基于Priceline的买方/卖方定价收益管理问题①

徐雅卿[1]，魏轶华[2]，胡奇英[3]
（1. 西安电子科技大学经济管理学院，西安 710071；2. 上海大学国际工商与管理学院，上海 200444；
3. 复旦大学管理学院，上海 200433）

摘要：以著名逆向拍卖网站Priceline为背景，研究买方定价和卖方定价下的收益管理问题. 假定顾客到达是一任意的更新过程，决策时刻为顾客到达时刻，所以决策是离散时间的. 建立了两种定价方式下的马氏决策过程模型，获得了最优策略的表达式. 在传统收益管理问题中，通常是卖方定价、连续时间决策、同时需要假定顾客到达是一Poisson过程. 对于买方定价，文中证明了，卖方是否知道到达顾客的报价信息不影响他的收益；同时，随着剩余物品数的增加，卖方的期望收益递增，而边际收益递减，最优价格（或报价）递减. 文中讨论两种定价方式下卖方的期望收益之间的关系. 考虑了顾客需求是多重的情形. 最后，数值分析表明文中所得的结论是成立的.

关键词：收益管理；逆向拍卖；Priceline；买方定价；卖方定价；最优策略
中图分类号：O225 **文献标识码**：A **文章编号**：1007-9807(2008)03-0063-07

0 引 言

电子商务为新的商业模式提供了广阔的天地，同时各种商业模式也丰富了电子商务的发展，其中之一就是以Priceline为代表的逆向拍卖模式. 自1998年4月开始运行至今，Priceline已经有超过1 600万的注册用户. 2002年，Priceline销售了290万张机票，410万酒店入住定单，280万车辆出租日. 2006年Priceline的营业收入为11亿美元，比2005年增长了16.7%. 国内近期开通的So-Hotel网站，则更进一步允许顾客与酒店进行讨价还价.

在Priceline中，到达的顾客有一个报价，卖方如果接受这个报价，则成交，交易价格为顾客的报价；否则，卖方拒绝，则顾客离去. 本文称这种交易方式为买方定价，区别于传统收益管理中的卖方定价. 而So-Hotel网站上的定价方式则是卖方定价与买方定价这两种方式的结合.

Kannan和Kopalle调查发现[1]，具有易腐性的商品（如机票、旅店房间、租车等）常采用逆向拍卖方式，这是因为这类商品的价格具有不确定性，影响价格变化的因素比较多，价格差异相对比较大，所以对卖方来说比采用固定价格获得的期望利润要高.

销售易腐商品的常用方法之一是卖方的动态定价，卖方通过价格的调整来提高收益. 这方面的研究是收益管理的范畴. 在传统的收益管理研究中，假定卖方确定一个最优的价格策略 $\pi = (p_t, t \geq 0)$，它表示 t 时的价格为 p_t. 在 t 时到达的顾客如果接受价格 p_t，则成交，成交价格是 p_t；否则，顾客离去. 这方面的文献已有很多，如文献[2~6]，近期综述可见文献[7].

本文将讨论销售易腐商品的买方定价和卖方定价这两种交易方式，运用马氏决策过程分别建立其数学模型，获得最优策略的显式表达式，其中

① 收稿日期：2007-05-28；修订日期：2008-03-30.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70571049)；上海高校选拔培养优秀青年教师基金资助项目(B.99-0303-06-087).
作者简介：徐雅卿(1978—)，女，河北唐山人，博士生，Email：yaqingxu2002@yahoo.com.cn.

本文并不要求顾客到达过程是 Poisson 过程. 在此基础上,讨论最优值函数和最优策略的性质,并将其推广到顾客有多重需求的情形. 最后,本文将对模型进行数值分析.

1 卖方定价

考虑如下的情形. 卖方通过网站(如 Priceline)要在 T 时间内销售掉 N 件物品,没有销售掉的物品的价值为零. 顾客的到达服从一个更新过程,即相继到达间隔时间互相独立②. 每一个到达的顾客对待购物品进行报价,它是私有信息,即每位顾客知道自己报价的值,但别人不知道其具体值,只知道它是一个分布函数为 $F_t(\cdot)$ 的随机变量,其中 t 表示顾客到达时拍卖的剩余时间. 卖方收到顾客的报价之后,立即决定是否接受顾客的报价. 如果接受,则交易成功,交易价格是顾客的报价,同时物品数量减少一个;否则,此次交易失败,物品数量保持不变.

