第9卷第5期
2006年10月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol.9 No.5
Oct. 2006

拥堵交通网络模型和增强拉格朗日乘子算法[①]

程 琳, 王 炜
(东南大学交通学院, 南京 210096)

摘要: 为了更加准确地反映拥堵网络的交通流状态,必须在传统交通网络均衡模型中添加路段容量约束条件,限制路段交通流量的非现实的增长,因此构造了一个容量制约下的均衡交通网络流模型.在拥堵交通网络中,传统的路段特征函数不能反映拥堵的交通特性,修正路段的旅行费用表示为行车时间和因为拥堵而产生的等待延迟的总和,路段容量约束条件的拉格朗日乘子等于该路段的等待延迟.把外惩罚函数和牛顿法相结合构筑成增强拉格朗日乘子算法,用来求解拥堵网络的交通流状态、外惩罚函数通过调整惩罚参数,把容量约束下的网络均衡问题转化成传统网络均衡问题.牛顿法通过移动方向、修正矩阵和移动步长的组合来保证路径或路段交通流量解的可行性,同时获得转化后子问题的最优解.

关键词: 交通网络流; 拥挤; 堵塞; 均衡; 增强拉格朗日乘子; 牛顿法

中图分类号: U212　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007-9807(2006)05-0018-10

0 引 言

交通网络均衡问题可以表述为一个遵循Wardrop原则[1]的数学规划问题,交通均衡理论是道路网络中交通量预测模型的基础,至今在交通规划中发挥了巨大的作用.但是传统的均衡模型潜在地假设道路上没有发生阻塞状态,在应用于拥堵交通网络上还存在着若干问题.

第一,对道路网络状态的界定模糊不清.路段上交通流可能存在两种状态:自由流状态和阻塞流状态.一般来说,在临界密度以下的自由领域,旅行时间是交通量的单调增加函数;而在临界密度以上的阻塞领域,旅行时间随交通量增加而减少.传统的用户均衡模型始终假设旅行时间是交通量的单调增加函数,把交通流看作为一种自由流状态.有些文献注意到应考虑到道路的阻塞现象,因而引入容量对交通量的制约作用[2~5].例如,路段旅行时间采用Davidson函数[5],可是在交通量接近或等于容量时,旅行时间变为无限大这一现象违背了现实状况.

第二,确定合适路段特征函数十分困难,交通工程师需要选择合适的旅行时间与交通流量的函数关系,标定特征函数中的各项参数.在交通工程实践中,通常采用美国公路局首先提出的多项式函数(BPR),BPR函数中变量和参数的选定主要运用根据海量的实际观测数据统计分析得出.然而多项式路段特征函数也可能导致不现实的路段交通量和路段旅行费用,比如说在一些拥堵路段,分配模型得出的路段交通量二、三倍于其路段容量,而旅行费用却没有增加许多,谁能相信在一个严重拥堵的路段上,用户仍然继续享受交通网络提供的服务呢? 一般认为,当路段交通量超过路段容量时,道路就会发生堵塞,如果交通流量继续增加,堵塞地点就会从路段下游不断向上游延伸,最终导致路段交通运行瘫痪,这就是现实中人们感受的道路拥堵.

对于道路拥堵问题,可以从两个方面来理解,一方面,把路段的旅行费用函数看作是其交通量

---

① 收稿日期: 2004-09-28; 修订日期: 2006-07-26.
基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)资助项目(2006CB705500); 国家自然科学基金资助项目(50578037).
作者简介: 程 琳(1963—), 男, 江苏泰州人, 博士, 副教授. Email: gist@seu.edu.cn

的单调增加函数,路段上交通量越大,旅行费用越大,这里假设交通流均质地分布在路段上,没有严格区分在道路上行使时间和在发生路阻情况下的时间耽搁.另一方面,任何一条道路有一个实际容量,作为交通流量的上限限制交通量无限制增长.当交通量低于路段容量时,路段上的车辆正常处于行使状态;当交通量高于路段容量时,路段处于阻塞状态.由此可以看出,修正均衡模型的最佳方法是采用动态交通模型,把时间轴引入交通均衡模型反映实时路段交通流量.除此之外,一种折中办法也可以消除交通量远远高于容量的奇异现象,那就是在网络均衡模型中添加路段容量约束条件[2~4],增强传统模型的现实性.这种改善虽然不能从根本上反映交通网络的动态性质,但是,它是对静态交通模型的一种积极改进,产生的网络交通流更加现实地反映了交通需求在整个交通网络上的状态,对改善交通规划与交通管理的基础信息预测有着十分重要的意义.

众所周知,Frank-Wolfe 方法[1,2]通常用于求解传统的交通均衡模型,并且被植入成熟的交通规划软件包.这个方法对目标函数进行线性化,而线性化后的子问题可以转化成最短路径探索问题.然而,如果在均衡模型中追加容量约束条件,那么,在传统均衡模型中所表现出的 Cartesian product structure 便不再成立[4],因此,Frank-Wolfe 方法不能直接用于求解容量制约下的网络均衡问题.此外,Frank-Wolfe 方法不记忆"使用路径",导致人们忽略了对路径解的认识,路径解常常用于一些交通网络分析中[6],路径解更加直观地反映了道路网络用户所遵循的 Wardrop 路径选择行为.

容量制约下的网络均衡问题可以通过内惩罚函数法[7,8]或者外惩罚函数法[2,9]转变成传统的均衡问题,传统均衡问题进而可以用 Frank-Wolfe 法[1,2]、梯度投影法[9~11]、DSD 方法[4]、牛顿法[8]来求解.

