第10卷第2期 管 理 科 学 学 报 Vol.10 No.2
2007年4月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Apr. 2007

一类网络扩张的机会约束模型与算法①

吴 云[1], 林 毅[2], 周 建[3]
(1.武汉理工大学管理学院, 武汉 430073; 2.武汉大学化学与分子科学学院, 武汉 430072; 3.里昂大学计算机系, 法国)

摘要: 在不确定环境中的机会约束下,怎样去增加一组边的容量到一个指定的瓶颈容量,而使网络瓶颈扩张的费用最小.带有随机单位扩张费用的网络瓶颈容量扩张问题,可以根据一些概率机会约束规则,列出它的机会约束规划模型的通用表达式、将网络瓶颈容量算法、随机模拟方法和遗传算法合成在一起,设计出该问题的混合智能通用算法.最后,给出数值案例.

关键词: 瓶颈容量扩张; 机会约束规划模型; 混合智能算法
中图分类号: U121 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007-9807(2007)02-0007-05

0 引 言

近几年来,在网络扩张领域中,很多专家做了相应的工作.Ahuja 和 Orlin[1]在网络流和网络流模型领域做了相当多的工作,他们给出了有约束限制的最大流问题的网络容量扩张算法.Berman[2]研究了减少一个给定树的边用来减少最短树的权值问题,并证明该问题有强多项式解法.Krumke[3]给出了两个改进的网络流模型,并对一些网络改进问题给出了启发式算法.Zhang 和 Yang[4]对一类的网络瓶颈扩张问题给出了强多项式算法.在 Zhang 的研究基础上,Yang C 等[5]考虑了在预算和瓶颈容量限制下的网络扩张问题,同样地给出了强多项式的算法.王洪国等[6,7]将 Yang C 等的网络瓶颈模型加以扩充,解决了无向网络容量扩张和有向网络容量扩张的问题,它们进入了固定扩张费用的概念.同期,Yang X G[8]在网络扩张的过程中,引入了多个范式的问题,巧妙地构造了网络模型来解决网络优化问题,并给出了相应的算法.以上作者的研究工作都是对确定型问题的研究,但是实际中有很多不确定因素,例如需求的不确定性,扩张费用、完成时间的不确定性,让前面的研究显得有一定的局限性.最早开始研究机会约束模型的是 Charnes 和 Cooper[9]提出了第二类随机规划,其显著特点是机会约束条件至少以一定的置信水平成立.随后有很多人开始对该问题的研究.Liu[10]研究了对于模糊决策系统中的最大机会约束问题.Aringhieri[11]通过 Tabu 搜索方法和随机模拟方法给出了机会约束模型的一种解法.开始引入随机瓶颈容量扩张问题的是 Ishii 和 Nishida[12],随后,Katagiri 和 Ishii[13]讨论了在模糊随机边权值下的瓶颈支撑树的机会约束模型.接着在此基础上,Katagiri 和 Masatoshi Sakawa[14]研究了在模糊随机瓶颈支撑树问题的必要的概率和评估问题.国内,Liu B[15]用遗传算法来解决机会约束的网络优化中定位的问题,都取得了良好的效果.

1 带有随机单位扩张费用的网络瓶颈容量扩张模型

让 $G(V, E, C)$ 表示一个无向网络结构,它由顶点集 $V=\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ 和边集 $E=\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_m\} \in V^* V$ 构造而成.每个边上都有

① 收稿日期: 2004-06-03; 修订日期: 2006-07-15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70071011).
作者简介: 吴 云(1974—),男,湖北武汉人,博士,讲师.Email: wuyun1974@hotmail.com

一个初始的边容量 c_i，初始的网络容量矢量为 $\boldsymbol{C}=\{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m\}$，每个边上都有一个 w_i 的单位扩张费用，该单位扩张费用矢量 $\boldsymbol{W}$ 是随机矢量，它满足一定的分布函数．网络图 $\boldsymbol{G}$ 的生成树 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(N,S)$ 是部分图，它满足下面的条件：

1) $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 有相同的定点；

2) $|S|=n-1$ 表示集合 S 的势及边的个数；

3) $\boldsymbol{T}$ 是连通图．

定义网络 $\boldsymbol{G}(V, E, \boldsymbol{C})$ 中的一个生成树 $\boldsymbol{T}$ 的容量 $cap(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C})$ 为 $\boldsymbol{T}$ 中各边的瓶颈容量，即

$$cap(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C}) = \min\{c_i \mid e_i \in \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \in \boldsymbol{G}(V,E,\boldsymbol{C})\} \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{C})$ 表示网络 $\boldsymbol{G}(V,E,\boldsymbol{C})$ 的最大容量树，即

$$cap(\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{C}) = \max_{T}\{cap(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C})\} \tag{2}$$

