

柔性产品组合最优切换的实物期权方法研究^①

简志宏¹, 李楚霖²

(1. 华中科技大学经济学院, 武汉 430074; 2. 华中科技大学数学系, 武汉 430074)

摘要: 采用与实物期权理论中分析投资项目进入或退出策略相类似的方法, 研究柔性产品组合的最优切换问题, 假设两个产品组合可以永续生产, 净利润流服从几何布朗运动, 产品组合的切换存在成本及在产品组合切换的最优决策时只需考虑产品组合的相对获利能力, 通过求解非线性方程组, 用图示分析的方法研究了利润流的波动程度、切换成本及产品组合的关联度对产品组合最优切换的影响. 与其它实物期权分析中的结论类似, 分析表明净利润波动程度和切换成本的增大将提高触发产品组合最优切换所需的相对获利能力. 还分析了产品组合的关联程度对最优切换的影响, 发现关联程度的增大将减小触发产品组合最优切换所需的相对获利能力.

关键词: 柔性产品组合; 实物期权; 最优切换

中图分类号: F830

文献标识码: A

文章编号: 1007-9807(2006)01-0014-06

0 引言

随着计算机技术的日新月异、机器人技术和材料处理集成系统的日臻成熟, 柔性制造系统(FMS)已经成为现代制造企业的基本构件, 柔性可以看成是制造系统保持长期生产效率的能力. 在柔性制造系统的技术经济分析时, 可以从不同的角度对柔性进行识别和度量; 制造系统的柔性在基本层面上包括机器柔性(machine flexibility)、材料处理柔性(material handling flexibility)和运作柔性(operational flexibility), 在系统层面上包括过程柔性(process flexibility)、产品或产品组合柔性(product flexibility)、流程柔性(routing flexibility)、产量柔性(volume flexibility)和扩张柔性(expansion flexibility)^[1~5]. 产品组合柔性是柔性制造系统最基本的柔性类别, 因为一旦制造企业的柔性系统构建完成, 在日常经营决策时制造企业最为关心的问题是如何依据市场需求的变化最优地变换其制造的产品或产品组合.

产品组合柔性可以定义为制造企业的最终产品在产品组合中或产品组合之间相互转换的能力, 它是与顾客的需求相关的柔性. 产品组合柔性为厂商提供了变换产品组合的可能或机会, 由于这种可能或机会是未来潜在的和不确定的, 因此不能使用传统的净现值方法评估柔性为厂商带来的机会价值, 而投资决策中的实物期权方法^[6~11]自然地成为柔性制造系统技术经济分析的有效方法. 在柔性制造系统的实物期权分析中, Kulatilaka^[12]用随机动态规划方法研究了柔性制造系统的评估问题, 他的评估模型不仅考虑了生产模式的转换的可能和系统的切换成本, 还引入了制造系统的投资等待、系统的暂时关闭等行动选择权, 模型中利润流用均值回转(mean-reverting)的随机过程刻画, 通过递归倒推和求解目标函数值满足的微分方程的方法解决了具有多阶段柔性决策的价值评估问题; Bengtsson-Olhager^[13]用 Monte-Carlo 模拟方法主要分析了市场需求不确定性对产品组合柔性价值的影响, 但没有深入分析和讨论经营

① 收稿日期: 2004-01-12; 修订日期: 2005-12-01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70301003; 70071012).
作者简介: 简志宏(1968—), 男, 四川泸州人, 博士, 副教授.

决策中的产品组合的最优切换规则. 上述的随机动态规划方法和 Monte-Carlo 模拟方法主要适用于生产制造系统的价值评估和方案选择, 分析的重点仍是制造系统的技术经济合理性, 没有分析和讨论产品组合切换的最优决策规则问题, 而目前在理论上还缺少对该问题的系统分析和研究.

本文着重研究制造系统的柔性产品组合最优切换规则, 拟采用与实物期权理论中分析项目投资进入或退出策略相类似的方法^[14], 探讨前述的随机动态规划方法和 Monte-Carlo 模拟方法不能为日常的生产经营决策提供最优决策规则的问题. 在下文的模型设定中, 假设两个产品组合可以永续生产(永远存在市场需求)、产生的(估计或实际)净利润流服从几何布朗运动以及产品组合的切换存在成本, 定义最优决策的关键状态变量为产品组合的相对获利能力; 然后, 在一定的简化性假设条件下推导决策规则满足的非线性方程组; 最后, 在计算示例中通过求解非线性方程组用图示分析的方法研究利润流的波动程度、切换成本及产品组合的关联度对产品组合最优切换的影响.

