第9卷第2期
2006年4月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol.9 No.2
Apr. 2006

基于向量夹角余弦的组合预测模型的性质研究①

陈华友[1]，盛昭瀚[2]，刘春林[3]
(1. 安徽大学数学与计算科学学院，合肥 230039；2.南京大学工程管理学院，南京 210093；
3.南京大学商学院，南京 210093)

摘要：基于向量夹角余弦的组合预测是一种相关性的组合预测模型，它是研究组合预测方法的一个新途经.针对基于向量夹角余弦准则下组合预测模型，研究它的基本结构特征.首先提出新的优性组合预测、预测方法优超、冗余度等概念.然后探讨了非劣性组合预测、优性组合预测以及冗余预测方法的存在性，并给出冗余信息的判定定理.最后进行实例分析，表明该方法有较大的实际应用价值.

关键词：向量夹角的余弦；非劣性组合预测；优性组合预测；预测方法优超；冗余度

中图分类号：O221.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－9807(2006)02－0001－08

0 引 言

不同的定性预测方法和定量预测方法各有其优点和缺点.由于每种预测方法利用的数据源不尽相同，不同的数据源都是从不同的角度提供各方面有用的信息，因此每种预测方法之间并不是相互排斥，而是相互联系、相互补充的.在预测过程中，如果想当然地认为某个单项预测方法的预测误差较大，就把该种预测方法弃之不用，这可能造成部分有用的信息丢失.因此，Bates J M 和 Granger C W J[1]已于1969年首次提出组合预测方法的概念.组合预测就是综合利用各种单个预测模型所提供的信息，以其适当的加权平均形式得出组合预测模型.其核心的问题就是如何求出加权平均系数，使得组合预测模型更加有效地提高预测精度.组合预测方法一直是国内外预测界研究的热点课题之一[1~15].

根据建立的某个准则的优劣程度，组合预测模型可以分为劣性组合预测、非劣性组合预测、优性组合预测.文献[2]针对无非负约束的以误差平方和达到最小的最优组合预测模型，提出了劣性组合预测、非劣性组合预测、优性组合预测的概念，并利用组合预测绝对误差信息矩阵的性质判断简单平均方法是非劣性组合预测、优性组合预测的条件.文献[3]针对基于预测有效度的组合预测模型提出了优性组合预测、预测方法优超和冗余度的概念，探讨了优性组合预测存在的充分条件，也给出冗余信息出现的两个判定.文献[4]给出了四种基于相关性指标的最优组合预测模型，即关联度最大化组合预测模型，相关系数最大化组合预测模型，夹角余弦最大化组合预测模型，Theil不等系数最小化组合预测模型.但文献[4]只从实证分析角度说明了基于相关性的组合预测方法也能够取得比较好的组合预测效果.本文主要针对文献[4]提出的基于向量夹角余弦的组合预测模型，给出新的优性组合预测、预测方法优超、冗余度等概念，研究它的性质，从而在理论上说明基于向量夹角余弦的组合预测方法的有

① 收稿日期：2003－07－14；修订日期：2004－09－21.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70571001)；中国博士后科学基金资助项目(2004035209)；安徽省教育厅科研基金资助项目(2005kj208).
作者简介：陈华友(1969—)，男，安徽和县人，博士，教授.

效性.

1 符号说明及概念

设某社会经济现象的指标序列的实际值为$\{x_t, t = 1,2,\cdots, N\}$,设:有 m 个单项预测方法对其进行预测;第 i 种单项预测方法第 t 时刻的预测值为 $x_{it}, t = 1,2,\cdots,N, i = 1,2,\cdots, m$; $l_1, l_2\cdots, l_m$ 为 m 种单项预测方法在组合预测中的加权系数,且满足 $\sum_{i=1}^{m} l_i = 1, l_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m$.根据加权算术平均的组合预测原理,则有

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^{m} l_i x_{it},\ t = 1,2,\cdots,N \tag{1}$$

其中,$\hat{x}_t$ 表示第 t 时刻预测对象实际值 x_t 的组合预测值.

令 $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2,\cdots, x_N]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_i = [x_{i1}, x_{i2},\cdots, x_{iN}]^{\mathrm{T}}, i = 1,2,\cdots,m$, $\hat{\boldsymbol{X}} = [\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_N]^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{X}$ 表示预测对象实际值向量,$\boldsymbol{X}_i$ 表示第 i 种单项预测方法预测值向量,$\hat{\boldsymbol{X}}$ 表示组合预测值向量.