本文要研究的预问题是：如何对原来的容量矢量 $\boldsymbol{C}$ 进行扩张，使得扩张后的网络 $\boldsymbol{G}(V,E,\underline{\boldsymbol{C}})$ 的最大扩张树的容量 $cap(\boldsymbol{T}^*,\underline{\boldsymbol{C}})$ 在满足一定的条件范围下，而总的扩张费用最少．使

$$H(r) = \{\underline{\boldsymbol{C}} \mid \underline{\boldsymbol{C}} \geqslant \boldsymbol{C}, cap(\boldsymbol{T}^*,\underline{\boldsymbol{C}} \geqslant r)\} \tag{3}$$

问题 1 给定 r_0，如何扩张 $\boldsymbol{C}$ 到 $\underline{\boldsymbol{C}}$，使得扩张的费用 $(\underline{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$ 尽可能少，且 $cap(\boldsymbol{T}^*,\underline{\boldsymbol{C}}) \geqslant r_0$．容易看出

$$\begin{aligned} &\min(\underline{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} \\ &\text{s.t. } \underline{\boldsymbol{C}} \in H(r_0) \end{aligned} \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{W}$ 的每一个分量 w_i 分别服从一定的函数分布．

现在根据上面的分析，引入概率统计的概念和带有随机单位扩张费用的网络瓶颈容量扩张的机会约束规划模型（Chance-constrained programming model），该机会约束规划模型的核心思想就是在给定的机会约束的置信区间条件下，优化目标函数的值．解决现实中的不确定问题，其显著特点是机会约束条件至少以一定的置信水平成立，得到现实中合理的解法．

当单位扩张费用矢量 $\boldsymbol{W}=\{w_1,w_2,w_3,\cdots,w_m\}$ 为随机变量时，总的扩张费用 $COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C})$ 就也是一个随机变量．现在考虑的问题是让 $COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C})$ 的值最小，即

$$COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C}) = \min(\underline{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{C})^{T}\boldsymbol{W}$$

并提供一个新的想法去建立普遍性的带有随机单位扩张费用的网络瓶颈容量扩张的机会约束规划模型，该模型如下

$$\begin{aligned} &\min \bar{f} \\ &\text{s.t.}\begin{cases} Pr\{\boldsymbol{W}\in\Omega \mid COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C}) \leqslant \bar{f}\} \geqslant \alpha \\ \underline{\boldsymbol{C}} \geqslant \boldsymbol{C} \\ cap(T,\underline{\boldsymbol{C}}) \geqslant r_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

或者为

$$\begin{aligned} &\min \bar{f} \\ &\text{s.t.}\begin{cases} Pr\{\boldsymbol{W}\in\Omega \mid COST(\overline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C}) \leqslant \bar{f}\} \geqslant \alpha \\ \underline{\boldsymbol{C}} \in H(r_0) \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

其中，设定随机变量 $\boldsymbol{W}=\{w_1,w_2,w_3,\cdots,w_m\}$ 是定义在概率空间 (Ω,Λ,Pr) 中的．

问题 2 本文要研究的最终问题是：在随机单位扩张费用下，如何对原来的容量矢量 $\boldsymbol{C}$ 进行扩张，使得扩张后的网络 $\boldsymbol{G}(V, E, \underline{\boldsymbol{C}})$ 的最大扩张树的容量 $cap(\boldsymbol{T}^*, \underline{\boldsymbol{C}})$ 在满足一定的条件范围下，带有机会约束条件的扩张费用 $COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C})$ 在给定的置信区间 α 下，使得总的扩张费用最少．

问题 2 中的机会约束规划模型中，还包含了一个瓶颈容量的一个子问题

$$COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C}) = \min(\underline{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$$

也就是问题 1，一旦随机变量 $\boldsymbol{W}$ 在概率空间 (Ω,Λ,Pr) 中取定一个值后，$\boldsymbol{W}$ 就变成了一个确定的值了，记为 $\underline{\boldsymbol{W}}$，该确定问题在文献[4,5]中，给出了很好的强多项式解法．下面讨论该问题的一般性解法．

2 随机网络瓶颈容量扩张的混合智能算法

2.1 计算不确定函数

由上面的思路可以得到该机会约束规划问题的解法．首先设计一个随机模拟的方法来得到的不确定函数的值

$$U(\underline{\boldsymbol{C}}) \to \min\left\{\bar{f} \mid Pr\left\{\boldsymbol{W}\in\Omega \mid COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C}) \leqslant \bar{f}\right\} \geqslant \alpha\right\} \tag{7}$$

步骤 1 根据概率 Pr 从 Ω 中产生随机变量 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \boldsymbol{W}_3, \cdots, \boldsymbol{W}_N$ 的确定值，这里 N 为一个

充分大的数.