引入如下的符号:

(t,n,p): 状态变量,它表示在拍卖的剩余时间为 t 时,有一报价为 p 的顾客到达,此时剩余的物品数是 n.

$F_t(\cdot)$: 拍卖的剩余时间为 t 时到达顾客报价的分布函数.

$G_t(\cdot)$: 在 t 时刻有一顾客到达的条件下,下一个顾客到达间隔时间的分布函数.

$\alpha > 0$: 连续折扣因子.

令 $V_{\mathrm{I}}(t,n,p)$ 表示卖方在状态 (t,n,p) 处的最优值函数. 那么,由胡奇英[8] 中对非平稳半马氏决策过程的结论可知,$V_{\mathrm{I}}(t,n,p)$ 是以下最优方程的唯一有界可测解

$$V_{\mathrm{I}}(t,n,p)=\max\left\{\begin{array}{l} p+\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^\infty V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1,q)\mathrm{d}F_{t-s}(q)\mathrm{d}G_t(s) \\ \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^\infty V_{\mathrm{I}}(t-s,n,q)\times \mathrm{d}F_{t-s}(q)\mathrm{d}G_t(s) \end{array}\right\} \tag{1}$$

满足边界条件

$$V_{\mathrm{I}}(0,n,p) = V_{\mathrm{I}}(t,0,p) = 0$$

最优方程(1) 右边第 1 项表示卖方接受顾客的报价 p 时他的期望总收益,第 2 项表示卖方拒绝顾客报价 p 时他的期望总收益;边界条件分别表示当拍卖结束时,以及当没有剩余物品时,卖方的期望收益均为零.

下面讨论卖方的最优策略. 定义

$$\begin{aligned} p^*(n,t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^\infty V_{\mathrm{I}}(t-s,n,q)\times \mathrm{d}F_{t-s}(q)\mathrm{d}G_t(s) - \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^\infty V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1,q)\mathrm{d}F_{t-s}(q)\mathrm{d}G_t(s) \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^\infty [V_{\mathrm{I}}(t-s,n,q) - V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1,q)]\mathrm{d}F_{t-s}(q)\mathrm{d}G_t(s) \end{aligned} \tag{2}$$

可以得到以下结论.

命题 1 卖方的期望收益 $V_{\mathrm{I}}(t,n,p)$ 随剩余物品数 n 递增,并且其最优策略是:在 (t,n) 时到达顾客的报价达到或者超过 $p^*(n,t)$ 时接受,否则拒绝.

证明 对 n 用数学归纳法,容易证明 $V_{\mathrm{I}}(t,n,p)$ 随 n 递增. 后一关于最优策略的结论由最优方程(1) 很容易得到. 证毕.

本文称 $p^*(n,t)$ 为卖方的最优接受价,显然,它具有通常的含义,即它表示在 (t,n) 时到达一个顾客时,卖方拒绝与接受其报价之间的边际收益之差. 当拒绝的边际收益超过 $p^*(n,t)$ 时,拒绝对于卖方来说是最优的;否则,接受是最优的.

2 买方定价信息对卖方不起作用

下面将简化上节中所得到的最优方程. 注意到方程(1) 右边的两个积分表达式,引入如下的函数

$$V_{\mathrm{I}}(t,n) := \int_0^\infty V_{\mathrm{I}}(t,n,q)\mathrm{d}F_t(q) \tag{3}$$

此处仍然使用记号 V_{I},只是它只有两个变量,这样不至于引起混淆. 由此,由最优方程(1) 及最优策略 $p^*(n,t)$ 的定义,可以得到

② 在通常的收益管理中,需要假定顾客的到达过程是一 Poisson 过程. 而本文的假定没有这么强,仅仅要求顾客到达间隔时间是相互独立的.