令

$$\eta_i = \frac{\sum_{t=1}^{N} x_t x_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_{it}^2}},\ i = 1,2,\cdots,m,$$

$$\eta = \frac{\sum_{t=1}^{N} x_t \hat{x}_t}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\sum_{t=1}^{N} \hat{x}_t^2}} \tag{2}$$

根据两个向量夹角的余弦计算公式知:η_i 为第 i 种单项预测方法预测值向量 $\boldsymbol{X}_i$ 与预测对象实际值向量 $\boldsymbol{X}$ 的夹角余弦,η 为组合预测值向量 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 与实际值向量 $\boldsymbol{X}$ 的夹角余弦.

再令

$$\boldsymbol{L} = (l_1, l_2,\cdots,l_m)^{\mathrm{T}}$$

$$F_{ij} = \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_j = \sum_{t=1}^{N} x_{it}x_{jt}$$

$$i,j = 1,2,\cdots,m, \boldsymbol{F} = (F_{ij})_{m\times m} \tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{L}$ 表示组合预测加权系数列向量,F_{ij} 表示向量 $\boldsymbol{X}_i$ 与 $\boldsymbol{X}_j$ 的内积,$\boldsymbol{F}$ 表示 $m\times m$ 的方阵,$\boldsymbol{F}$ 称为组合预测信息矩阵.则有

$$\sum_{t=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{m} l_i x_{it}\Big)^2 = \sum_{t=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j x_{it} x_{jt}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j\Big(\sum_{t=1}^{N} x_{it}x_{jt}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j F_{ij} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} \tag{4}$$

把式(1)代入到式(2)的 η 中并注意式(3)、(4),则向量夹角余弦 η_i、η 可以写成如下形式

$$\eta_i = \frac{\sum_{t=1}^{N} x_t x_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{F_{ii}}},\ i = 1,2,\cdots,m$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i \sum_{t=1}^{N} x_t x_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}}} \tag{5}$$

显然组合预测值与实际值向量的向量夹角的余弦 η 为各种单项预测方法的加权系数 $l_1, l_2,\cdots, l_m$ 的函数,记为 $\eta(l_1, l_2,\cdots,l_m)$.为了使组合预测值逼近实际值,我们希望 $\boldsymbol{X}$ 和 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 这两个向量之间的夹角愈小愈好.也就是向量夹角余弦愈大愈好,所以 $\eta(l_1, l_2,\cdots,l_m)$ 越大表示组合预测方法越有效.当 $\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}$ 时,其向量夹角余弦达到最大值1.然而组合预测误差也是不可避免的.因此基于向量夹角余弦的最优组合预测模型可表示成如下形式[4],记为模型(1)

$$\max \eta(l_1, l_2,\cdots,l_m) = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i \sum_{t=1}^{N} x_t x_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}}}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} l_i = 1,\\ l_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{6}$$

记 $\eta_{\min} = \min\{\eta_i, i = 1,2,\cdots,m\}$, $\eta_{\max} = \max\{\eta_i, i = 1,2,\cdots,m\}$,即 $\eta_{\min}$ 表示 m 种单项预测值向量与实际值向量的夹角余弦中的最小者,$\eta_{\max}$ 表示 m 个向量夹角余弦中的最大者,则有如下定义.

定义1 设 $\eta(l_1, l_2,\cdots,l_m)$ 为组合预测值向量与实际值向量的夹角余弦,若 $\eta(l_1, l_2,\cdots,l_m) < \eta_{\min}$,则称权系数 $l_1, l_2,\cdots,l_m$ 确定的组合预测模型为劣性组合预测,若 $\eta_{\min} \leqslant \eta(l_1, l_2,\cdots,l_m) \leqslant \eta_{\max}$,则称之为非劣性组合预测,若 $\eta(l_1, l_2,\cdots,l_m) > \eta_{\max}$,则称之为优性组合预测.

定义1表明只有组合预测值向量与预测对象实际值向量的夹角余弦大于各单项预测值向量与预测对象实际值向量的夹角余弦中最大者，则该组合预测模型才是优性的．即以向量夹角余弦作为判断准则，优性组合预测一定比“最好”的单项预测方法还要“好”．

定义2　若第 i 种和第 k 种单项预测方法预测值向量与其它单项预测方法预测值向量以及实际值向量的内积满足如下关系式

$$F_{ij} < F_{kj},\ j = 1,2,\cdots,m,$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t x_{it} > \sum_{t=1}^{N} x_t x_{kt}$$