步骤2　对每个 $\boldsymbol{W}_k$，根据文献[4,5]中设计的确定网络瓶颈容量扩张算法来计算问题1

$$\min(\underline{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_k$$
$$\text{s.t. } \underline{\boldsymbol{C}} \in H(r_0) \tag{8}$$

也就是该机会约束模型的子问题.将该子问题的最优化值设为 c_k，$k = 1,2,\cdots,N$.

步骤3　令

$$N' = \mathrm{ent}(\alpha N)$$

步骤4　返回在 $\{c_1,c_2,c_3,\cdots,c_N\}$ 序列中第 N' 个元素.

2.2　混合智能算法

为了解决该问题,将网络瓶颈容量算法、随机模拟方法和遗传算法合成在一起,设计出混合智能算法.这个算法会大大降低计算量,可以用该算法来处理大规模的问题.

步骤1　在可行域 $\underline{\boldsymbol{C}} \in H(r_0)$ 中,初始化染色体

$$V_k = (\underline{\boldsymbol{C}}^k) = (\underline{c_1^k},\underline{c_2^k},\underline{c_3^k},\cdots,\underline{c_m^k})$$
$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\text{pop\_ size}$$

步骤2　针对每个染色体,计算其目标值

$$U^k(\underline{C}^k),k = 1,2,3,\cdots,\text{pop\_ size}$$

用3.1节中的随机模拟方法来获得,其中包含了文献[4～7]的确定性网络瓶颈容量扩张强多项式解法去解其中问题1(式(4)).

步骤3　计算每个染色体的适应度,用的评价函数为

$$Eval(V_k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}$$
$$k = 1,2,3,\cdots,\text{pop\_ size}$$

$\alpha \in (0,1)$ 是遗传算法中的参数.染色体 V_1,$V_2,V_3,\cdots,V_{\text{popsize}}$ 按照它们评价值的大小,从好到坏重新排列.

步骤4　根据每个染色体的适应程度,通过旋转赌轮 pop_ size 次来确定下一代的染色体.这样获得了新的染色体,把它们表示为 V_k，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$ pop_ size.

步骤5　通过染色体的交叉操作来更新染色体 V_k，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$ pop_ size,首先定义参数 $\overline{Pc}$ 作为交叉操作的概率.为确定交叉操作的父代,从 $i = 1$ 到 pop_ size 重复以下过程:从$[0,1]$中产生一个随机数 r,如果 $r < \overline{Pc}$,则选择 V_i 作为一个父代.用 $V_1',V_2',V_3',\cdots$ 表示上面选择的父代,随机地分成下面的对(V_1',V_2'),(V_3',V_4'),(V_5',V_6'),$\cdots$,以(V_1',V_2')为例,首先在$(0,1)$中产生一个随机数 c,按照下式在 V_1',V_2' 之间进行交叉操作,产生两个后代 X，Y

$$X = cV_1' + (1-c)V_2',\ Y = cV_2' + (1-c)V_1'$$

如果这两个子染色体,在可行域 $\underline{\boldsymbol{C}} \in H(r_0)$ 中,可以用它们来代替其双亲.如果不在该可行域中,则放弃该子染色体,重新交叉操作,直到生成的子染色体满足可行域 $\underline{\boldsymbol{C}} \in H(r_0)$ 为止.最后新的染色体 V_k，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$ pop_ size 形成.

步骤6　通过变异操作来更新染色体.同上,首先定义一个参数 $\overline{Pm}$ 作为变异的概率,从 $i = 1$ 到 pop_ size 重复以下过程:从$[0,1]$中产生一个随机数 r,如果 $r < \overline{Pm}$,则选择 V_i 作为一个父代.对选中的父类 $V' = (c_1,c_2,c_3,\cdots,c_m)$,做相应的变异操作,首先,在空间 R^n 中随机选择一个变异方向 $\boldsymbol{d}$,如果 $X = V' + \boldsymbol{Md}$ 不在可行区域 $\underline{\boldsymbol{C}} \in H(r_0)$ 中,就设 M 为0到 M 中的随机数,M 为给定的一个大的整数这样就得到了一个新的子染色体.判断它是否满足可行域,如果不满足,再重复,直到子染色体满足可行域为止.用满足条件的子染色体来取代父染色体,就得到了一组新的染色体 V_k，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$ pop_ size.

