

带公平限制的多时段次优拥挤定价模型^①

刘南¹, 陈达强^{1,2}, 吴兆峰¹

(1. 浙江大学管理学院, 杭州 310058; 2. 浙江工商大学信息学院, 杭州 310018)

摘要: 研究在公平限制条件下城市道路系统多时段一般路网的次优拥挤定价问题, 建立公平限制条件下城市道路系统多时段一般路网的次优拥挤定价的双层规划模型, 设计了模拟退火算法并利用模拟计算方法对模型进行了典型路网的计算及结论分析。

关键词: 拥挤定价; 多时段; 双层规划; 模拟退火算法

中图分类号: U491

文献标识码: A

文章编号: 1007-9807(2008)05-0085-09

0 引言

交通拥挤给出行者带来了诸多的成本和损失, 如出行速度降低和出行时间的增加、出行可靠性降低、更多的燃料消耗和机动车损耗、重新计划安排出行或选择另一种出行方式的不便, 以及(长远地讲)更换住所和工作的成本^[1]。在美国, 每年每人仅仅在出行时间增加和燃料消耗两项的额外成本支出就达到上百美元^[2]。更宏观的讲, 交通拥挤降低了城市交通系统的效率, 加剧了城市环境污染, 最终将阻碍城市的经济发展。在城市交通管理中, 越来越多的交通政策制定者已认识到加强交通需求管理的重要性。拥挤定价作为一种交通需求管理策略在国内外受到广泛重视。

国际上目前关于拥挤定价的主要代表性成果体现在: (1) 最优拥挤定价理论(First-best Congestion Pricing Theory), Liu等^[3]对多时段一般路网系统最优出行选择与拥挤收费的研究; Yang等^[4]关于多类型用户交通网络均衡与系统最优问题研究。(2) 瓶颈路段拥挤定价理论(Congestion Pricing Theory with A Bottleneck), Arnott等^[5]在 Vickrey(1969) 瓶颈模型基础上发展的拥挤定价

研究; Huang^[6]研究了考虑用户差别的公共交通与道路系统的定价和模式分担。(3) 次优拥挤定价理论(Second-best Congestion Pricing Theory), Verhoef^[7-9]对单时段(静态)简单路网和一般路网的次优拥挤定价问题的研究; Yang等^[10]对存在高承载车道多车道中合乘与拥挤定价研究; Liu等^[11,12]对两时段两条路径道路系统次优拥挤定价研究。(4) 拥挤定价的社会福利(Social Welfare)研究, Small^[13]分析了拥挤定价对旧金山海湾和洛山矶区的不同收入群体的影响; Ferrari^[14]提出了一个由驾驶员和财政共同分担交通费的福利优化计算方法。

国内很多学者也在拥挤定价各领域进行了广泛而深入的研究。如黄海军等^[15]将拥挤定价理论中的瓶颈模型引入到公共与个体竞争交通系统定价的探索; 田琼等^[16]以瓶颈模型为基础, 针对不同的地铁和停车收费模式, 通过 Logit 随机均衡的交通方式选择模型, 分析收费政策对出行行为的影响; 晏克非等^[17]研究了基于车辆动态导航的拥挤定价问题; 黄卫、胡勇^[18]研究了电子收费在道路交通收费中的应用; 王健等^[19]综述了拥挤定价的理论发展及对我国城市交通管理的启示。张华歆, 周溪召^[20]以网络收益与成本之差的最大化为

① 收稿日期: 2006-09-04; 修订日期: 2008-05-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471053); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-05-0529).

作者简介: 刘南(1961-), 男, 江苏无锡人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: nliu@zju.edu.cn

目标建立上层模型,以多模式交通网络随机用户平衡建立下层模型,提出了一个双层拥挤定价规划模型.刘南^[21]在早期研究基础上,将多时段拥挤定价模型从出行方式角度进行拓展,并取得了一系列研究成果.