则称第 i 种单项预测方法基于向量夹角的余弦优超第 k 种单项预测方法．

实际上，由定义2知，$F_{ii} < F_{ki}$，$F_{ik} < F_{kk}$，由式(3)知，$F_{ki} = F_{ik}$，则有 $F_{ii} < F_{kk}$．因此若第 i 种单项预测方法优超第 k 种单项预测方法，则由向量夹角余弦计算式知：$\eta_i > \eta_k$．因此就向量夹角的余弦而言，直观上可以认为第 i 种单项预测方法获得预测值更“接近”于实际值，即第 i 种单项预测方法要“好于”第 k 种单项预测方法．

定义3　若某种单项预测方法在组合预测模型最优权系数中为零，则称该单项预测方法为冗余预测方法．即该种单项预测方法增加到组合预测模型中不能增加组合预测向量夹角的余弦，表明该种单项预测方法只提供冗余信息．

定义4　在一个组合预测模型中，设共有 m 种单项预测方法参与组合预测，若最优解中出现冗余预测方法的个数为 m'，则称比例 $k = m'/m$ 为组合预测模型的冗余度．

显然，$0 \leqslant k \leqslant (m-1)/m$．$k = 0$ 表示 m 种单项预测方法在一个组合预测模型中均提供有效信息，此时不存在冗余预测方法．$k = (m-1)/m$ 表示只有一个单项预测方法提供有效信息，而其它 $(m-1)$ 个预测方法均为冗余预测方法．

2　基于向量夹角余弦的非劣性组合预测和优性组合预测的存在性

先引进一个引理

引理　假定 $m(m < N)$ 种单项预测方法的预测值向量组 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 是线性无关的，则组合预测信息矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为正定矩阵．

证明　记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m)$，其中 $\boldsymbol{X}_i = [x_{i1},\ x_{i2},\cdots,\ x_{iN}]^{\mathrm{T}}$，$i = 1,2,\cdots,m$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_m \\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{X}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{X}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_m \end{pmatrix} = (F_{ij})_{m\times m} = \boldsymbol{F}$$

所以 $\boldsymbol{F}$ 为对称矩阵，记 $\boldsymbol{Y} = (y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{Y} \neq 0$ 时，则 $\boldsymbol{AY} \neq 0$，否则，存在不全为零的数 $y_1,y_2,\cdots,y_m$，使得 $\boldsymbol{AY} = 0$，由分块矩阵乘法知 $\boldsymbol{AY} = y_1\boldsymbol{X}_1 + y_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{X}_m$，则有

$$y_1\boldsymbol{X}_1 + y_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{X}_m = 0$$

所以预测值向量组 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 是线性相关的，此与条件矛盾．

对任意的 $\boldsymbol{Y} \neq 0$，二次型 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{FY} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AY} = (\boldsymbol{AY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AY} > 0$，所以二次型为正定二次型，即组合预测信息矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为正定矩阵．　证毕．

该引理表明在预测值向量组 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 是线性无关的条件下，组合预测信息矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为正定阵．

定理1　假定 $m(m < N)$ 种单项预测方法的预测值向量组 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 是线性无关的，基于向量夹角余弦的组合预测模型(1)的任一个可行解对应的组合预测至少是非劣性组合预测．

证明　设 $\boldsymbol{L} = (l_1,l_2,\cdots,l_m)^{\mathrm{T}}$ 为组合预测模型(1)的任一个可行解，则有

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = 1,\ l_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m \tag{7}$$

设 m 种单项预测方法预测值向量与预测对象实际值向量的向量夹角余弦按大小排序为：$\eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \cdots \geqslant \eta_m$，即 $\eta_1 = \max\{\eta_i, i = 1,2,\cdots,m\}$，$\eta_m = \min\{\eta_i, i = 1,2,\cdots,m\}$，所以对任意的 η_i，均有下式成立

$$\eta_i \geqslant \eta_m,\ i = 1,2,\cdots,m-1$$

再根据式(5)得

$$\sum_{t=1}^{N} x_t x_{it} \geqslant \eta_m \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{F_{ii}}, i = 1,2,\cdots,m-1$$

从而

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i \sum_{t=1}^{N} x_t x_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}}} \geqslant \frac{\eta_m \sum_{i=1}^{m} l_i \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{F_{ii}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}}}$$

故

$$\eta \geqslant \frac{\eta_m \sum_{i=1}^{m} l_i \sqrt{F_{ii}}}{\sqrt{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}}} \tag{8}$$

因为向量组 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ 是线性无关的，由引理知组合预测信息矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为正定阵，所以它的任意二阶子式 $\begin{vmatrix} F_{ii} & F_{ij} \\ F_{ij} & F_{jj} \end{vmatrix} > 0$，则有 $F_{ij}^2 < F_{ii}F_{jj}$，注意到 $l_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m$，从而

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j F_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j \sqrt{F_{ii}}\sqrt{F_{jj}}$$

故

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} l_i \sqrt{F_{ii}}\right)^2 \tag{9}$$

由式(7)、(8)、(9) 得：$\eta \geqslant \eta_m$，再由定义 1 得结论成立. 证毕.