步骤7　按照给定的循环次数来重复步骤**2**到步骤**6**.

步骤8　将最好的染色体 $V^* = (c_1^*,c_2^*,c_3^*,\cdots,c_m^*) = C^*$ 作为带有随机单位扩张费用的网络瓶颈容量扩张模型最优解.

3　数值实例

实例见图1,图上的参数值见表1.

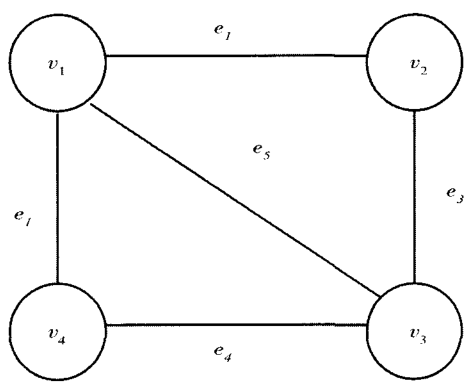

图1　网络图

Fig.1 Network graph

表 1 图上的参数值列表

Table 1 List of parameter on graph

图的边 E	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
初始容量 $\boldsymbol{C}$	$c_1 = 20$	$c_2 = 30$	$c_3 = 40$	$c_4 = 50$	$c_5 = 80$
单位扩张费用 $\boldsymbol{W}$	$w_1 \to N(280,400)$	$w_2 \to N(100,225)$	$w_3 \to N(152,64)$	$w_4 \to N(160,900)$	$w_5 \to N(167,49)$

参数 $E,\boldsymbol{C},\boldsymbol{W}$ 在不同实际问题中具有不同意义,比如说在交通道路规划领域中,E 表示目前的道路,$\boldsymbol{C}$ 表示目前道路的车流通过容量,$\boldsymbol{W}$ 表示扩宽公路需要的每公里的费用. 它是个随客观环境影响的随机变量. 在电力系统,这些变量又是扩展电力线路容量的相关参数.

假设 $r_0 = 75, \alpha = 0.9$. $\underline{C}^* = \{\underline{c}_1^*, \underline{c}_2^*, \underline{c}_3^*, \underline{c}_4^*, \underline{c}_5^*\}$ 为扩张的最优解,$COST^*$ 表示总扩张费用的最优解,$error\% = (COST^* - COST^*_{\min})/COST^*_{\min}$, $V_i = w_i(\underline{c}_i^* - c_i)$,根据式(5)有

$$\min \bar{f}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Pr\{\boldsymbol{W} \in \Omega \mid COST(\underline{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{W},\boldsymbol{C}) \leqslant \\ \quad \bar{f}\} \geqslant 0.9 \\ \underline{\boldsymbol{C}} \geqslant \boldsymbol{C} \\ cap(T,\underline{\boldsymbol{C}}) \geqslant 75 \end{cases} \tag{10}$$

表 2 计算结果的比较

Table 2 Compare computing result

参数	pop_size	Pc	Pm	α	gen	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$COST^*$	$error$(%)
1	30	0.2	0.1	0.07	600	0	4 410	0	3 925	0	8 335	0.847
2	30	0.2	0.1	0.07	600	0	4 365	0	3 900	0	8 265	0.000
3	30	0.3	0.2	0.05	600	0	4 320	0	3 950	0	8 270	0.061
4	30	0.3	0.2	0.10	600	0	4 365	0	4 025	0	8 390	1.512
5	40	0.1	0.3	0.11	600	0	4 500	0	4 050	0	8 550	3.448
6	40	0.1	0.3	0.07	600	0	4 365	0	3 925	0	8 290	0.302
7	40	0.2	0.2	0.08	600	0	4 545	0	4 025	0	8 570	3.690

本算例,网络瓶颈容量算法要通过 200 000 次模拟和 600 次 GA 迭代. 采用不同的 GA 环境参数时,它们的相应结果都列在表 2 中. 其中 $COST^*$ 是本问题的目标函数,也是最优的总扩张费用. 而混合智能算法运行 7 次,每次根据不同的 GA 参数和相同的迭代次数. 为了测量这些结果之间的差异,用在表 2 中的 $error$(%)来表示. 比较这些结果,可见尽管选择了不同的参数,最大的 $error$(%)没有超过 3.690%. 所以说这个混合智能算法对与参数设置来说是具有鲁棒性,并且可以较好解决模型(式(10)).