$$V_{\mathrm{I}}(t,n)=\int_{p^*(n,t)}^{\infty}\Big[p+\int_0^t e^{-\alpha s}\int_0^{\infty}V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1,q)\mathrm{d}F_{t-s}(q)\mathrm{d}G_t(s)\Big]\mathrm{d}F_t(p)+\int_0^{p^*(n,t)}\Big[\int_0^t e^{-\alpha s}\int_0^{\infty}V_{\mathrm{I}}(t-s,n,q)\mathrm{d}F_{t-s}(q)\mathrm{d}G_t(s)\Big]\mathrm{d}F_t(p)$$
$$=F_t(p^*(n,t))\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n)\mathrm{d}G_t(s)+\int_{p^*(n,t)}^{\infty}p\mathrm{d}F_t(p)+\Big[1-F_t(p^*(n,t))\Big]\times\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1)\mathrm{d}G_t(s)$$

同时，对任一 $p\geqslant 0$，考虑以下策略当 $p\geqslant p_0$ 时，接受该顾客，否则，拒绝该顾客；而在余下的时间中，按最优策略行事. 则此策略下的期望报酬不高于 $V_{\mathrm{I}}(t,n,p)$（因为这是在最优策略下的期望报酬）. 于是

$$V_{\mathrm{I}}(t,n)=\int_0^{p_0}V_{\mathrm{I}}(t,n,p)\mathrm{d}F_t(p)+\int_{p_0}^{\infty}V_{\mathrm{I}}(t,n,p)\mathrm{d}F_t(p)\geqslant\int_0^{p_0}\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n)\mathrm{d}G_t(s)\mathrm{d}F_t(p)+\int_{p_0}^{\infty}\{p+e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1)\mathrm{d}G_t(s)\}\mathrm{d}F_t(p)$$
$$=F_t(p_0)\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n)\mathrm{d}G_t(s)+\int_{p_0}^{\infty}p\mathrm{d}F_t(p)+[1-F_t(p_0)]\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1)\mathrm{d}G_t(s)$$

以上两式说明，$V_{\mathrm{I}}(t,n)$ 是以下方程的解

$$V_{\mathrm{I}}(t,n)=\max_q\{F_t(q)\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n)\mathrm{d}G_t(s)+\int_q^{\infty}p\mathrm{d}F_t(p)+[1-F_t(q)]\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1)\times\mathrm{d}G_t(s)\}\tag{4}$$

且最优策略 $p^*(n,t)$ 仍然取得以上方程中的上确界，而边界条件仍然是 $V_{\mathrm{I}}(0,n)=V_{\mathrm{I}}(t,0)=0$. 由马氏决策过程的理论可知，以上方程是以下问题（本文称之为买方定价 II）的最优方程，$V_{\mathrm{I}}(t,n)$ 是方程(4) 的唯一有界可测解，$p^*(n,t)$ 是相应的最优策略，且可写为

$$p^*(n,t)=\int_0^t e^{-\alpha s}\Delta V_{\mathrm{I}}(t-s,n)\mathrm{d}G_t(s)\tag{5}$$

其中，$\Delta V_{\mathrm{I}}(t-s,n)=V_{\mathrm{I}}(t-s,n)-V_{\mathrm{I}}(t-s,n-1)$ 是 $V_{\mathrm{I}}(t-s,n)$ 关于变量 n 的一阶差分.

买方定价 II 是这样的问题：它与上面引入的买方定价问题类似，卖方通过网站要在 T 时间内销售掉 N 件物品，没有销售掉的物品的价值为零；顾客的到达服从一个更新过程，即相继到达间隔时间互相独立同分布；每一顾客都有一报价，它是私有信息，即 t 时到达的顾客知道自己报价的值，但别人不知道其具体值，只知道它是一个分布函数为 $F_t(\cdot)$ 的随机变量. 但与买方定价不同的是，在顾客到达时，卖方确定给此顾客的一个价格低限 q^*，当且仅当顾客的报价不低于 q^* 时，卖方才会接受，从而顾客按其报价购买一件物品. 由于成交价是买方确定的，所以这个问题仍是一个买方定价的问题.