本文在上述研究的基础上试图建立一个在公平条件限制下的城市道路系统多时段一般路网次优拥挤定价问题的双层规划模型,并设计一典型路网以验证模型的可行性和可求解,其中符号定义如下:

- N ——网络节点的集合;
- K ——网络路径的集合;
- a ——路段(Link);
- A ——网络路段的集合;
- A^* ——网络中收费路段的集合;
- rs ——OD对(O-D Pair);
- x_a^i ——时间段*i*,路段*a*上的交通流量;
- t_a^i ——时间段*i*,路段*a*上的平均出行成本(以时间为单位);
- τ_a^i ——时间段*i*,对路段*a*上征收的拥挤费用;
- c_a^i ——时间段*i*,路段*a*上的出行时间成本;
- δ_a^i ——收费开关变量.若在时间段*i*,对路段*a*收费,则取1;否则为0;
- ϕ_a^i ——对出行价格进行空间、时间约束的公平指数;
- R ——网络起迄点对(OD-Pair)的集合;
- k ——路径(Path);
- i ——时间段(Period);
- I ——时间段的集合;
- I^* ——征收拥挤费用的时间段集合;
- M ——用户群的集合;
- $f_{k,rs}^i$ ——时间段*i*,OD对*rs*间路径*k*的交通流量;
- $q_{rs}^i(\cdot)$ ——时间段*i*,OD对*rs*间交通需求函数;
- q_{rs}^i ——时间段*i*,OD对*rs*间交通流量;
- p_{rs}^i ——时间段*i*,OD对*rs*的出行价格;
- $\delta_{a,k,rs}^i$ ——开关变量.若时间段*i*,路段*a*在OD对*rs*的路径*k*上,取1;否则为0;
- $\sigma_{k,rs}^i$ ——有效路径开关变量.若在时间段*i*,

OD对*rs*的路径*k*上均衡交通流量大于零,则取1;否则为0;

1 模型建立

1.1 多时段一般路网最优定价模型

根据参考文献[3]、[11]、[12]所讨论的多时段一般路网模型,很容易的可以得出以系统社会福利最大化为目标的多时段一般路网最优拥挤定价模型,其表达式如下:

$$\text{Max } W = B - C = \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^i, q_{rs}^i)} \sum_{i \in I} \sum_{rs \in R} p_{rs}^i(w_i, w_{i'}) dw - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} x_a^i c_a^i(x_a^i) \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i = q_{rs}^i \quad \forall i, rs \quad (2)$$

$$\sum_{rs \in R} \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i \delta_{a,k,rs}^i = x_a^i \quad \forall i, a \quad (3)$$

$$f_{k,rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs, k \quad (4)$$

$$q_{rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs \quad (5)$$

其中, C 为系统总成本, B 为系统总效益,且 $p_{rs}^i(q_{rs}^i, q_{rs}^i)$ 为需求函数 $q_{rs}^i(p_{rs}^i, p_{rs}^i)$ 的反函数;式(1)表示系统社会福利最大化;式(2)表示O-D流量与路径流量的守恒关系;式(3)则表示路段流量与路径流量之间的关系;式(4)、式(5)两式是非负约束.

为使 $B = \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^i, q_{rs}^i)} \sum_{i \in I} \sum_{rs \in R} p_{rs}^i(w_i, w_{i'}) dw$ 定义唯一并可微,需验证下列可积(对称)条件是否满足:

$$\frac{\partial p_{rs}^i}{\partial q_{r's'}} = \frac{\partial p_{r's'}^{i'}}{\partial q_{rs}^i} \quad \forall (i, rs) \neq (i', r's') \quad (6)$$

该条件解释为,OD*r's'*在时间段*i'*的交通量对OD*rs*在时间段*i*的出行价格的影响等于OD*rs*在时间段*i*的交通量对OD*r's'*在时间段*i'*的出行价格的影响,即两者的相互影响是一致的.