定理 1 表明从组合预测向量夹角余弦的角度而言，组合预测模型(1) 的任一个归一化非负权系数所对应的组合预测均不会比“最差”的单项预测方法还要“差”.

推论 简单组合预测方法至少是非劣性组合预测.

证明 因为在简单组合预测方法中，即令组合预测权系数 $l_1 = l_2 = \cdots = l_m = 1/m$，显然它们是组合预测模型(1) 的一个可行解，由定理 1 知结论成立. 证毕.

以向量夹角的余弦作为判断准则，优性组合预测一定比“最好”的单项预测方法还要“好”. 因此研究优性组合预测的存在性具有一定的理论意义.

定理 2 假定 $m(m < N)$ 种单项预测方法的预测值向量组 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ 是线性无关的，基于向量夹角余弦的组合预测模型的冗余度 $k < (m-1)/m$，则最优解对应的组合预测一定是优性组合预测.

证明 设 $\boldsymbol{L}^* = (l_1^*, l_2^*, \cdots, l_m^*)^{\mathrm{T}}$ 为模型(1) 的最优解，$\boldsymbol{L} = (l_1, l_2, \cdots, l_m)^{\mathrm{T}}$ 为其某一个可行解而不是最优解，则有

$$\sum_{i=1}^{m} l_i^* = 1, l_i^* \geqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = 1,\ l_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m \tag{10}$$

因为基于向量夹角余弦的组合预测模型(1) 目标函数是求最大值的，故有

$$\eta(l_1^*, l_2^*, \cdots, l_m^*) > \eta(l_1, l_2, \cdots, l_m) \tag{11}$$

由式(9)、(10) 知：$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j \sqrt{F_{ii}}\sqrt{F_{jj}} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j \frac{F_{ii} + F_{jj}}{2}$，故有 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} \leqslant \sum_{i=1}^{m} l_i F_{ii}$. 由于

$$\eta(l_1, l_2, \cdots, l_m) = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i \sum_{t=1}^{N} x_t x_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}}}$$

因而

$$\eta(l_1, l_2, \cdots, l_m) \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i \sum_{t=1}^{N} x_t x_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} l_i F_{ii}}} \tag{12}$$

因为组合预测模型的冗余度 $k < (m-1)/m$，所以最优解中至少有两个非 0 分量，从而 $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \cdots, (0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 这 m 个 m 维单位列向量分别是组合预测模型(1) 的可行解而不是最优解，由式(11)、(12) 知

$$\begin{cases} \eta(l_1^*, l_2^*, \cdots, l_m^*) > \eta(1,0,\cdots,0) \geqslant \eta_1 \\ \eta(l_1^*, l_2^*, \cdots, l_m^*) > \eta(0,1,\cdots,0) \geqslant \eta_2 \\ \cdots\cdots \\ \eta(l_1^*, l_2^*, \cdots, l_m^*) > \eta(0,0,\cdots,1) \geqslant \eta_m \end{cases}$$

所以 $\eta(l_1^*, l_2^*, \cdots, l_m^*) > \max\{\eta_i, i = 1,2,\cdots,m\} = \eta_{\max}$

再由定义 1 得结论成立. 证毕.

定理 2 表明在 m 种单项预测方法参与的基于向量夹角余弦的组合预测模型中，最优解里只要有两个以上的分量不为 0，即两个以上单项预测方法提供有效信息，则最优解所对应的组合预测方法要“好于”单项预测方法中的“最好”者，可见最优组合预测模型确实综合利用了单项预测方法

提供的信息.

3　冗余预测方法的存在性及其判定

基于向量夹角余弦的组合预测模型(1)有如下结论成立.

定理3　基于向量夹角余弦的组合预测模型的最优目标函数值是参与组合预测的各单项预测方法总个数 m 的单调不减函数,即

$$\eta(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)\leqslant\eta(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})$$

其中,$\eta(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)$ 表示 m 个单项预测方法参与的基于向量夹角余弦的组合预测模型对应的最大向量夹角的余弦,$\eta(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})$ 表示再增加一个单项预测方法共 $m+1$ 个单项预测方法对应的最大向量夹角的余弦.