本文旨在研究拥堵交通网络的模型、特征以及问题的求解方法与技术.文章主要贡献在于:(1) 把道路的拥堵现象区分为拥挤和堵塞,交通拥挤效应由传统的路段特征函数来体现,交通堵塞效应是由于交通流量达到其容量而引起.(2) 在交通网络模型中引入路段容量制约条件,用户在拥堵流所遭遇的等待延迟与路段的容量约束有关,而且等于网络模型中容量约束条件的拉格朗日乘子.(3) 把外惩罚函数和牛顿法相结合构筑增强拉格朗日乘子算法,用来求解拥堵网络的交通流状态.外惩罚函数通过惩罚参数,把容量约束下的网络均衡问题转化成传统网络均衡问题;牛顿法通过移动方向、修正矩阵和移动步长的组合来保证路径或路段交通流量解的可行性,同时获得转化后子问题的最优解.文章的意义在于提出的容量制约下的交通网络模型是对传统交通网络模型的一种积极改善,所产生的网络交通流更加现实地反映了交通需求在整个交通网络上的状态.文章的意义还在于提供了分析拥堵交通网络状态的有效手段,对于改善交通信息获取方法、科学地进行交通规划和管理具有重要意义.

1 拥堵交通网络均衡模型

1.1 容量制约交通量分配模型

考虑一个交通路网 $G=(N, A)$,其中 N 是网络结点集合,A 是路段集合.用 W 表示起讫点对集合;K^w 表示起讫点对 $w\in W$ 之间的所有使用路径集合;q^w 表示 OD 对 $w\in W$ 之间相应的分布交通量,当分布交通量分配到交通网络上式,引起网络上路段交通量向量 $\boldsymbol{x}=(x_a)_a\in A$.网络上每个路段 $a\in A$ 都拥有一个路段特征函数 $t_a(x_a)$,路段特征函数描述了路段旅行费用与路段交通量之间的函数关系.由于交通拥挤效应,这个特征函数应当是个严格单调递增函数;由于交通路阻效应,路段交通量 x_a 不应超过路段的交通承载能力 c_a,也就说不超过路段容量.本文要研究的问题是:如何确定均衡网络路段的交通量状态,使得这个状态同给定的起讫点分布交通量、交通网络拓扑结构以及路段特征函数等相匹配.容量制约下的交通网络均衡问题可以表述为下列非线性规划模型

$$\mathrm{Min}\ z(\boldsymbol{x})=\sum_{a\in A}\int_0^{x_a}t_a(x)\mathrm{d}x \tag{1a}$$

$$\mathrm{s.t.}\ \sum_{k\in W}f_k^w=q^w,\ \forall w\in W \tag{1b}$$

$$x_a=\sum_w\sum_k\delta_{ak}^w f_k^w \tag{1c}$$

$$0\leqslant x_a\leqslant c_a \tag{1d}$$

$$f_k^w \geqslant 0,\ \forall k \in K^w,\ w \in W \tag{1e}$$

其中,$z(\boldsymbol{x})$ 表示目标函数;x_a 表示路段 $a \in A$ 上的交通量; t_a 表示路段 $a \in A$ 的旅行费用;当 f_k^w 表示路径 $k \in K^w$ 上相应的路径交通量; τ_k^w 表示路径 $k \in K^w$ 的旅行费用;$\delta_{ak}^w = 1$ 表示路段 a 在路径 k 上,$\delta_{ak}^w = 0$ 表示路段 a 在路径 k 上;c_a 表示路段 a 的容量.对于任意一个结点对 $w \in W$ 来说,它们之间的路径交通量满足交通量守恒条件(1b) 和(1c).

因为模型(1) 的目标函数是关于路段交通量的严格凸函数,所有约束条件均是线性函数,所以,路段交通量的最优解具有唯一性,然而路径交通量则不具备唯一性[4]. 按照 Kuhn-Tcuker 条件[4],可以写出模型(1) 最优解的充分必要条件.用 τ^w 表示约束条件(1a) 的拉格朗日乘子,μ_a 是关于约束条件(1c) 的拉格朗日乘子,那么模型(1) 的最优化条件是:

$$\sum_a (t_a + \mu_a) \cdot \delta_{ak}^w - \tau^w \geqslant 0,\quad \forall k \in K^w,\ w \in W \tag{2a}$$

$$f_k^w \cdot \left(\sum_a (t_a + \mu_a) \cdot \delta_{ak}^w - \tau^w \right) = 0,\quad \forall k \in K^w,\ w \in W \tag{2b}$$

$$f_k^w \geqslant 0,\ \forall k \in K^w,\ w \in W \tag{2c}$$

$$c_a - \sum_w \sum_k \delta_{ak}^w f_k^w \geqslant 0,\ \forall a \in A \tag{2d}$$

$$\mu_a \cdot \left(c_a - \sum_w \sum_k \delta_{ak}^w f_k^w \right),\ \forall a \in A \tag{2e}$$

$$\mu_a \geqslant 0,\ \forall a \in A \tag{2f}$$

$$\sum_{k \in W} f_k^w = q^w,\ \forall w \in W \tag{2g}$$

如果定义 $\tau_k^w = \sum (t_a + \mu_a) \cdot \delta_{ak}^w$ 为路径 $\forall k \in K^w$ 的一般费用,那么最优化条件中的(2a) 和(2b) 可以写成

$$\tau_k^w - \tau^w \geqslant 0,\ \forall k \in K^w, w \in W \tag{3a}$$

$$f_k^w \cdot (\tau_k^w - \tau^w) = 0,\ \forall k \in K^w, w \in W \tag{3b}$$

Wardrop原则要求,对于交通网络的任意一个起讫点对,使用路径的旅行时间相等,并且不高于未使用路径的旅行时间. 在拥挤网络上用户不但要经历旅行时间,还要承担因为道路阻塞而产生的时间损失.因此,式(3) 描述了 Wardrop 原则在一般路径费用意义上的表现,这个一般费用包括用户的行车时间和因道路拥堵而产生的延迟.一般路径费用意义上的 Wardrop 原则表现为,在一个起讫点对之间,所有使用路径具有相等旅行费用,并且不高于未使用路径的旅行费用.为了更好地理解在拥堵交通网络上的路段费用的构成情况,在下一节运用交通流理论对此做进一步阐述.