需要指出的是，买方定价 II 与前面讨论的买方定价问题的区别在于，在这儿，买卖双方的交互作用如下：顾客到达时，首先，卖方确定价格低限 q^*；然后，顾客报价 p；最后，比较 q^* 与 p 的大小，以确定是否成交. 而在上面讨论的买方定价中，顾客到达时即报价，然后卖方确定接受价，最后比较二者的大小以确定是否成交. 但上面的讨论说明这两种定价方式是等价的：买方的付出与卖方的期望收益在两种方式下都是相同的.

对卖方而言，注意到在买方定价中，买方到达并且报价在先，一旦报价就公开了他的信息，而卖方则依据此在其后制定最优策略；在买方定价 II 中，卖方制定最优策略在先，顾客报价在其后，因而卖方在制定最优策略的时候并不知道买方的报价信息. 所以这两种模型中的信息结构是不同的. 但这两种模型间的等价性说明是否知道到达顾客的保留价（报价）信息是无关的，也即到达顾客的保留价信息对卖方不起作用. 由此，即得以下定理.

定理 1　卖方是否知道到达顾客的保留价对他没有影响.

前面已经证明了两个模型是等价的，因此，所讨论的性质，只需在两个模型中证明一个就可以了. 由等价性，另一个就是显然成立的. 因此，前面的命题 1 中的结论对二者也都是成立的. 可以得到以下的定理.

定理 2　对于买方定价，卖方的期望收益

$V_{\mathrm{I}}(t,n)$ 随剩余物品数 n 递增，边际收益 $\Delta V_{\mathrm{I}}(t,n):=V_{\mathrm{I}}(t,n)-V_{\mathrm{I}}(t,n-1)$ 随 n 递减，最优价格 $p^*(n,t)$ 随 n 递减.

证明 首先，对 n 用数学归纳法即可证得 $V_{\mathrm{I}}(t,n)$ 是 n 的递增函数. 再与魏铁华，胡奇英[6]中完全相同的可以证明，$V_{\mathrm{I}}(t,n)$ 是 n 的凹函数，所以 $\Delta V_{\mathrm{I}}(t,n)$ 随 n 递减. 由此即知最优价格 $p^*(n,t)$ 随 n 递减. 证毕.

以上定理是说，卖方的期望收益随剩余物品数的增加而增加，但其增加的值则是下降的.

3 卖方定价

现在考虑卖方定价的情形. 与前相同，假定卖方通过网站（如 Priceline）要在 T 时间内销售掉 N 件物品，没有销售掉的物品的价值为零；顾客的到达服从一更新过程，即相继到达间隔时间互相独立；每一顾客都有一保留价，它是私有信息，即 t 时到达的顾客知道自己保留价的值，但别人不知道其具体值，只知道它是一个分布函数为 $F_t(\cdot)$ 的随机变量. 但与买方定价的不同之处是，在顾客到达的时候，卖方需要确定给此顾客的一个价格 q^*，当且仅当顾客的保留价不低于 q^* 时，顾客才会接受卖方的价格购买一件物品.

对此，本文定义状态 (t,n) 表示在剩余时间为 t 时有一个顾客到达并且此时的剩余物品数量为 n，记卖方的最优值函数为 $V_{\mathrm{II}}(t,n)$. 则由胡奇英可知[8]，$V_{\mathrm{I}}(t,n)$ 是以下最优方程的唯一有界可测解

$$V_{\mathrm{II}}(t,n)=\max_q\{F_t(q)\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{II}}(t-s,n)\times \mathrm{d}G_t(s)+q[1-F_t(q)]+[1-F_t(q)]\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{II}}(t-s,n-1)\times \mathrm{d}G_t(s)\} \quad (6)$$

边界条件是

$$V_{\mathrm{II}}(0,n)=V_{\mathrm{II}}(t,0)=0$$

最优方程右边中的第 1 项表示到达顾客的保留价低于卖方确定的价格，从而不成交，卖方的期望收益就是未来的期望收益；第二、三项分别表示到达顾客的保留价不低于卖方确定的价格时，从当次交易中的获益，以及未来的期望收益. 边界条件与前一模型中相同，分别表示剩余时间为零时或者没有剩余物品时，卖方不会有收益.