证明　设 $\boldsymbol{L}^*=(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)^{\mathrm{T}}$ 为 m 个单项预测方法参与的组合预测模型(1)的最优解,其最优目标函数值为

$$\eta(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)=\frac{\sum_{i=1}^{m}l_i^*\sum_{t=1}^{N}x_tx_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N}x_t^2}\sqrt{\boldsymbol{L}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}^*}}\tag{13}$$

其中,$\sum_{i=1}^{m}l_i^*=1,\ l_i^*\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m$.

同理,设 $\bar{\boldsymbol{L}}=(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})^{\mathrm{T}}$ 为再增加一个单项预测方法,共 $m+1$ 个单项预测方法参与的基于向量夹角余弦的组合预测模型的最优解,其最优目标函数值为

$$\eta(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})=\frac{\sum_{i=1}^{m+1}\bar{l}_i\sum_{t=1}^{N}x_tx_{it}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N}x_t^2}\sqrt{\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{m+1}\bar{\boldsymbol{L}}}}\tag{14}$$

其中,$\boldsymbol{F}_{m+1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}&\boldsymbol{f}\\\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}&F_{(m+1)(m+1)}\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{f}=\left(F_{1(m+1)},F_{2(m+1)},\cdots,F_{m(m+1)}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$F_{i(m+1)}=\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{m+1}=\sum_{t=1}^{N}x_{it}x_{(m+1)t},\quad i=1,2,\cdots,m+1$$

$F_{i(m+1)}$ 表示第 i 种单项预测方法与第 $m+1$ 种单项预测方法预测值向量的内积,$\boldsymbol{F}_{m+1}$ 表示 $m+1$ 个单项预测方法参与的$(m+1)$阶组合预测信息矩阵.且 $\sum_{i=1}^{m+1}\bar{l}_i=1,\ \bar{l}_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m+1$,令 $\boldsymbol{L}=(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*,0)^{\mathrm{T}}$,显然 $\boldsymbol{L}$ 为 $m+1$ 个单项预测方法参与的基于向量夹角余弦的组合预测模型的可行解,则有

$$\eta(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})\geqslant\eta(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*,0)$$

由式(14)得:$\eta(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*,0)=\eta(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)$.所以 $\eta(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)\leqslant\eta(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})$,即结论成立.　证毕.

通常认为随着参与组合预测的单项预测方法个数 m 的增加,基于向量夹角余弦的组合预测模型的最优解一定是 m 的严格单调增加函数,然而定理3证明了当再增加一个单项预测方法时,基于向量夹角余弦的组合预测模型的最优目标函数值可能不变.这表明组合预测模型可能存在冗余预测方法.下面一个定理为冗余信息提供了判定.

定理4　在基于向量夹角余弦的组合预测模型中,若第 i 种单项预测方法优超第 k 种单项预测方法,则组合预测模型的冗余度至少为 $1/m$.

证明　采用反证法.假设 $\boldsymbol{L}^*=(l_1^*,\cdots,l_i^*,\cdots,l_k^*,\cdots,l_m^*)^{\mathrm{T}}$ 为组合预测模型的最优解且第 k 种单项预测方法不为冗余预测方法,即

$$l_k^*>0,且\sum_{i=1}^{m}l_i^*=1$$

则与 $\boldsymbol{L}^*$ 对应的组合预测模型的目标函数值为

$$\eta(l_1^*,\cdots,l_i^*,\cdots,l_k^*,\cdots,l_m^*)=\frac{\sum_{j=1}^{m}l_j^*\sum_{t=1}^{N}x_tx_{jt}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N}x_t^2}\sqrt{\boldsymbol{L}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}^*}}\tag{15}$$

构造另外一个向量 $\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}^*+\tilde{\boldsymbol{L}}=(l_1^*,\cdots,l_i^*+l_k^*,\cdots,0,\cdots,l_m^*)$,其中 $\tilde{\boldsymbol{L}}=(0,\cdots,l_k^*,\cdots,-l_k^*,\cdots,0)$,即 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 的第 i 个分量为 l_k^*,第 k 个分量为 $-l_k^*$,其余 $m-2$ 个分量全为0.显然 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 为组合预测模型(1)的一可行解,与 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 对应组合预测模型的目标函数值为

$$\eta(l_1^*,\cdots,l_i^*+l_k^*,\cdots,0,\cdots,l_m^*)=\frac{\sum_{j=1}^{m}l_j^*\sum_{t=1}^{N}x_tx_{jt}+l_k^*\sum_{t=1}^{N}x_tx_{it}-l_k^*\sum_{t=1}^{N}x_tx_{kt}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N}x_t^2}\sqrt{\hat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{L}}}}\tag{16}$$