1.2 拥堵网络中的路段特性

道路交通网络的状态是道路用户路径选择行为的结果,因为用户的异质性和选择行为的多样性,因此引起的交通网络状态不是固定的,然而,时复一时的用户选择行为使得交通网络状态趋于一种稳定状态,这是交通需求与网络供给相互作用所"追求"的一种极限情况,于是,交通网络均衡模型从理论上表达了这种状态的作用原理.以稳定状态作为研究对象是科学研究中的常用方法,所以,这里把稳定状态路段区分为非堵塞域和堵塞域[12],用 l_1 和 l_2 分别表示路段上非堵塞域和堵塞域的长度,一个拥堵路段的状态可以直观地用图来描述.

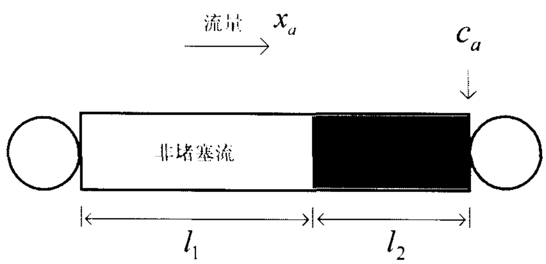

图 1 拥堵路段

Fig. 1 Congested road segment

如果用 $c_{a,\max}$ 表示单个路段的容量,那么道路交通网络上的路段容量 c_a 通常要低于 $c_{a,\max}$,这是因为不同方向的交通流在道路交叉口发生冲突,交通安全和交通管理要求在交叉口应采取诸如信号控制的控制策略,信号交叉口和非信号交叉口轮流放行不同方向的冲突交通流,必然导致在网络中的路段容量达不到其单个路段的容量水平,例如,在信号交叉口中,路段容量的折减系数通常等于交通信号的绿信比[13].常识现象告诉人们,当路段交通量超过路段容量时,道路就会发生堵塞,如果交通流量继续增加,堵塞域就会从路段下游不断向上游蔓延,最终导致路段运行瘫痪;反之,在一个堵塞路段上,如果交通流量持续减少,那么堵塞域就会向下游逐步消减,直到路段流量不高于路段容量.

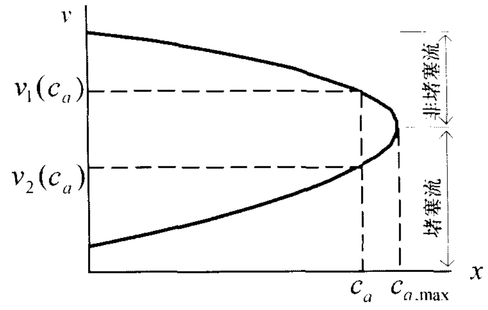

图2　交通流量与交通速度之间的关系

Fig. 2 Relation between traffic flow and velocity

图2描述了交通网络中路段上的流量与速度之间的关系，其中 $v_1(c_a)$ 和 $v_2(c_a)$ 分别表示路段上非堵塞流和堵塞流的平均交通速度，$v_1(c_a)$ 是单调递减函数而 $v_2(c_a)$ 是单调递增函数.那么，在网络达成均衡状态时路段的旅行费用表示成

$$\begin{aligned} c_a &= \frac{l_1}{v_1(c_a)} + \frac{l_2}{v_2(c_a)} \\ &= \frac{l_1 + l_2}{v_1(c_a)} + \left[\frac{l_2}{v_2(c_a)} - \frac{l_2}{v_1(c_a)}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

式(4)右端的第1项表示正常旅行时间，它可以通过路段特性函数计算得出，第2项对应着因为交通堵塞而引起的交通延迟.这里，把后者视为发生在路段堵塞域中的等待时间，由此可以看出，任何一个路段的旅行时间等于用户在整个路段上的行车时间与因堵塞而产生的等待时间的和，也就是说

$$c_a = t_a(x) + d_a \tag{5}$$

其中：d_a 表示等待延迟，等待延迟是否产生取决于交通流量的大小.如果路段流量低于容量，那么路段畅通，等待延迟等于零；一旦交通流量趋于路段容量，在路段上就会产生堵塞域而引起等待延迟.这个关系可以表达成

$$d_a > 0 \Leftrightarrow x_a = c_a \qquad a \in A \tag{6a}$$

$$d_a = 0 \Leftrightarrow x_a \in [0, c_a) \qquad a \in A \tag{6b}$$

根据路段长度 l 可以估计出最长等待延迟

$$d_a = \frac{l_2}{v_2(c_a)} - \frac{l_2}{v_1(c_a)} \leqslant \frac{v_1(c_a) - v_2(c_a)}{v_1(c_a) \cdot v_2(c_a)} l \tag{7}$$

而与此相对应的等待域长度是

$$l_2 = \frac{v_1(c_a) \cdot v_2(c_a)}{v_1(c_a) - v_2(c_a)} d_a \leqslant l \tag{8}$$

据此，可以认为拥堵交通网络中路段旅行费用不仅包括传统意义上的旅行时间，还包括等待延迟，传统的路段特性函数并不耸用于估计拥堵交通网络的状态，本文提出对拥挤网络中的路段特性函数按照式(5)进行修正，修正后的路段旅行费用与交通量的关系曲线可用图3来表示.当交通量 $x_a \in [0, c_a)$ 时，修正后的费用函数与传统的BPR函数重合，旅行费用仍然由BPR函数计算得出，反映了交通拥挤效应；当交通量 $x_a = c_a$ 时，道路用户必须承担交通堵塞到来的等待延迟，而延迟的大小则由式(7)来确定.因此，一个路段上等待延迟与其交通流量的关系由式(6)来确定，在修正路段特性函数中，曲线 t_0t_1 是非拥堵域的旅行时间，曲线 t_1t_2 是拥堵域的等待延迟.