1 模型与问题的求解

假设公司的制造系统可以生产两种产品组合(以 i 和 j 表示), 但只能选择一种产品组合进行生产; 由于市场需求或制造成本的原因, 两种产品组合为公司带来不同的净利润流, 为最大化系统的价值, 公司的决策者将最优地选择一种产品组合. 令 p_{iu} 和 p_{ju} 分别表示在时间 t 生产产品组合 i 和 j 的净利润流, 假设它们分别服从如下的随机过程

$$dp_{iu}/p_{iu} = \mu_i dt + \sigma_i dw_{iu} \quad (1)$$

$$dp_{ju}/p_{ju} = \mu_j dt + \sigma_j dw_{ju} \quad (2)$$

其中: $\mu_{i,j}$ 和 $\sigma_{i,j}$ 为大于零的常数, 由于两种产品组合的技术含量和生产要素的差异, 它们的净利润流受不同的随机源冲击, $dw_{i,j}$ 为在实际的(统计) 概率测度下标准的 Wiener 过程增量; 由于两种产品组合的生产需投入部分相同的生产要素, 它们的利润存在着一定的相关性, 因此假设 $dw_{iu}dw_{ju} = \rho dt$, 即 Wiener 过程增量的相关系数为 ρ , 相应地产品组合的关联度由相关系数 ρ 来刻画或定义. 注意, 公司的制造系统只能生产一种产品

组合, i 或 j ; 但制造系统可以支出一定的成本后在两种产品组合之间自由切换, 假设从 i 到 j 的切换成本为 $K_{i \rightarrow j} = K_{ij}$, 而从 j 到 i 的切换成本为 $K_{j \rightarrow i} = K_{ji}$. 生产决策问题是, 如何根据两种产品组合(估计) 的净利润流最优地切换两种产品组合的生产? 不失一般性, 假设当前生产的产品组合为 i , 生产决策者可以停止产品组合 i 的生产, 支出切换成本 K_{ij} 后开始产品组合 j 的生产, 由于决策者可以选择切换的时间, 因而拥有最优地选择切换时机的期权. 设从 $i \rightarrow j$ 最优切换的期权价值为 $f(p_i, p_j)$, 在产品组合 i 的持续生产时期, 在微小的时间区间 dt 内, 期权价值的期望增量(资本性收益) 加上净利润的瞬时收益, 应等于正常的无风险收益, 即

$$E[df(p_i, p_j)] + p_i dt = rf(p_i, p_j) dt \quad (3)$$

其中, r 是无风险的收益率, $E(\cdot)$ 表示在风险中性概率测度下的条件期望运算. 由于利润流服从的过程是在实际的概率测度下给出的, 为了运用风险中性评估方法, 需要引入市场风险价格, 把实际的概率测度下的利润流过程转化为风险中性下的随机过程^[15]. 设转换后的利润流过程分别为

$$dp_{iu}/p_{iu} = (r - \delta_i) dt + \sigma_i \tilde{d}w_{iu} \quad (4)$$

$$dp_{ju}/p_{ju} = (r - \delta_j) dt + \sigma_j \tilde{d}w_{ju} \quad (5)$$

其中, \tilde{w}_{iu} 和 \tilde{w}_{ju} 在风险中性概率测度下为标准的 Wiener 过程, 显然 $\tilde{d}w_{iu}\tilde{d}w_{ju} = \rho dt$, δ_i 和 δ_j 分别为产品组合 i 和 j 的便利收益 (convenience yields), 这是实物资产与金融资产的不同之处. 由式(3), 运用 Itô 引理, 可以得到最优切换的期权价值 $f(\cdot, \cdot)$ 满足如下的 PDE

$$\begin{aligned} (r - \delta_i) p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + (r - \delta_j) p_j \frac{\partial f}{\partial p_j} + \\ \frac{1}{2} \sigma_i^2 p_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2} + \rho \sigma_i \sigma_j p_i p_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} + \\ \frac{1}{2} \sigma_j^2 p_j^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_j^2} + p_i = rf \end{aligned} \quad (6)$$