而

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{L}} &= (\boldsymbol{L}^* + \widetilde{\boldsymbol{L}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{L}^* + \widetilde{\boldsymbol{L}}) \\ &= \boldsymbol{L}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}^* + 2\widetilde{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}^* + \widetilde{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\widetilde{\boldsymbol{L}} \\ &= \boldsymbol{L}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}^* + 2l_k^*\sum_{j\neq k}l_j^*(F_{ij} - F_{kj}) + \\ &\quad l_k^{*2}(F_{ii} - F_{kk}) \qquad (17)\end{aligned}$$

又因为第 i 种单项预测方法优超第 k 种单项预测方法,所以由定义 2 知

$$F_{ii} < F_{kk}, F_{ij} < F_{kj},\ j = 1,\cdots,m,\ j \neq k,$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t x_{it} > \sum_{t=1}^{N} x_t x_{kt}$$

注意到假设 $l_k^* > 0$,且由式(17)知

$$\hat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{L}} < \boldsymbol{L}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}^*$$

且

$$\sum_{j=1}^{m} l_j^* \sum_{t=1}^{N} x_t x_{jt} + l_k^* \sum_{t=1}^{N} x_t x_{it} - l_k^* \sum_{t=1}^{N} x_t x_{kt} > \sum_{j=1}^{m} l_j^* \sum_{t=1}^{N} x_t x_{jt} \qquad (18)$$

所以由式(15)、(16)、(18)得

$$\eta(l_1^*,\cdots,l_i^* + l_k^*,\cdots,0,\cdots,l_m^*) > \eta(l_1^*,\cdots,l_i^*,\cdots,l_k^*,\cdots,l_m^*),$$

而这与 $\boldsymbol{L} = (l_1^*,\cdots,l_i^*,\cdots,l_k^*,\cdots,l_m^*)^{\mathrm{T}}$ 为组合预测模型(1)的最优解矛盾,所以假设不成立.从而第 k 种单项预测方法一定是冗余预测方法,此即组合预测模型(1)的冗余度至少为 $1/m$. 证毕.

4 实例分析

太阳活动规律的模拟与预测是全球多学科研究的热点问题之一,尤其是太阳黑子相对数极大极小的年份和数值更为世界所关注[15].文献[15]利用太阳黑子数从1700年至1979年共280年的时间序列数据建立了五种时间序列模型(原始时间序列数据参见文献[16]),这里取其中的三种时间序列模型进行基于向量夹角余弦的组合预测来说明本模型的有效性.这三种时间序列模型[15]分别是

1) 非线性门限自回归模型(TAR)

设太阳黑子数时间序列为$\{Z_t,\ t = 1, 2, \cdots, 280\}$,对$\{Z_t,\ t = 1, 2, \cdots, 280\}$进行 Box-Cox 变换得$\{X_t,\ t = 1, 2, \cdots, 280\}$,即令,$X_t = (Z_t^{0.5} - 1)/0.5 = 2(\sqrt{Z_t} - 1)$,$t = 1, 2, \cdots, 280$,再对$\{X_t\}$建立 TAR 模型得

$$X_t = \begin{cases} 1.965\,9 + 0.805\,2X_{t-1} + 0.105\,3X_{t-2} - 0.268\,1X_{t-3} + 0.107X_{t-4} - 0.184\,4X_{t-5} - 0.019\,9X_{t-6} + \\ \quad 0.177\,2X_{t-7} - 0.225\,8X_{t-8} + 0.119\,0X_{t-9} + 0.140\,9X_{t-10} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{当 } X_{t-8} \leqslant 12 \\ 4.875\,1 + 1.419\,6X_{t-1} - 0.826\,1X_{t-2} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{当 } X_{t-8} > 12 \end{cases}$$

2) 不含趋势的叠合模型

$$Z_t = -\mathrm{e}^{0.003\,824t}\left(9.189\sin\frac{2\pi t}{11} + 9.841\cos\frac{2\pi t}{11}\right) + 52.26 + X_t$$

其中,$X_t = 1.168X_{t-1} - 0.428\,3X_{t-2} - 0.156\,1X_{t-3} + 0.187\,4X_{t-4} - 0.111\,5X_{t-5} + 0.038\,94X_{t-6} + 0.018\,96X_{t-7} - 0.019\,2X_{t-8} + 0.195\,5X_{t-9} + \varepsilon_t$

3) 自回归模型(AR(p))

令 $X_t = Z_t - 48.988\,6$,对$\{X_t\}$建立 AR(9) 模型得

$$X_t = 1.176\,4X_{t-1} - 0.433\,1X_{t-2} - 0.164\,0X_{t-3} + 0.182\,7X_{t-4} - 0.127\,8X_{t-5} + 0.040\,6X_{t-6} + 0.015\,8X_{t-7} - 0.030\,5X_{t-8} + 0.219\,2X_{t-9} + \varepsilon_t$$

利用以上三种时间序列模型,太阳黑子数的预测值[15]见表 1.