记

$$J(t,n,q)=F_t(q)\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{II}}(t-s,n)\mathrm{d}G_t(s)+q[1-F_t(q)]+[1-F_t(q)]\times\int_0^t e^{-\alpha s}V_{\mathrm{II}}(t-s,n-1)\mathrm{d}G_t(s)$$

表示最优方程(6) 右边大括号中的项. 则在状态 (t,n) 时卖方给到达顾客的最优价格必须满足一阶条件 $\frac{\partial J(t,n,q)}{\partial q}=0$. 整理后，可得最优策略 $q^*(n,t)$ 为下式的解

$$q(1-1/e(q))=\int_0^t e^{-\alpha s}\Delta V_{\mathrm{II}}(t-s,n)\mathrm{d}G_t(s) \quad (7)$$

其中：$\Delta V_{\mathrm{II}}(t-s,n)=V_{\mathrm{II}}(t-s,n)-V_{\mathrm{II}}(t-s,n-1)$；$e(q)=qf_t(q)/(1-F_t(q))$ 为分布函数 $F_t(q)$ 的一般失效率. 在收益管理的文献中经常会假设递增一般失效率（IGFR），即 $e(q)$ 随 q 递增（参见文献[9]）.

最优值函数和最优策略具有以下性质：

定理 3 1）最优值函数 $V_{\mathrm{II}}(t,n)$ 是 n 的递增凹函数，边际收益 $\Delta V_{\mathrm{II}}(t,n)$ 随 n 递减；

2）在 IGFR 假设下，最优价格 $q^*(n,t)$ 随 n 递减.

证明 1）与定理 2 的证明类似.

2）由上一步的结论可以得到式(7) 右边随 n 递减，而由 IGFR 假设可以得到式(7) 左边随 q 递增，因此可以容易得到 $q^*(n,t)$ 随 n 递减. 证毕.

以上定理的结论与买方定价的定理 2 中的结论相同. 故而其含义也与定理 2 中的相同，这里不再给出.

本节最后指出，从买方定价的最优方程(4) 和卖方定价的最优方程(6) 容易推测，二者的最优值函数之间有下面的关系式

$$V_{\mathrm{II}}(t,n)\leqslant V_{\mathrm{I}}(t,n),\forall t,n$$

实际上，这从两个最优方程右边第 2 项即可容易的看出.

但是，在两种定价方式中，分布函数 F_t 具有不同的含义：在买方定价模型中，它表示顾客的报价分布，而在卖方定价模型中则表示顾客的保留价分布. 显然，这二者是不同的. 所以实际上卖方定价和买方定价下卖方期望收益之间的关系将是

比较复杂的. 关于报价和保留价之间的关系,将在另文中作进一步的讨论.

4 多重需求

本节进一步研究到达顾客的需求量是多重的情形,即需求量 ξ 是一个取整数值的随机变量,设 $P\{\xi = m\} = r_m, m = 1,2,\cdots, \sum_{m=1}^{\infty} r_m = 1$. 进一步假定:1) 顾客所有需求的价格相同,2) 顾客的需求可以部分满足,即当其需求量超过卖方手头剩余的物品数时,他购买所有剩余的物品. 仍记买方定价下、卖方定价下的最优值函数分别为 $V_{\mathrm{I}}(n,t)$, $V_{\mathrm{II}}(n,t)$.

在买方定价下的最优方程为

$$V_{\mathrm{I}}(t,n) = \max_q \{F_t(q)\int_0^t e^{-\alpha s} V_{\mathrm{I}}(t-s,n) \times dG_t(s) + \sum_{m=1}^{\infty} r_m (m \wedge n)\int_q^{\infty} p dF_t(p) + [1 - F_t(q)]\sum_{m=1}^{n-1} r_m \int_0^t e^{-\alpha s} V_{\mathrm{I}}(t-s, n-m) dG_t(s)\} \tag{8}$$

边界条件仍为 $V_{\mathrm{I}}(t,0) = V_{\mathrm{I}}(0,n) = 0$. 与前一样,对上式右边括号中项求导,令其等于零,可得卖方的最优接受价为

$$p^*(n,t) = \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} r_m (m \wedge n)} \int_0^t e^{-\alpha s}\Big[V_{\mathrm{I}}(t-s,n) - \sum_{m=1}^{n-1} r_m V_{\mathrm{I}}(t-s,n-m)\Big] dG_t(s) \tag{9}$$

从以上所给出的最优方程与最优价格可知,定理1 和定理2 中给出的单个需求下的性质,在这儿可能不再成立了.