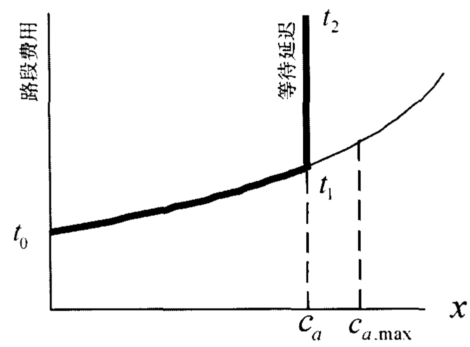

图3　路段特性函数

Fig.3 Performance function of road segment

1.3　拉格朗日乘子与等待延迟

用式(7)来计算等待延迟并不是容易，因为并不知道路段上交通流的速度，在交通网络上各个路段的交通流的状态是交通需求与交通供给相互作用的结果.因此，各个路段上的等待延迟的多少最终必须由整个网络的均衡状态来决定.就交通拥堵路段而言，把等待延迟的发生与否似乎与路段容量约束条件有着某种内在联系.第一，在交通网络均衡模型中，按照(2d)和(2e)所表达的最优化条件，当容量约束条件是活性时，拉格朗日乘子大于零；当容量约束条件是非活性时，拉格朗日乘子等于零，这个条件式同(6)所表达的延迟与流量的关系有异曲同工之处[14].第二，按照优化理论的对偶条件，流量与费用互为对偶变量，因此，可以认为拉格朗日乘子具有费用的特征.第三，在1.1中旅行时间与拉格朗日乘子的和定义为一般费用，并且一般费用遵循Wardrop原则.所以有理由认为，网络模型中对应于容量约束的拉

格朗日乘子 μ_a 等于拥堵路段旅行费用中的等待延迟 d_a. 当然,在有些研究中,拉格朗日乘子还可以看成交通拥挤收费的费率[4].

2 增强拉格朗日乘子法

增强拉格朗日乘子法常常用于非线性规划,它可以看作是外惩罚函数法的一种扩展或延伸,增强拉格朗日乘子法在拉目标函数的格朗日函数中又增加了一项惩罚函数,这个增强函数轮番对网络交通量和拉格朗日乘子进行优化,随着惩罚函数的不断增大,探索解逐步逼近最优交通流量[14]. 这里首先回顾一下增强拉格朗日乘子法在一般数学规划问题中的基本思想,然后叙述在交通网络均衡问题中的表现方法.

2.1 增强拉格朗日乘子法基本思想

以下列非线性规划问题为研究对象:

$$\min z(\boldsymbol{x}) \tag{9a}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{9b}$$

其中, $z: R^n \to R$, $g: R^n \to R^m$ 是给定的函数. 于是增强拉格朗日函数表现为

$$L_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) = z(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\gamma\cdot\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

其中, γ 表示惩罚参数,是正实数; $\boldsymbol{\mu}$ 表示与约束方程 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 相对应的拉格朗日乘子向量,其各个分量不小于零.

假如给定乘子向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和惩罚参数 γ,在 R^n 域上对 $L_\gamma(\cdot,\boldsymbol{\mu})$ 最小化,于是获得临时解. 再根据最新得到的临时解更新乘子向量,同时放大惩罚参数

$$\boldsymbol{\mu} \Leftarrow \boldsymbol{\mu} + \gamma\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{11a}$$

$$\gamma \Leftarrow \kappa\cdot\gamma(\kappa \geqslant 1) \tag{11b}$$

可以证明,惩罚参数 γ 足够大的情况下,只要乘子向量 $\boldsymbol{\mu}$ 接近最优拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\mu}^*$, $L_\gamma(\cdot,\boldsymbol{\mu})$ 最小化的解便趋近最优解 $\boldsymbol{x}^*$,详细证明可以参考文献[14]. 所有适用于无约束规划的优化规划都可以适用于增强拉格朗日最小化问题的求解.

2.2 均衡问题中的拉格朗日乘子法

在路段容量约束条件下,交通网络均衡问题的数学规划模型是

$$\min_{x\in\Omega} z(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. } \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s}\\ &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{s}\\ &= \boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{13}$$

其中, Ω 表示传统均衡问题解的可行域,由约束条件(1b) ~ (1e)来确定, $\boldsymbol{s}$ 表示松弛变量向量,通过松弛变量把容量约束的不等式条件转变成等式约束条件,对应于容量约束条件的松弛变量可能等于零或者大于零,前者表示容量约束是活性约束,后者表示容量约束是非活性约束.

于是,容量约束条件下网络均衡问题的增强拉格朗日函数表现为

$$L_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\mu}) = z(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) + \frac{1}{2}\gamma\cdot\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) \tag{14}$$

对于这样的增强拉格朗日函数最小化问题,可以运用解决无容量约束均衡问题的Frank-Wolfe法、牛顿法来求解. 需要注意的四点是:第一,在给定拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\mu}$ 和惩罚参数 γ 的情况下无约束优化问题(14)是关于变量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 同时进行优化;第二,最优解的获得是一个反复迭代的过程,它包括内循环和外循环,内循环反映变换后的目标函数用传统均衡算法的求解过程,外循反映变量 $\boldsymbol{x}$ 随着惩罚参数 γ 的递增向最优解逼近的过程;第三,无论在内循环还是在外循环中,拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\mu}$ 都可以根据最新的 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 或者 γ 实时更新,以便加快收敛过程. 第四,拉格朗日乘子在交通网络问题中有着特殊含义,它不仅用于辅助获得最优解,而且是路段交通量关于路段容量约束条件的对偶变量[4],因此拉格朗日乘子在交通工程学中的意义就是反映各个路段上的拥挤程度,它或者是零或者一个正数,前者表示路段流量还没有超过路段容量,于是不发生堵塞,对应于优化问题中的非活性约束;后者表示路段流量已经超过路段容量,于是在路段的下游产生堵塞,对应于优化问题中的活性约束,那么拉格朗日乘子的大小就表示因堵塞而产生的延迟,或者称为等待时间.