1.2 多时段一般路网次优模型

在现实中,最可行的往往是选取网络中的若干条较为拥挤的路段和若干较为拥挤的时段(如高峰期)进行收费.次优模型与最优拥挤定价模型相比具有相同的目标,特点是路段收费空间与时间上的约束.所以,多时段一般路网次优模型应增加以下互补松弛约束条件:

$$p_{rs}^i(q_{rs}^i) = \sum_{a \in A} [t_a^i(x_a^i) + \tau_a^i \delta_a^i] \delta_{a,k,rs}^i \sigma_{k,rs}^i$$

$$\forall i, k, rs \quad (7)$$

其中, τ_a^i 是指时段 i 对路段 a 的次优拥挤收费; δ_a^i 为费用征收的开关系数, 当 $\delta_a^i = 1$ 时表示对时段 i 的路段 a 征收次优拥挤费用, 当 $\delta_a^i = 0$ 时不征收; 开关系数 $\sigma_{k,rs}^i$, 当其取 1 的时候表示在时间段 i , OD 对 rs 的路径 k 上存在交通流量, 即 $f_{k,rs}^i > 0$, 反之则为 0.

次优拥挤定价模型的表达式如下:

$$\text{Max } W = B - C = \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^i, q_{rs}^i)} \sum_{i \in I} \sum_{rs \in R} p_{rs}^i(w_i, w_{i'}) dw - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} x_a^i c_a^i(x_a^i) \quad (8)$$

$$\text{s. t. } p_{rs}^i(q_{rs}^i) = \min_k \sum_{a \in A} [t_a^i(x_a^i) + \tau_a^i \delta_a^i] \delta_{a,k,rs}^i \times \sigma_{k,rs}^i \quad \forall i, k, rs \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K} f_{k,rs}^i = q_{rs}^i \quad \forall i, rs \quad (10)$$

$$\sum_{rs \in R} \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i \delta_{a,k,rs}^i = x_a^i \quad \forall i, a \quad (11)$$

$$f_{k,rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs, k \quad (12)$$

$$q_{rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs \quad (13)$$

从本质上来讲, 这是一个双层规划问题. 上层规划是政府在既定的次优收费方案下为实现社会福利最大化而不断调整不同空间和时间次优费用的大小, 下层则是用户在给定的收费政策下追求自身利益的最大化, 即用户均衡. 则次优拥挤定价模型, 可表示为双层规划问题:

(P1) U1

$$\text{Max } W = B - C = \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^i, q_{rs}^i)} \sum_{i \in I} \sum_{rs \in R} p_{rs}^i(w_i, w_{i'}) dw - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} x_a^i c_a^i(x_a^i) \quad (14)$$

其中, $x_a^i(\tau)$, $a \in A, i \in I$, OD 交通流量 $q_{rs}^i, r \in R, i \in I$ 由下层多时段一般路网次优收费均衡配流模型得到

L1

$$\text{Max } W = \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^i, q_{rs}^i)} \sum_{i \in I} \sum_{rs \in R} p_{rs}^i(w_i, w_{i'}) dw - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \int_0^{x_a^i} c_a^i(w) dw - \sum_{i \in I^*} \sum_{a \in A^*} x_a^i \tau_a^i \quad (15)$$

$$\text{s. t. } \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i = q_{rs}^i \quad \forall i, rs \quad (16)$$

$$\sum_{rs \in R} \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i \delta_{a,k,rs}^i = x_a^i \quad \forall i, a \quad (17)$$

$$f_{k,rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs, k \quad (18)$$

$$q_{rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs \quad (19)$$

式(15)为构造的交通配流等价模型, 不具备任何经济意义^[22]. 其中, I^* 和 A^* 分别表示被征收次优拥挤费用的时间段与路段的集合.