在卖方定价下多重需求时的最优方程为

$$V_{\mathrm{II}}(t,n) = \max_q \{F_t(q)\int_0^t e^{-\alpha s} V_{\mathrm{II}}(t-s,n) \times dG_t(s) + [1 - F_t(q)] q \sum_{m=1}^{\infty} r_m (m \wedge n) + [1 - F_t(q)]\sum_{m=1}^{n-1} r_m \int_0^t e^{-\alpha s} V_{\mathrm{II}}(t-s,n-m) dG_t(s)\} \tag{10}$$

边界条件仍为 $V_{\mathrm{II}}(t,0) = V_{\mathrm{II}}(0,n) = 0$. 与前面一样,通过一阶条件,可以得到卖方的最优价格 $q^*(n,t)$ 是下面方程的解

$$q(1 - 1/e(q)) = \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} r_m (m \wedge n)} \int_0^t e^{-\alpha s}\Big[V_{\mathrm{II}}(t-s,n) - \sum_{m=1}^{n-1} r_m V_{\mathrm{II}}(t-s,n-m)\Big] \times dG_t(s) \tag{11}$$

在传统的连续时间收益管理动态定价问题的研究中,一般假定需求是单个的. 而本文则给出多重需求下最优价格的显式表达式. 由此进行数值计算,将是十分方便的.

5 数值分析

受篇幅所限,且买方定价和卖方定价模型的分析过程相似,这一节将以买方定价情形为例,用数值分析的方法讨论最优值函数和最优价格的性质. 由于买方定价模型和买方定价 II 模型是等价的,因此只需对其中一个模型进行数值分析,得到的性质由等价性即可知在另一个模型中也是成立的. 下面将选择对买方定价 II 进行数值分析.

考虑顾客的三种报价分布. 1) 报价服从$[0, b]$上的均匀分布,此时当顾客的到达过程是率为 λ 的 Poisson 过程时,需求函数是线性的 $\lambda(1 - p/b)$;2) 报价服从 $F(q) = 1 - q^{-b}$,此时当顾客的到达过程是率为 λ 的 Poisson 过程时,需求函数是乘式的;3) 报价服从参数为 b 的指数分布,此时当顾客的到达过程是率为 λ 的 Poisson 过程时,需求函数是指数的.

设定参数值如下. 总时间 $T = 20$, 机票总数 $N = 20$, 加式及指数需求情形下, $b = 1$, 而乘式需求情形下价格必须大于1,所以设定 $b = 2$. 假设顾客的到达过程是 Poisson 过程,到达率为 $\lambda = 1$. 取折扣因子 $\alpha = 0$. 通过编程计算,分析三种需求函数的性质:最优值 $V(t,n)$ 分别是剩余时间 t 及剩余物品数量 n 的凹函数;边际收益随剩余时间 t 递增,随剩余物品数量 n 递减;最优价格 $q(n,t)$ 随 t 递增,随 n 递减. 其中,关于 n 的性质,已经在定理 2 中得到证明,这里通过数值分析进一步得到验证.

下面分以下三种情况来讨论,由于三种需求形式下的情形是完全相同的,所以只给出指数需

求下数值结果的图示.

（Ⅰ） 边际收益随 t, n 变化情况

由图 1 可知,三种需求函数情形下的边际收益都随 t 递增,随 n 递减. 说明剩余时间越长、剩余物品数量越少,边际收益越大. 也可以理解为,越接近交易结束时间、或者未交易的物品数量越多,边际收益越小.