假如给定变量 $\boldsymbol{x}$,变量 $\boldsymbol{s}$ 可以直接表示成 $\boldsymbol{x}$ 的函数,所以松弛变量 $\boldsymbol{s}$ 的求解过程可以简化成

$$\min_{s\geqslant 0, x\in\Omega} L_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\mu}) = z(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) + \frac{1}{2}\gamma\cdot\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) \tag{15a}$$

或者

$$\min_{s\geqslant 0}\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})+\frac{1}{2}\gamma\cdot\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\times\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) \tag{15b}$$

把代入到上式，并运用极值求解方法，获得

$$s_a=\max\left[0,-\frac{\mu_a}{\gamma}-g_a(x_a)\right],\ \forall a\in A \tag{16}$$

把上式代入

$$h_a(x_a,s_a)=g_a(x_a)+s_a=\max\left(g_a(x_a),-\frac{\mu_a}{\gamma}\right),\ \forall a\in A \tag{17}$$

把上式代入，增强拉格朗日函数可写成

$$\underset{x\in\Omega}{L_\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=z(\boldsymbol{x})+\sum_{a\in A}\left[\mu_a\cdot\max\left(g_a(x_a),-\frac{\mu_a}{\gamma}\right)+\frac{1}{2}\gamma\cdot\max\left(g_a(x_a),-\frac{\mu_a}{\gamma}\right)^2\right] \tag{18a}$$

或者进一步简化为

$$\underset{x\in\Omega}{L_\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=z(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2\gamma}\cdot\sum_{a\in A}\left[\max(0,\mu_a+\gamma\cdot g_a(x_a))^2-\mu_a^2\right] \tag{18b}$$

于是，通过把变量 s 表示成 $\boldsymbol{x}$ 的函数，增强拉格朗日函数只需要在 $\boldsymbol{x}$ 域上对目标函数进行优化，这样可以节省计算时间并减少对计算资源的占用. 此时拉格朗日乘子可更新如下，

$$\mu_a\Leftarrow\mu_a+\gamma\cdot h_a(x_a,s)=\max[0,\mu_a+\gamma\cdot g_a(x_a)] \tag{19}$$

容量制约下的交通网络均衡模型的求解性能主要受到两个方面因素的影响：第一，受到内循环中求解子问题（无容量约束的交通均衡问题）的方法的性能的影响，卓越的子问题算法将促使拉格朗日乘子回归其真值，加速局部收敛从而改善整体性能；第二，受到外循环中惩罚参数序列的选取的影响，高扩张因子（$10\geqslant\kappa>2$）可减少外循环次数，然而可能使得内循环中子问题算法恶化，低扩张因子（$2\geqslant\kappa>1$）虽然不会使内循环中子问题算法发生病态，但是可能增加外循环次数，牺牲计算时间. 因此，为了获得良好的求解性能，必须选择适当的惩罚参数的扩张因子，同时还要采用稳定的一般均衡问题算法. 因为牛顿法在解决一般均衡问题所表现的良好特性及其对其它算法的包容性[15]，本文采用牛顿法作为子问题的求解方法.

2.3　牛顿法与拉格朗日乘子法的结合

众所周知，在无约束条件的最小化问题中，在目标函数的底部目标函数获得最优解，此时目标函数的梯度向量成为零向量. 然而，在有约束条件的最小化问题中，目标函数的梯度向量就不一定是零向量，最优解可能位于可行域的边界上. 假如在路径域上进行交通网络优化，由于交通量守恒条件的限制，最优解决不可能在目标函数梯度是零的地方获得，因为现实交通网络中不存在所有路径旅行费用等于零的情况. 假设在第 n 次迭代中获得一组路径解 $\boldsymbol{f}^n$ 的情况下，牛顿法的基本原理把目标函数(1a) 在路径域进行二次泰勒展开，得到下列牛顿公式

$$\boldsymbol{f}^{n+1}=\boldsymbol{f}^n+\lambda\cdot\Delta\boldsymbol{f}^n \tag{20a}$$

$$\Delta\boldsymbol{f}^n=-[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{f}^n)-\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{f})]\cdot[\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{f}^n)]^{-1} \tag{20b}$$

其中，$\boldsymbol{f}$ 表示路径交通量向量，其上标示第 n 次迭代得到的路径交通量向量，λ 表示移动步长，$\Delta\boldsymbol{f}^n$ 表示移动方向，$\boldsymbol{\tau}$ 表示路径旅行费用向量，$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{f}^n)$ 表示对应于 $\boldsymbol{f}^n$ 的路径费用，$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{f})$ 表示所有起讫点对间最短路径的费用向量.

注意式(20) 表示路径费用平衡的过程. 在一个起讫点对 w 间，所有使用路径分为最短路径和非最短路径. 一旦发现新的最短路径，所有非最短路径上的交通量要向空载的最短路径转移[16]，使得起讫点对 w 间所有路径的旅行费用趋向同一. 式(20b) 中第 1 项反映了路径交通量移动方向，第 2 项表示对根据目标函数的黑森矩阵对移动方向的修正. 当然交通量移动多少最终还得由步长 λ 来决定，以便确保解的可行性. 由此可以看出，在牛顿法中必须确定移动方向、修正矩阵、移动步长. 以下进一步阐明本文对这些要素的确定方法.