表 1 1980—1987 年太阳黑子数的观察值和三种时间序列模型的预测值

Table 1 Observed value of macula from 1980 to 1987 and forecasting value of three kinds of time series model

年份	黑子数的观察值	黑子数的预测值		
		TAR 模型	不含趋势叠合模型	AR 模型
1980	154.6	158.63	163.5	158.97
1981	140.4	137.24	139.5	128.99
1982	115.9	98.21	100.4	84.74
1983	66.6	61.31	65.38	48.64
1984	45.9	32.64	35.02	21.66
1985	17.9	17.42	15.2	9.38
1986	13.4	16.4	7.812	10.7
1987	29.2	26.47	21.75	32.23

将表1中数据代入到模型(1)中，经计算得如下基于向量夹角余弦的最优组合预测模型

$$\max \eta(l_1, l_2, l_3) = \frac{24\,243.53 l_1 + 249.07 l_2 + 227.57 l_3}{\sqrt{L^{\mathrm{T}} F L}}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} l_1 + l_2 + l_3 = 1 \\ l_1 \geqslant 0,\ l_2 \geqslant 0,\ l_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中组合预测信息矩阵

$$F = \begin{bmatrix} 59\,741 & 61\,061 & 56\,123 \\ 61\,061 & 62\,539 & 57\,359 \\ 56\,123 & 57\,359 & 53\,167 \end{bmatrix}$$

及 $L = (l_1, l_2, l_3)^{\mathrm{T}}$ 为以上三种时间序列预测模型在组合预测中的权向量.

利用Matlab最优化工具箱计算得最优组合预测权系数为

$$l_1^* = 0.500\,3,\ l_2^* = 0.499\,7,\ l_3^* = 0$$

由此可见自回归预测模型为冗余预测方法.

为了反映组合预测模型(1)的有效性，通常选择下列预测效果评价指标体系[4]：

(Ⅰ)平方和误差 $SSE = \sum_{t=1}^{N} (x_t - \hat{x}_t)^2$；

(Ⅱ)平均绝对误差 $MAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} |x_t - \hat{x}_t|$；

(Ⅲ)平均绝对百分比误差 $MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} |(x_t - \hat{x}_t)/x_t|$.

根据上面的预测效果评价指标公式，组合预测模型(1)和三种单项预测模型的误差指标的计算结果如表2所示.

表2　组合预测模型和三种单项预测模型预测效果评价指标

Table 2 Predictive validity evaluating indicators of combination forecasting model and three kinds of single forecasting model

	SSE	*MAE*	*MAPE*
非线性门限自回归模型	559.657 6	6.205 0	0.114 2
不含趋势的叠合模型	534.151 0	6.642 3	0.159 5
自回归模型	2 119.4	12.923 8	0.244 7
组合预测模型	507.709 4	6.048 3	0.108 8

从表2的预测效果评价指标体系来看，组合预测模型(1)的误差指标值均低于三种单项预测模型，从而表明基于向量夹角余弦的最优组合预测模型可以取得比各单项预测方法更好的预测效果.

5　结束语

本文对基于向量夹角余弦的组合预测模型的性质作了研究，提出了优性组合预测、冗余度等概念，探讨了优性组合预测的存在性及冗余预测方法的判定，得出一些有益的结果，从理论上进一步表明最优组合预测方法确实能综合各种单项预测方法信息.本文对基于向量夹角余弦的组合预测模型的性质作了初步的研究.实际上基于其它相关性指标的组合预测模型的性质有待于研究.另外，如何基于统计特征重新构造文中的概念和结论以及组合预测在进行外推预测时这些结论成立的信度等问题值得进一步加强研究.

参考文献：

[1]Bates J M, Granger C W J. Combination of forecasts[J]. Operations Research Quarterly, 1969, 20(4): 451—468.