考虑两个时间段的问题. 令 $I = 2, i = 1, 2$, 分别表示高峰期($i = 1$) 和非高峰期($i = 2$). 任一时间段 OD 对 rs 间的交通流量 q_{rs}^i 都是高峰期和非高峰期出行价格的函数 $q_{rs}^i = q_{rs}^i(p_{rs}^1, p_{rs}^2)$. 收入效应假定可忽略不计, 并做下列关联假定:

$$1) \text{ 本时间段价格效应为负} \\ \partial q_{rs}^1 / \partial p_{rs}^1 < 0, \partial q_{rs}^2 / \partial p_{rs}^2 < 0 \quad (20)$$

$$2) \text{ 交叉时间段价格效应为正} \\ \partial q_{rs}^1 / \partial p_{rs}^2 > 0, \partial q_{rs}^2 / \partial p_{rs}^1 > 0 \quad (21)$$

对交通流量函数 $q_{rs}^i = q_{rs}^i(p_{rs}^1, p_{rs}^2)$ 求反函数, 可以得到高峰期和非高峰期的出行价格函数: $p_{rs}^i = p_{rs}^i(q_{rs}^1, q_{rs}^2)$. 由此, 系统的总效益 B 可以表示为以下线积分

$$B = \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^1, q_{rs}^2)} \sum_{i \in I} \sum_{rs \in R} p_{rs}^i(w_i, w_2) dw \\ = \sum_{rs \in R} \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^1, q_{rs}^2)} p_{rs}^1(w_1, w_2) dw_1 + p_{rs}^2(w_1, w_2) dw_2 \quad (22)$$

按照多时段模型的假定, 假定两时间段长度相等, 则总效益中的长度因素可以忽略.

式(22)有两个主要问题: 1) 与线积分的定义有关, 因为该积分依赖于积分的特殊线路, 所以不唯一; 2) 与线积分可导性有关. Liu 等^[11]给出了关于目标函数线积分定义和可导性的讨论, 本文基于同样假设, 即非高峰期交通量的变化对高峰期出行价格的影响, 等同于高峰期交通量的变化对非高峰期出行价格的影响, 使线积分与所选路径无关

$$\frac{\partial p_{rs}^i}{\partial q_{rs}^i} = \frac{\partial p_{rs}^{i'}}{\partial q_{rs}^{i'}} \quad \forall (i, rs) \neq (i', rs'), i = 1, 2 \quad (23)$$

可得两时段一般路网次优拥挤定价模型:

(P2) U2

$$\text{Max } W = \sum_{rs \in R} \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^1, q_{rs}^2)} p_{rs}^1(w_1, w_2) dw_1 + p_{rs}^2(w_1, w_2) dw_2 - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} x_a^i c_a^i(x_a^i) \quad (24)$$

其中, $x_a^i(\tau), a \in A, i \in I$, OD 交通流量 $q_{rs}^i, r \in R, i \in 1, 2$ 由下层多时段网络均衡配流模型确定.

L2

$$\text{Max } W = \sum_{rs \in R} \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^1, q_{rs}^2)} p_{rs}^1(w_1, w_2) dw_1 + p_{rs}^2(w_1, w_2) dw_2 - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \int_0^{x_a^i} c_a^i(w) dw - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} x_a^i \tau_a^i \quad (25)$$

$$\text{s. t. } \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i = q_{rs}^i \quad \forall i, rs \quad (26)$$

$$\sum_{rs \in R} \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i \delta_{a,k,rs}^i = x_a^i \quad \forall i, a \quad (27)$$

$$f_{k,rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs, k \quad (28)$$

$$q_{rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs \quad (29)$$

1.3 带公平限制的两时段一般路网次优模型

多时段次优拥挤定价模型通过对特定时段、路段实行拥挤收费来减缓交通拥挤。虽然总体社会福利增加,但用户的出行成本通常也都会有所增加,且不同 OD、不同时间段的出行成本增加的幅度各异。这与拥挤定价实施的具体时段和路段有关。一般的,就道路空间分布而言,收费道路为城市交通路网的繁忙路段,是公众经常出行的道路,拥挤定价政策的实施必然使得部分用户选择其他道路出行;就时间分布而言,以两时段为例,由于高峰期出行成本部分转移到非高峰期,导致本来在非高峰期出行的用户的出行成本增加。这样拥挤定价政策就对不同时段、不同 OD 产生了时间和空间上的不公平,并可能由于出行者的反对而使得该政策实施的阻力大大增加。