同样地, 假设当前的产品组合为 j , 生产决策者可以根据(估计的) 净利润的变化, 选择停止产品组合 j 的生产、支出切换成本 K_{ji} 后生产产品组合 i 的最优时机, 令此时生产决策者的期权(机会) 价值为 $F(p_i, p_j)$. 与式(3) 类似, 在市场均衡时有

$$E[dF(p_i, p_j)] + p_j dt = rF(p_i, p_j) dt \quad (7)$$

由式(7)、(4)和(5),运用 Itô 引理可以得到最优切换的期权价值 $F(\cdot, \cdot)$ 满足如下的 PDE

$$\begin{aligned} (r - \delta_i) p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} + (r - \delta_j) p_j \frac{\partial F}{\partial p_j} + \\ \frac{1}{2} \sigma_i^2 p_i^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2} + \rho \sigma_i \sigma_j p_i p_j \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} + \\ \frac{1}{2} \sigma_j^2 p_j^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p_j^2} + p_j = rF \end{aligned} \quad (8)$$

一般地,由最优切换的价值匹配 (value matching) 和光滑粘贴^[16] (smooth pasting) 条件,可以用数值方法求解偏微分方程(6)和(8),从而得到最优切换产品组合的边界(或触发点).尽管如此,由于假设产品组合最优切换的期权是永生的,两个产品组合净利润同比例地增大或减小不会改变产品组合的期权价值,因而可以近似地假设产品组合的期权价值具有一阶齐次性,从而简化数值计算;因此,在最优切换产品组合时生产决策者只需关心两个产品组合净利润流的相对变化,设两个产品组合的相对获利能力为 $R = \frac{p_i}{p_j}$. 由 Itô 引理,相对获利能力在风险中性下服从的随机过程为

$$dR/R = (\delta_j - \delta_i + \sigma_j^2 - 2\rho\sigma_i\sigma_j) dt + \sigma_i \tilde{d}w_i - \sigma_j \tilde{d}w_j$$

注意,相对获利能力的变化与无风险利率 r 无关.

若令 $\sigma = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\rho\sigma_i\sigma_j}$, $\tilde{w} = (\sigma_i \tilde{w}_i - \sigma_j \tilde{w}_j) / \sigma$, 则上式可记为

$$dR/R = (\delta_j - \delta_i + \frac{1}{2}(\sigma_j^2 - \sigma_i^2) + \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma \tilde{d}w \quad (9)$$

实物期权价值具有一阶齐次性,即 $f(p_i, p_j) = p_j f(p_i/p_j, 1) = p_j g(R)$. 由式(6), $g(\cdot)$ 满足如下的微分方程

$$\begin{aligned} (\delta_j - \delta_i) R g'(R) + \frac{1}{2} R^2 \sigma^2 g''(R) - \\ \delta_j g + 1 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时,则 $p_i \rightarrow \infty$ 或 $p_j \rightarrow 0$, 生产决策者将永远不会把产品组合 i 切换为产品组合 j , 此时产品组合 i 的价值等于其永生(perpetual) 现金流的价值,即

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f = E \int_0^\infty p_i e^{-nt} dt =$$

$$\int_0^\infty p_i e^{(r-\delta_i)t} e^{-nt} dt = p_i / \delta_i \quad (11)$$

由此可以得到微分方程(10)的边界条件为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} g(R) = \left(\frac{p_i}{p_j}\right) / \delta_i = R / \delta_i \quad (12)$$

同样地, $F(p_i, p_j) = p_j F(p_i/p_j, 1) = p_j h(R)$, $h(\cdot)$ 满足如下的微分方程

$$\begin{aligned} (\delta_j - \delta_i) R h'(R) + \frac{1}{2} R^2 \sigma^2 h''(R) - \\ \delta_j h + 1 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

