output DEA[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(2): 199—218.(in Chinese)


# Max-min DEA model and corresponding Nash bargaining solution

*WU De-sheng*[1], *SHI Qin*[2], *WANG Ming*[1]

1. School of Business, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;
2. School of Machinery and Automobile Engineering, Hefei University of Technology, Heifei 230069, China

**Abstract**: A new data envelopment analysis (max-min DEA) model is proposed by maximizing the efficiency of the minimal efficiency Units. The idea combing self-rated and other-rated schema is adopted in the proposed model. Thus, to some extent, two inter-related problems that are weak discriminating power and unrealistic weight distribution occurred in classical DEA are solved. In this model, efficiency criteria more restrictive than the classical one will yield fewer efficient DMUs and will allow less flexibility for input/output weight distribution. The DEA-Nash equilibrium methods may hurt the efficiency of other DMUs in order to “protect” the minimal efficiency DMU. To deal with the problem, Nash Bargaining approach is applied to yield a solution that characterizes the evaluation process. Finally, conclusions are demonstrated by an example.

**Key words**: data envelopment analysis; Nash equilibrium; programming; weight; bargaining solution