2.3.1　移动方向

本文采用目标函数的（直）梯度作来确定路

径交通量的移动方向，那么路径集合中各使用路径的交通增量是

$$\Delta \boldsymbol{f}^n = -[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{f}^n) - \tau(f^w_{k^{w*}}) \times \boldsymbol{E}] \times [\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{f}^n)]^{-1} \tag{21a}$$

$$\Delta f^w_{k^{w*}}(n) = -\sum_{k \in K^w(n)} \Delta f^w_k(n) \tag{21b}$$

其中，$\tau(f^w_{k^{w*}})$ 表示起讫点 w 间的最短路径 k^{w*} 的费用，$\boldsymbol{E}$ 表示一个元素为 1 的向量. 因为所有非最短路径上的交通量要向空载的最短路径转移，所以非最短路径上交通量的增量 Δf^w_k 是负值，而最短路径上的交通量增量 $\Delta f^w_{k^{w*}}$ 则是正值. 当然路径费用由下式计算得出

$$\tau(f^w_k) = \sum_a (t_a + \max[0, \mu_a + \gamma \cdot g_a(x_a)])$$

2.3.2　修正矩阵

一般情况下，修正矩阵采用目标函数的黑森矩阵，因为路段特征函数是可分离函数，所以黑森矩阵是对角矩阵，于是只用计算其对角元素即可. 本文采取三种策略，在后续计算实例中将分析不同策略对拉格朗日乘子算法的整体性能的影响. 第一种采用精确的目标函数黑森矩阵，其对角元是

$$\frac{\partial^2 L_r(\boldsymbol{f})}{(\partial f^w_k)^2} = \sum_{a \in A} (t_a' + \max(0, \gamma)) \times (\delta^w_{ak} - \delta^w_{ak^{w*}})^2 \quad \forall k \neq k^{w*}, \forall w \tag{22a}$$

其中：t_a' 表示路段 a 的旅行时间函数对其交通量的导数；目标函数 $L_\gamma(\boldsymbol{f}) = L_\gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$

第 2 种策略采用对应的路径交通量作为近似值，于是

$$\frac{\partial^2 L_r(\boldsymbol{f})}{(\partial f^w_k)^2} \cong (f^w_k)^{-1} \quad \forall k, \forall w \tag{22b}$$

第 3 种策略采用对应的起讫点交通量作为近似值，于是

$$\frac{\partial^2 L_r(\boldsymbol{f})}{(\partial f^w_k)^2} \cong (q^w)^{-1} \quad \forall k, \forall w \tag{22c}$$

2.3.3　移动步长

在适用于无约束优化问题的标准牛顿公式中，步长定义为单位步长，但是，在交通网络均衡问题中，因为存在交通量守恒条件、容量条件的制约，单位步长则不再适用. 在梯度投影算法中[9~11]，因为采用单位步长引起临时解落到可行域之外，而不得不用正交投影方法，把临时解“拉回”可行域边界上就是一个很好的例证，说明单位步长可能破坏解的可行性. 因此，本文根据交通网络问题中交通量解的可行性，建议对移动步长进行限制，于是

$$\lambda = \min\left\{\min_{k \in K^w}\left\{-\frac{f^w_k}{\Delta f^w_k} \,\middle|\, \Delta f^w_k < 0\right\}, -\frac{\sum_{a \in A} \Delta x_a \cdot (t_a + \max[0, \mu_a + \gamma \cdot g_a])}{\sum_{a \in A} \Delta x_a^2 \cdot (t_a' + \max(0, \gamma))}, 1\right\} \tag{23}$$

上式右边的第 1 项反映了路径交通量的可行性要求，第 2 项反映了路段交通量可行性的要求，第 3 项反映了标准牛顿公式对步长的要求. 关于移动步长的详细推导，可参考文献[8].

3　算法的实施与流程

以上阐述了容量制约条件下交通网络模型和算法思想，在运用这些理论分析拥堵交通网络状态时，还存在着一些操作上的技巧问题.

3.1　拉格朗日乘子初值的选取

文献指出拉格朗日乘子初值的选取对算法的性能影响非常重要，因此本文采用早期研究中的建议方案.

$$\mu^0_a = \max[0, t_a(x^0_a) - t(c_a) + \gamma \cdot \max(0, x^0_a - c_a)] \tag{24}$$

其中，x^0_a 表示传统网络均衡模型的路段交通量解.

3.2　惩罚参数的确定

一旦选定初始拉格朗日乘子，还必须确定惩罚参数序列，这个惩罚参数序列按照扩张因子 $(10 \geqslant \kappa > 1)$ 逐步递增. 这里按照惩罚函数项等于原目标函数的原则，确定初始惩罚参数 γ^0，于是惩罚参数可按照下列公式给出

$$\gamma^0 = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(v)\mathrm{d}v \Big/ \left(\frac{1}{2}\gamma \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})\right) \tag{25}$$

$$\gamma \Leftarrow \kappa \cdot \gamma \tag{26}$$

3.3　收敛准则

在增强拉格朗日乘子法中，这里用增强拉格朗日函数(18b)代替原是目标函数(9a)，增强拉格朗日函数和惩罚项 $\phi(\boldsymbol{x})$ 的总和．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\gamma} \cdot \sum_{a \in A} [\max(0, \mu_a + \gamma \cdot g_a(x_a))^2 - \mu_a^2] \tag{27}$$