4 结 论

虽然很多学者对网络瓶颈容量扩张问题做了研究,但是由于问题的复杂性,关于该扩张问题的通用机会约束规划模型 还没有在文献中提到. 本文首次将该问题提出,并建立起通用的模型和解法. 首次在随机网络瓶颈容量扩张问题中,提出通用混合智能算法,将网络瓶颈容量扩张算法,遗传算法,随机模拟算法集合在一起,有效地解决了该类问题.

参 考 文 献:

[1]Ahuja R K, Magnanti T L, Orlin J B. Network Flows[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993.

[2]Averbakh I, Berman O, Punnen A P. Constrained matroidal bottleneck problem[J]. Discrete Applied Mathematics, 1995, 6(3): 201—214.

[3]Krumke S O, Marthe M V, Ravi R, *et al*. Approximation algorithms for certain network improvement[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 1998, 21(7): 257—288.

[4]Zhang J, Yang C, Lin Y. A class of bottleneck expansion problems[J]. Computer and Operational Research, 2000, 12(2): 77—88.

[5]Yang C, Liu J. A capacity expansion problem with budget constraint and bottleneck limitation[J]. Acta mathematica Scientia, 2002, 22(4): 207—212.

[6]王洪国, 马诏汉. 关于无向网络容量扩张的问题[J]. 山东大学学报, 2000, 35(4): 418—424.
Wang Hong-guo, Ma Zhao-han. Capacity expansion problem on undirected network[J]. Journal of Shangdong University, 2000, 35(4): 418—424. (in Chinese)

[7]王洪国, 马诏汉. 关于有向网络容量扩张的问题[J]. 高校应用数学学报, 2001, 16(4): 471—476.
Wang Hong-guo, Ma Zhao-han. Capacity expansion problem on directed network[J]. Application Mathematics Journal of Chinese University, 2001, 16(4): 471—476. (in Chinese)

[8]Yang X G, Zhang J Z . A network improvement problem under different norms[J]. Computational Optimization and Applications, 2004, 27(5): 305—319.

[9]Charnes A, Cooper W W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming[M]. Englewood Cliffs , NJ: Prentice-Hall, 1961.

[10]Liu B. Minimax chance constrained programming models for fuzzy decision systems[J]. Information Sciences, 1998, 11(2): 25—38.

[11]Aringhieri R. Solving Chance-Constrained Programs Combining Tabu Search and Simulation[M]. Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Heidelberg: Springer, 2004.

[12]Ryan S M. Capacity Expansion for Random Exponential Demand Growth[R]. Working Paper No. 00—109, Industrial and Manufacturing Systems Engineering, Iowa State University, Ames, IA, 2000.

[13]Katagiri H, Ishii H. Chance constrained bottleneck spanning tree problem with fuzzy random edge costs[J]. Joural of the Operations Research Society of Japan 2000, 43(1): 128—137.

[14]Katagiri H, Masatoshi Sakawa, Ishii H. Fuzzy random bottleneck spanning tree problem using possibility and necessity measures[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 15(2): 88—95.

[15]Liu B. Uncertain Programming[M]. New York: Wiley, 1999.

Chance-constrained programming model for network expansion

WU Yun[1], *LIN Yi*[2], *ZHOU Jian*[3]

1. College of Management, Wuhan University of Technology, Wuhan 430073, China;
2. College of Chemistry and Molecular Sciences, Wuhan University, Wuhan 430072, China;
3. Department of Computer Sciences, University of Angers, France

Abstract: In this paper we consider how to increase the capacities of the elements in a set E efficiently so that the total cost for the increment of capacity can be decreased to the maximum extent while the final expansion capacity of a given family F of subsets of E is within a given limit bound. We suppose that cost is a stochastic variable which conforms to normal distribution. Network bottleneck capacity expansion problem with stochastic cost is originally formulated as Chance-constrained programming model according to some criteria. In order to solve the stochastic model efficiently, network bottleneck capacity algorithm, stochastic simulation and genetic algorithm are integrated to produce a hybrid intelligent algorithm. Finally, some numerical example are presented.

Key words: bottleneck capacity expansion; chance-constrained programming model; hybrid intelligent algorithm