[2]唐小我. 组合预测误差信息矩阵研究[J]. 电子科技大学学报, 1992, 21(4): 448—454.
Tang Xiaowo. Study of combination forecasting error information matrix[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1992, 21(4): 448—454. (in Chinese)

[3]陈华友, 侯定丕. 基于预测有效度的优性组合预测模型研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(2): 172—180.
Chen Huayou, Hou Dingpi. Research on superior combination forecasting model based on forecasting effective measure[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2002, 32(2): 172—180. (in Chinese)

[4]王应明. 基于相关性的组合预测方法研究[J]. 预测, 2002, 21(2): 58—62.
Wang Yingming. Research on the methods of combining forecasts based on correlativity[J]. Forecasting, 2002, 21(2): 58—62. (in Chinese)

[5]唐小我, 曹长修, 金德运. 组合预测最优加权向量的进一步研究[J]. 预测, 1994, 13(2): 48—49.
Tang Xiaowo, Cao Changxiu, Jin Deyun. Further study to the optimal weight vectors of combination forecasting[J]. Forecasting, 1994, 13(2): 48—49. (in Chinese)

[6]马永开, 唐小我, 杨桂元. 优性组合预测方法存在判别定理[J]. 预测, 1995, 14(2): 57—58.

Ma Yongkai, Tang Xiaowo, Yang Guiyuan. Existence theorem of superior combination forecasting model[J]. Forecasting, 1995, 14(2): 57—58. (in Chinese)

[7]唐小我. 经济预测与决策新方法及其应用研究[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1997. 9—57.
Tang Xiaowo. New Methods of Economic Forecasting and Decision Making and Applications[M]. Chengdu: Press of University of Electronic Science and Technology of China, 1997. 9—57. (in Chinese)

[8]马永开, 唐小我. 线性组合预测模型优化问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(2): 110—114.
Ma Yongkai, Tang Xiaowo. Research on the problem of optimizing linear combination forecasting model[J]. Systems Engineering—Theory and Practice, 1998, 18(2): 110—114. (in Chinese)

[9]王明涛. 确定组合预测权系数最优近似解的方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(3): 104—109.
Wang Mingtao. Study on method of calculating optimal approximate solution about weight coefficients of combined forecasting methods[J]. Systems Engineering—Theory and Practice, 2000, 20(3): 104—109. (in Chinese)

[10]陈华友. 基于预测有效度的组合预测模型研究[J]. 预测, 2001, 20(3): 72—73.
Chen Huayou. Research on combination forecasting model based on effective measure of forecasting methods[J]. Forecasting, 2001, 20(3): 72—73. (in Chinese)

[11]曾 勇, 唐小我, 郑维敏. 基于斯坦规则和误差校正的组合预测模型[J]. 管理科学学报, 2001, 4(6): 39—47.
Zeng Yong, Tang Xiaowo, Zheng Weimin. Combination forecasting based on Stein-rule estimation and error correction[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(6): 39—47.

[12]Granger C W J, Ramanathan R. Improved methods of combining forecasts[J]. Journal of Forecasting, 1984, 3(2): 197—204.

[13]Bunn D W. Forecasting with more than one model[J]. Journal of Forecasting, 1989, 8(3): 161—166.

[14]Granger C W J. Combining Forecasts—Twenty Years Later[J]. Journal of Forecasting, 1989, 8(3): 167—173.

[15]项静恬, 史久恩. 非线性系统中数据处理的统计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997. 84—123.
Xiang Jingtian, Shi Jiuen. Data Processing Statistical Methods of Nonlinear Systems[M]. Beijing: Science Press, 1997. 84—123. (in Chinese)

[16]Box G E P, Jenkins G M, Reinsel G C. 时间序列分析: 预测与控制[M]. 北京: 中国统计出版社, 1997. 211—376.
Box G E P, Jenkins G M, Reinsel G C. Time Series Analysis: Forecasting and Control[M]. Beijing: China Statistical Press, 1997. 211—376. (in Chinese)

Research on properties of combination forecasting model based on vectorial angle cosine

CHEN Hua-you[1], *SHENG Zhao-han*[2], *LIU Chun-lin*[3]

1. School of Mathematics & Computational Science, Anhui University, Heifei 230039, China;
2. School of Management Science & Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China;
3. Business School, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Abstract: The combination forecasting model based on vectorial angle cosine is a kind of correlation one. It is a new way to study combination forecasting method. In this paper, the basic structural characteristics of combination forecasting model is studied under the criterion of vectorial angle cosine. Firstly, some new concepts, such as superior combined forecasting, dominant forecasting method, redundant degree etc, are put forward; then some questions are discussed, such existence of noninferior combination forecasting, superior combination forecasting and redundant forecasting method. The method of determining redundant information is also given in a theorem. Finally an example is used to show that this model has much applicable value.

Key words: vectorial angle cosine; noninferior combination forecasting; superior combination forecasting; dominant forecasting method; redundant measure