随着最优解的不断逼近，惩罚项对增强拉格朗日函数的贡献应当不断下降．因此，利用惩罚项对增强拉格朗日函数的比例，本文提出下列收敛检验准则

$$\frac{\phi(\boldsymbol{x})}{\phi(\boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x})} \leqslant \varepsilon \tag{28}$$

3.4　算法过程总结

步骤 1　求解传统交通网络均衡模型，获得无容量约束条件下路段交通量和路径交通量的最优解．

步骤 2　根据式(25)确定初始惩罚参数，根据(24)选取初始拉格朗日乘子，设定迭代参数 $n = 1$．

步骤 3　用牛顿法求解在增强拉格朗日函数下的网络均衡问题，获得 $\boldsymbol{x}^n$ 和 $\boldsymbol{f}^n$

步骤 3.1　获得均衡网络交通流的初始解

步骤 3.2　寻找最短路径，更新路径集合

步骤 3.3　按照 Wardrop 原则，平衡路径交通量

步骤 3.4　检验使用路径的旅行费用

步骤 4　按照式(19)更新拉格朗日乘子 μ^n，按照式(26)更新惩罚参数 r^n

步骤 5　按照式(28)进行收敛检验

4　实例数值分析

试验路网有 4 条路段、3 个结点，还有 3 个 OD 对，网络形态见图 1，路段属性和 OD 矩阵见表 1．

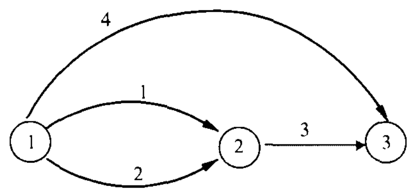

图 4　道路网示意图

Fig. 4 Road network

表 1　路段属性和 OD 矩阵

Table 1 Performance parameters and OD matrix

路段	t_a^0	c_a	q
1	10	600	$q_{OD(1,2)} = 600$
2	17	500	$q_{OD(1,3)} = 400$
3	9	800	$q_{OD(2,3)} = 600$
4	60	400	

图 5 给出路段交通状态．由于本文对均衡网络进行了容量限制，因此均衡状态交通量从不会超过路段容量，同时，路段的旅行费用由两部分组成，一是旅行时间、二是等待延迟，旅行时间根据均衡路段流量按照路段旅行时间函数给出，等待延迟根据容量制约条件的拉格朗日乘子给出．同一起讫点对的旅行费用遵循 Wardrop 原则．比如说结点 1、2 之间有两条最短路径，其旅行费用都是 17.1，可是一条路径旅行时间较短，因为堵塞产生等待延迟；另一条路径旅行时间较长，但是没有堵塞．

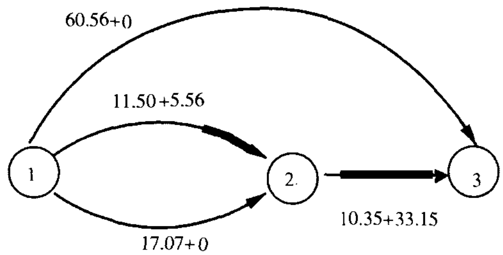

图 5a　路段费用(旅行时间等待延误)

Fig.5a Link cost (travel time + delay)

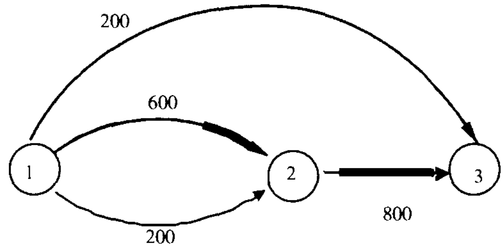

图 5b　路段流量

Fig.5b Link flow

图 6 给出路径交通状态．本文采用的可变步长投影梯度方法是一种基于路径的交通量分配方法，因此，表 3 得到丰富的路径信息．一个 OD 对之间可能同时存在多条最短路径，例如，起讫点对(1, 3)间有 3 条最短路径共同承担，每条最短路径的旅行费用都是 60.56，当然，每条路径的费用也由旅行时间和等待延误两个部分构成．这些丰富的路径信息不但可以为网络用户提供多样性的

路径选择，而且直接用于网络敏感度分析[6,17~19]. 本文的算法同时也说明了路径流量的不唯一性，对于任意 $s\in[0,200]$，有无数路径流量解，而任何一组路径流量都可以得到唯一的路段流量、路段费用、路径费用.

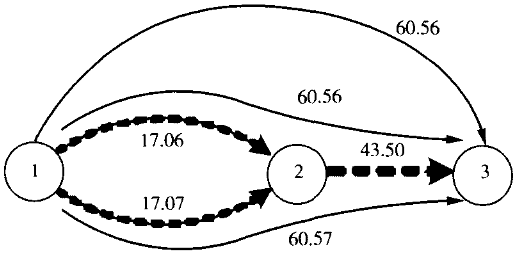

图6a 路径费用

Fig. 6a Path cost

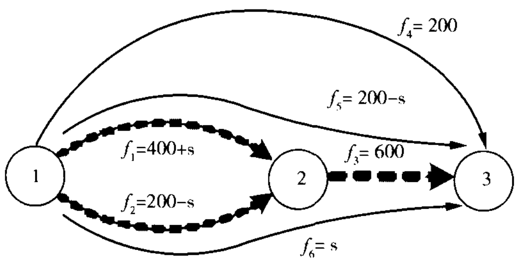

图6b 路径流量 $s\in[0,200]$

Fig.6b Path flows $s\in[0,200]$

5 结论与未来课题

为了更加准确地反映拥堵网络的交通流状态，必须在传统交通网络均衡模型中添加路段容量约束条件，限制路段交通流量的非现实的增长，于是路段的交通状态可以划分为非堵塞流和堵塞流，本文因此提出了容量制约下的均衡交通网络流问题. 在拥堵交通网络中，传统的路段特征函数不能反映拥堵的交通特性，修正路段的旅行费用表示为行车时间和因为拥堵而产生的等待延迟的总和，路段容量约束条件的拉格朗日乘子等于该路段的等待延迟. 把外惩罚函数和牛顿法相结合构筑成增强拉格朗日乘子算法，用来求解拥堵网络的交通流状态. 外惩罚函数通过调整惩罚参数，把容量约束下的网络均衡问题转化成传统网络均衡问题. 牛顿法通过移动方向、修正矩阵和移动步长的组合来保证路径或路段交通流量解的可行性，同时获得转化后子问题的最优解.