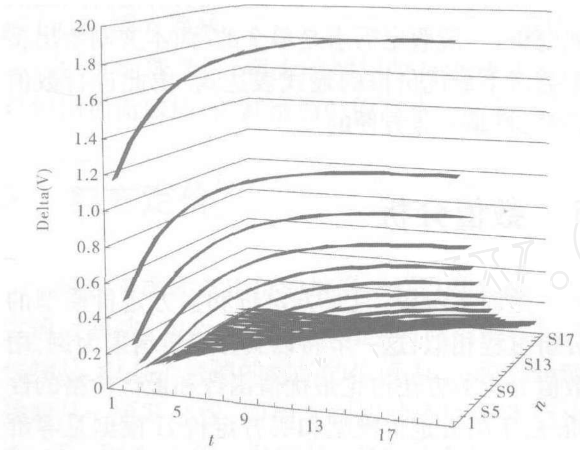

图 1 指数需求情形下边际收益随 t,n 的变化

Fig. 1 Variation of marginal revenue with t, n

（Ⅱ） 最优价格 $q(t,n)$ 随 t, n 的变化情况

由图 2 显示,三种需求函数情形下的最优价格 $q(t,n)$ 都分别随 t 递增、随 n 递减. 说明剩余时间越长、剩余物品数量越少,卖方需要确定的最优价格越大,因而所获得的边际收益也就越大. 亦可理解为,越接近交易时间结束、未交易的物品数量越多,卖方为了最大程度获取最大收益,不得不降低最优价格,从而达成交易.

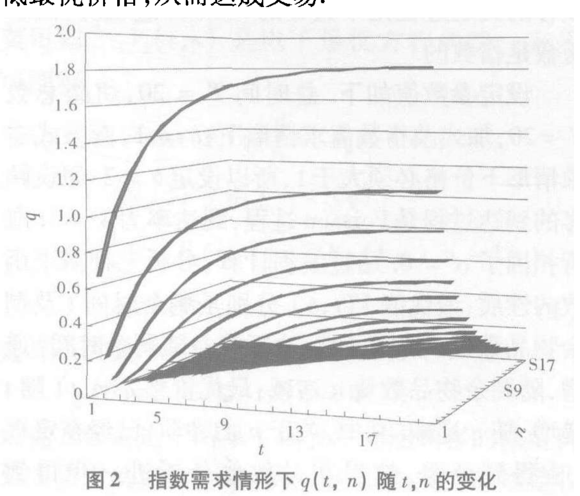

图 2 指数需求情形下 $q(t, n)$ 随 t,n 的变化

Fig. 2 Variation of $q(n, t)$ with t, n

（Ⅲ）最优值 $V(t, n)$ 随 t, n 的变化情况

由图 3 显示,三种需求函数情形下的 $V(t, n)$ 都分别是 t, n 的凹函数.

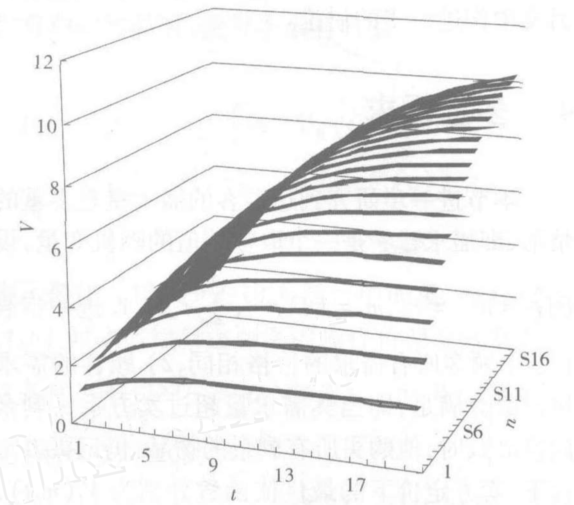

图 3 指数需求情形下 $V(t, n)$ 随 t,n 的变化

Fig. 3 Variation of optimal value $V(t, n)$ with t, n

6 结束语

本文基于逆向拍卖网站 Priceline,研究了买方定价和卖方定价这两种方式下的收益管理问题. 与传统收益管理问题最明显的区别有三:其一,这儿的决策时刻点是顾客到达时刻,所以是离散时间的;其二,这儿不需要像传统收益管理中那样假定顾客到达过程是 Poisson 过程,而是一般的更新过程;其三,本文建立了其马氏决策过程模型,获得了最优策略的显式表达式,而在传统的收益管理中,是很难获得最优策略的表达式的. 对买方定价,本文证明了,卖方是否知道到达顾客的保留价不影响他的收益;同时,随剩余物品数的增加,卖方的期望收益递增,而边际收益递减,最优价格(或报价)递减. 本文还讨论了两种定价方式下期望收益之间的关系,以及多重需求的情形. 数值分析表明文中所得到的结论是成立的.