当 $R \rightarrow 0$ 时,则 $p_i \rightarrow 0$ 或 $p_j \rightarrow \infty$, 生产决策者将永远不会把产品组合 j 切换为产品组合 i , 此时产品组合 j 的价值等于其永生(perpetual) 现金流的价值,即 $\lim_{R \rightarrow 0} F = p_j / \delta_j$, 因此微分方程(13)的边界条件为

$$\lim_{R \rightarrow 0} h = 1 / \delta_j \quad (14)$$

为了求解最优的切换策略,首先给出微分方程(10)和(13)解的一般形式

$$\begin{aligned} g(R) &= A_1 R^{\beta_1} + R / \delta_i \\ h(R) &= A_2 R^{\beta_2} + 1 / \delta_j \end{aligned}$$

其中, A_1 和 A_2 为待定的系数, R / δ_i 和 $1 / \delta_j$ 分别为其特解, β_1 和 β_2 为如下特征方程的负根和正根

$$(\delta_j - \delta_i) \beta + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) - \delta_j = 0$$

由于生产决策者在最优地切换产品组合时只需考虑它们的相对获利能力,若当前的产品组合为 j , 当 i 相对获利能力 R 足够高时,生产决策者将切换产品组合为 i , 设存在较高的临界值 R_H , 当 R 首次达到 R_H 时,生产的产品组合将由 j 切换为 i ; 同样地,若当前的产品组合为 i , 当 i 相对获利能力 R 足够低(j 的相对获利能力足够高)时,生产决策者将切换产品组合为 j , 设存在较低的临界值 R_L , 当 R 首次达到 R_L 时,生产的产品组合将由 i 切换为 j . 由于生产决策者拥有最优地选择切换时机的期权,一般地 $R_H > 1$ 且 $R_L < 1$. 为了得到产品组合最优切换的临界点 R_H 和 R_L , 需要最优切换产品组合的价值匹配条件(value matching)和光滑粘贴(smooth pasting)条件.

价值匹配条件为

$$A_1 R_H^{\beta_1} + \frac{R_H}{\delta_i} = A_2 R_H^{\beta_2} + \frac{1}{\delta_j} - K_j \quad (15)$$

$$A_1 R_H^{\beta_H} + \frac{R_H}{\delta_i} - K_{ji} = A_2 R_H^{\beta_H} + \frac{1}{\delta_j} \quad (16)$$

光滑粘贴条件为

$$A_1 \beta_1 R_L^{\beta_L^{-1}} + \frac{1}{\delta_i} = A_2 \beta_2 R_L^{\beta_L^{-1}} \quad (17)$$

$$A_1 \beta_1 R_H^{\beta_H^{-1}} + \frac{1}{\delta_i} = A_2 \beta_2 R_H^{\beta_H^{-1}} \quad (18)$$

在模型中需要求出待定系数 A_1 和 A_2 及产品组合最优切换的临界点 R_H 和 R_L ，它们可通过求解非线性联立方程组(15)–(18)得到。

2 算例分析

在上面的模型中，给定通过经验实证得到的模型参数，通过求解非线性方程组(15)–(18)，可以得到待定系数和最优切换的触发点，从而求出当前产品组合的价值。在算例中定义相对获利能力指标 $R = \frac{P_i}{P_j}$ ，当 R 增大时产品组合 i 的相对获利能力增大，而产品组合 j 的相对获利能力减小。本节中用 Seidel 迭代法求解非线性方程组^[17]，在一定的模型参数下用图示的方法给出产品组合最优切换的触发点，比较静态分析参数变化对最优切换触发点的影响。

图 1 给出了两个产品组合利润流的波动率对最优切换触发点的影响。为便于分析设两个产品组合的波动率取相同值、作相同幅度的变化，其它参数的取值为 $\rho = 0.5$ ， $\delta_i = 0.06$ ， $\delta_j = 0.04$ ， $K_{i \rightarrow j} = K_{j \rightarrow i} = 1$ 。由图 1 可以看出，当净利润流的波动程度增大时，触发产品组合最优切换所需的相对获利能力逐渐增大，这是由于当波动程度增大时产品组合切换的等待价值（机会价值）增大，生产决策者考虑到最优切换的机会成本，只有当另一产品组合的获利能力足够大时，从一种产品组合的生产转换为另一产品组合的生产才是最优。