在后续的研究中，将通过实例进一步展示了拥堵交通网络的均衡算法，比较其运算时间、收敛速度和解的精度，同时，还要探讨拥堵网络路径解对交通网络敏感度分析的重要作用.

参 考 文 献:

[1]吴文祥，黄海军. 平行路径网络中信息对交通行为的影响研究[J]. 管理科学学报，2003，6(2)：12—16

Wu Wenxiang, Huang Haijun. Study on behavior impacts caused by travel information systems in parallel route network[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(2): 12—16. (in Chinese)

[2]Hearn D W, Ribera J. Bounded Flow Equilibrium Problems by Penalty Methods[R]. Proceedings of the 1980 IEEE International Conference on Circuits and Computers, 1980. 162—166.

[3]Inoue H. Traffic Equilibrium and Its Solution in Congested Road Networks[C]. Proceedings of IFAC Control in Transportation Systems, 1986. 267—272.

[4]Larsson T, Patriksson M. An augmented Lagrange dual algorithm for link capacity side constrained traffic assignment problems[J]. Transportation Research B, 1995, 29: 433—455.

[5]Daganzo C F. On the traffic assignment problem with flow dependent costs[J]. Transportation Research, 1977, 11: 433—441.

[6]Tobin R L, Friesz T L. Sensitivity analysis for equilibrium network flow[J]. Transportation Science, 1988, 22: 242—249.

[7]Prashjer J N, Toledo. Adaptation of the Gradient Projection Algorithm for the Traffic Assignment Problem with Side Constraints[C]. Proceedings of the 80th Transportation Research Board (CD-ROM). 2000.

[8]Cheng L, Lida Y, Uno N, *et al*. Alternative Quasi-Newton methods for capacitated UE assignment[J]. Transportation Research Record, 2003, 1857: 109—116.

[9]Yu N, Zhang H M, Lee D H. Models and algorithms for the traffic assignment problem with link capacity constraints[J]. Transportation Research B, 2004, 38: 285—312.

[10]Bertsekas D, Gallager. Data Networks[M]. The 2nd edition. New Jersey: Printice-Hall, 1992. 365—478.

[11]Jayakrishnan R. A faster path-based algorithm for traffic assignment[J]. Transportation Research Record, 1994, 1443: 75—83.

[12]Cheng L, Lida Y. Uno N. A stochastic flow-dependent model for path flow estimation[J]. Infrastructure Planning Review, 2001, 18(3): 573—580.

[13]TRB. Highway Capacity Manual 2000[S]. Washington, D.C.: Transportation Research Board, National Research Council, 2000.

[14]Bazaraa M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms[M]. New York: John and Wiley, 1993.

[15]Cheng L. Road Network Reliability Based on Traffic Flow Equilibrium[D]. Kyoto: Kyoto University, 2002.

[16]Leventhal T. A column generation algorithm for optimal traffic assignment[J]. Transportation Science, 1973, 7: 168—176.

[17]程　琳，王　炜，王京元，等. 用户均衡网络中的敏感度分析方法[J]. 系统工程理论与实践，2004，24(11)：116—121.

Cheng Lin, Wang Wei, Wang Jingyuan, *et al*. Solutions to sensitivity analysis for the equilibrium network flow[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2004, 24(11): 116—121.(in Chinese)

[18]黄海军，M G H Bell，杨　海. 公共与个体竞争交通系统的定价研究[J]. 管理科学学报，1998，1(2)：17—23.

Huang Haijun, M G H Bell, Yang Hai. Pricing and modal split in a competitive system of mass transit and highway[J]. Journal of Management Sciences in China, 1998, 1(2): 17—23.(in Chinese)

[19]高自友，宋一凡，四兵锋，等. 公交网络中基于弹性需求和能力限制条件下的 SUE 配流模型及算法[J]. 北方交通大学学报，2000，24(6)：1—7.

Gao Ziyou, Song Yifan, Si Binfeng, *et al*. A SUE assignment model and solution algorithm with elastic transit demand and bottlenecks for public transport networks[J]. Journal of Northern Jiaotong University, 2000, 24(6): 1—7.(in Chinese)

Equilibrium model and augmented Lagrange multiplier solution for congested traffic network

CHENG Lin, *WANG Wei*

Transportation College, Southeast University, Nanjing 210096, China

Abstract: The equilibrium network flow problem is formulated by adding the link capacity constraints as a mathematical programming, which is capable of describing the realistic traffic assignment problem. The travel cost on any congested link might be expressed in the sum of the running time and the waiting time occurred at the link end. The Lagrange multiplier associated with the link capacity constraint is equivalent to the waiting time of the link. The augmented Lagrange multiplier approach combines the exterior penalty with primal-dual and the Quasi-Newton method with the straight gradient to deal with the capacitated equilibrium network flow problem. The Quasi-Newton method employs the gradient of the objective function to obtain an improving feasible direction scaled by the second-order derivatives, and makes line search to obtain an optimal step size to guarantee feasibility of either path or link flow.

Key words: traffic network flow; congestion; jam; equilibrium; augmented Lagrange multiplier; Newton formula