进一步地,可以研究基于双向拍卖时 Priceline 买卖双方交易机制问题,比较这儿离散决策下的卖方定价与传统的连续时间收益管理问题. 另外的一个问题是本文所建立模型的计算问题,即如何计算最优值函数. 最后,本文的模型都是在有顾客到达时的决策,这与排队系统中的到达控制(见文献[10],或文献[11]中第 10 章)有共同的地方,需要进一步研究二者之间的关系.

陈剑和尤建新曾对本文的初稿提出过宝贵的意见，特别是买方定价和卖方定价的比较问题. 同时，本文也受益于运营管理与金融决策研讨班上各位同仁的宝贵意见. 作者深表感谢.

参考文献：

[1] Kannan P K, Kopalle P K. Dynamic pricing on the Internet: Importance and implications for consumer behavior[J]. International Journal of Electronic Commerce, 2001, 5(3): 63—83.

[2] Littlewood K. Forecasting and Control of Passengers[C]. Proceedings 12th AGIFORS Symposium Proceedings, 1972, 22: 339—362.

[3] Gallego G, Van R G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons[J]. Management Science, 1994, 40(8): 999—1020.

[4] Feng Y Y, Xiao B C. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices[J]. Operations Research, 2000, 48(2): 332—343.

[5] Zhao W, Zheng Y S. Optimal dynamic pricing for perishable assets with nonhomogeneous demand[J]. Management Science, 2000, 46(3): 375—388.

[6] 魏轶华，胡奇英. 顾客有最大最小保留价的连续时间收益管理[J]. 管理科学学报，2002, 5(6): 47—52.
Wei Yihua, Hu Qiying. Continuous time revenue management with maximal & minimal reservation prices[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(6): 47—52. (in Chinese)

[7] Chiang W C, Chen J C H, Xu X. An overview of research on revenue management: Current issues and future research[J]. Int. J. Revenue Management, 2007, 1(1): 97—128.

[8] 胡奇英. 随机终止的非平稳折扣半马氏决策规划[J]. 应用数学学报，1993, 16(4): 566—570.
Hu Qiying. Non-stationary discounted semi-Markov decision programming with stochastic termination[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1993, 16(4): 566—570. (in Chinese)

[9] Ayhan S H, Foley R D. Relationships among three assumption in revenue management[J]. Operations Research, 2004, 52: 804—809.

[10] Stidham S J. Optimal control of admission to a queueing system[J]. IEEE Trans. AC, 1985, 30(8): 705—713.

[11] 胡奇英，刘建庸. 马尔可夫决策过程引论[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2000.
Hu Qiying, Liu Jiangyong. An Introduction to Markov Decision Processes[M]. Xi'an: Xidian University Publishing House, 2000. (in Chinese)

Revenue management problems for customer- and seller-pricing based on Priceline

XU Ya-qing[1], *WEI Yi-hua*[2], *HU Qi-ying*[3]

1. School of Economics & Management, Xidian University, Xi'an 710071, China;
2. College of International Business & Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China;
3. School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract: Based on the reverse auction website—Priceline, we study revenue management problems with both customer-pricing and seller-pricing. Here, a seller wants to sell a given amount of items during a fixed period, and customers arrive according to an arbitrary renewal process. Markov decision process models are presented and expressions for the optimal policies are obtained. These problems differ from the traditional revenue management problems where (1) the seller continuously sets a price, and (2) customers arrive according to a Poisson process. It is shown for the customer-pricing that there is no impact on the seller whether or not he knows the customers' private information, that the optimal policy is monotone in the remaining items, and that the optimal value is a concave function of the remaining items. Also, the expected revenues of the seller in the two pricing cases are compared and the models and the results are generalized to the multiple demand case. Finally, the models and the results are illustrated by numerical analyses.

Key words: revenue management; reverse auction; Priceline; customer-pricing; seller-pricing; optimal policies