图 2 给出了两个产品组合切换成本对最优切换触发点的影响。与图 1 类似，设两个产品组合的切换成本取相同值作相同幅度的变化，其它参数的取值为 $\rho = 0.5$ ， $\delta_i = 0.06$ ， $\delta_j = 0.04$ ， $\sigma_i = 0.3$ ， $\sigma_j = 0.2$ 。由图 1 可以看出，当切换成本逐渐从 1 增大到 2 时，从一种产品组合的生产转换为另一产品组合生产所需相对获利能力逐渐增大，这一结

果与标准的实物期权分析的结论是类似的。

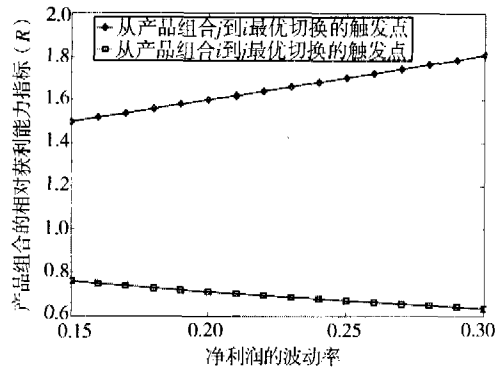


图 1 波动率对产品组合最优切换临界点的影响
Fig. 1 Effect of volatility on optimal switching cutoff of product-mix

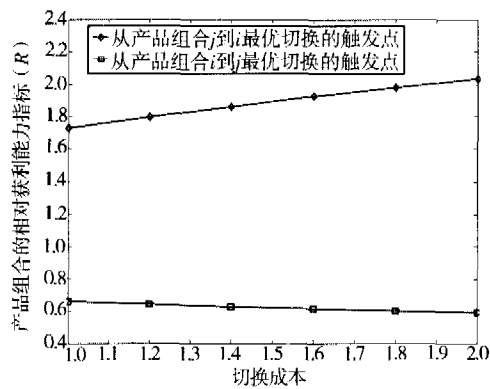


图 2 切换成本对最优切换的影响
Fig. 2 Effect of switching cost on optimal switching of product-mix

图 3 给出了两个产品组合利润流的相关程度对最优切换触发点的影响。相关系数从 0.2 逐渐增大为 1(完全相关)，其它参数的取值为 $\delta_i = 0.06$ ， $\delta_j = 0.04$ ， $\sigma_i = 0.3$ ， $\sigma_j = 0.2$ ， $K_{i \rightarrow j} = K_{j \rightarrow i} = 1$ 。由图 3 可以看出，当产品组合的相关性(关联度)增大时，从一种产品组合的生产转换为另一产品组合生产所需的相对获利能力逐渐减小，这意味着当关联度增大时最优切换等待的机会价值减小，一种产品组合的平均生产时间将缩短。最优切换所需的相对获利能力增大时，达到产品组合切换的触发点或阈值的平均时间越长，因此在设计柔性制造系统时需考虑产品组合的关联度，为了延长产品组合的平均生产时间，应减小产品组合净利润流的相关性或关联度，反之则应增大其关联度。

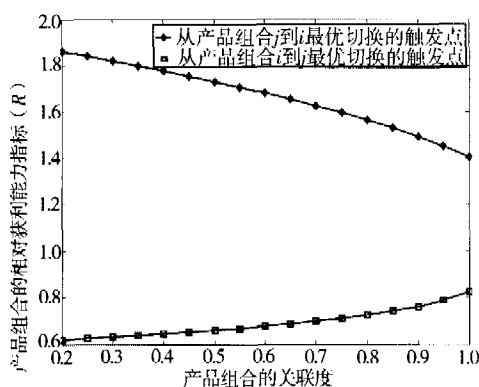


图3 产品组合的关联度对产品组合最优切换临界点的影响

Fig.3 Effect of product-mix's correlation on optimal switching

3 结束语

本文在比较简化的假设条件下分析了柔性产品组合的最优切换问题。一般地,柔性制造系统具有制造多种产品组合的能力;产品组合的净利润流也不一定服从几何布朗运动,可能服从其它的如同利率期限结构模型中的 Vasicek^[18]期望回转过程或 Cox-Ingersoll-Ross^[19]的平方根扩散过程。对于如何在更为复杂或接近现实环境的情形下给出产品组合最优切换的触发点或阈值,需要在柔性制造系统的实物期权分析中做进一步的研究。

参考文献:

- [1] Andreou S A. A capital budgeting model for product-mix flexibility[J]. Journal of Manufacturing and Operations Management, 1990, (3): 5—23.
- [2] Bengtsson J. Manufacturing flexibility and real options: A review[J]. International Journal of Production Economics, 2001(74): 213—224.
- [3] Karsak E, Ozogul C. An option approach to valuing expansion flexibility in flexible manufacturing system investments[J]. The Engineering Economist, 2002, (47): 169—193.
- [4] Mandelbaum M, Buzacott J. Flexibility and decision making[J]. European Journal of Operational Research, 1990, (44): 17—27.
- [5] Parker R D, Wirth A. Manufacturing flexibility: Measures and relationship[J]. European Journal of Operational Research, 1999, (118): 429—449.
- [6] 安瑛晖, 张 维. 期权博弈理论的方法模型与发展[J]. 管理科学学报, 2001, 4(1): 138—144.
An Ying-hui, Zhang Wei. Analysis and development of the method and model of option-game theory[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(1): 38—44. (in Chinese)
- [7] 范龙振, 唐国兴. 投资机会价值与投资决策: 几何布朗运动模型[J]. 系统工程学报, 1998, 13(3): 8—12.
Fan Long-zhen, Tang Guo-xing. The value of investment opportunity and investment decision: Geometric Brownian motion model [J]. Journal of System Engineering, 1998, 13(3): 8—12. (in Chinese)
- [8] 范龙振, 唐国兴. 项目价值的期权评价方法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(1): 17—23.
Fan Long-zhen, Tang Guo-xing. Real option approach to project valuation[J]. Journal of System Engineering, 2001, 16(1): 17—23. (in Chinese)
- [9] 简志宏, 李楚霖. 高新技术产业化的实物期权分析[J]. 管理工程学报, 2002, 16(4): 76—79.
Jian Zhihong, Li Chulin. The real option analysis of high-tech industrialized[J]. Management Engineering Academic, 2002, 16(4): 76—79. (in Chinese)
- [10] 简志宏, 李楚霖. 公司债务重组的实物期权方法研究[J]. 管理科学学报, 2002, 5(5): 38—43.
Jian Zhihong, Li Chulin. The real option approach to corporate debt reorganization[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(5): 38—43. (in Chinese)
- [11] 刘金山, 胡适耕. 企业的进入与研究开发策略[J]. 管理科学学报, 2003, 6(5): 53—57.
Liu Jin-shan, Hu Shi-geng. Strategy of firm's entry, research and development[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(5): 53—57. (in Chinese)
- [12] Kulatilaka N. Valuing the flexibility of flexible manufacturing system[J]. IEEE Transaction on Engineering Management, 1988, 35(4): 250—257.

- [13] Bengtsson J, Olhager J. Valuation of product-mix flexibility using real options[J]. *International Journal of Production Economics*, 2002, (78): 13—28.
- [14] Dixit A K, Pindyck R S. *Investment under Uncertainty*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1994. 216—218.
- [15] Hull J C. *Options, Futures and other Derivatives*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 248.
- [16] Dumas B. Super contact and related optimality conditions[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1991, (15): 675—695.
- [17] Mathews J H, Fink K D. *Numerical Methods Using MALAB*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- [18] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, (5): 177—188.
- [19] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rate[J]. *Econometrica*, 1985, 53(2): 385—407.

Real option approach to optimal switching of flexible product-mix

JIAN Zhi-hong¹, LI Chu-lin²

1. Economic School, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

Abstract: This paper analyzes the optimal switching of flexible product-mix using similar real option approach which is applied to study combined entry and exit strategies in project investment. The key assumptions are that one product-mix can be perpetually produced while two product-mixes exist perpetually, the cash flow follows geometric Brownian motion, there exists switching cost, and only relative profitability of product-mix is considered in the optimal decision making. By solving nonlinear set of equations, the effects of volatility, switching cost and correlation of product-mix on the optimal switching are analyzed via a numerical example. It shows that the triggering level of relative profitability is increasing with the increases of volatility and switching cost, which is similar to other results in real option theoretical applications. Furthermore, the analysis of the effect of product-mix's correlation on the optimal switching demonstrates that an increase in the correlation decreases the triggering level of relative profitability.

Key words: flexible product-mix; real option; optimal switching