此外,拥挤定价政策必然带来不公平。如果要控制公平因素,需要对拥挤定价政策实施前后各时段、各 OD 的出行成本变化比例作一定的限制。基于这一思路,受 Zhang 等^[23] 的启发,本文设计对城市路网中各时段、各 OD 拥挤定价政策实施前后用户出行价格之比作为公平限制,用公式表示为

$$\frac{p_{rs}^i}{\bar{p}_{rs}^i} \leq \phi_{rs}^i \quad \forall i, rs \quad (30)$$

其中, p_{rs}^i 表示时间段 i , OD 对 rs 在引入次优拥挤定价后用户的出行价格, \bar{p}_{rs}^i 表示时间段 i , OD 对 rs 在不收费用户均衡状态下的用户出行价格(这里的出行价格都等于用户所经路段的出行成本与拥挤收费之和)。 ϕ_{rs}^i 为公平指数,表示对不同 OD、不同时段不公平现象的约束程度。把 ϕ_{rs}^i 作一定的处理,则公平程度可以用决策变量 φ_{rs}^i 来衡量,两个

指数之间的关系如下:

$$\phi_{rs}^i = \begin{cases} 1 + \varphi_{rs}^i \left(\frac{\bar{p}_{rs}^i}{p_{rs}^i} - 1 \right) & \frac{\bar{p}_{rs}^i}{p_{rs}^i} > 1 \quad \forall i, rs \\ 1 & \frac{\bar{p}_{rs}^i}{p_{rs}^i} \leq 1 \quad \forall i, rs \end{cases} \quad (31)$$

其中 \bar{p}_{rs}^i 为时间段 i , OD 对 rs 在实施最优拥挤定价时的用户出行价格,等于各路段出行成本和最优拥挤费用之和。显然,决策变量 φ_{rs}^i 满足 $0 \leq \varphi_{rs}^i \leq 1$; 当 $\bar{p}_{rs}^i > p_{rs}^i$ 时, $1 \leq \phi_{rs}^i \leq \bar{p}_{rs}^i / p_{rs}^i$, 而且,当 $\varphi_{rs}^i = 0$ 时, $\phi_{rs}^i = 1$, 表示公平程度等同于不收费的均衡状态; 当 $\varphi_{rs}^i = 1$ 时, $\phi_{rs}^i = \bar{p}_{rs}^i / p_{rs}^i$, 表示公平程度等同于实施了最优拥挤收费的状态,即次优拥挤定价政策所能达到的最不公平极限。显然,这是两个极端,并且与拥挤定价政策所能带来的对空间和时间的公平程度的跨度相吻合。带公平限制的两时段一般路网次优拥挤定价模型可以用下面的双层规划问题来表示:

(P3) U3

$$\text{Max } W = \sum_{rs \in R} \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^1, q_{rs}^2)} p_{rs}^1(w_1, w_2) dw_1 + p_{rs}^2(w_1, w_2) dw_2 - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} x_a^i c_a^i(x_a^i) \quad (32)$$

$$\text{s. t. } p_{rs}^i / \bar{p}_{rs}^i \leq \phi_{rs}^i \quad \forall i, rs \quad (33)$$

其中, $x_a^i(\tau)$, $a \in A, i \in I$, OD 交通流量 $q_{rs}^i(\tau)$, $r \in R, i \in 1, 2$, 由下层多时段收费均衡模型确定。

L3

$$\text{Max } W = \sum_{rs \in R} \int_{(0,0)}^{(q_{rs}^1, q_{rs}^2)} p_{rs}^1(w_1, w_2) dw_1 + p_{rs}^2(w_1, w_2) dw_2 - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \int_0^{x_a^i} c_a^i(w) dw - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} x_a^i \tau_a^i \quad (34)$$

$$\text{s. t. } \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i = q_{rs}^i \quad \forall i, rs \quad (35)$$

$$\sum_{rs \in R} \sum_{k \in K} f_{k,rs}^i \delta_{a,k,rs}^i = x_a^i \quad \forall i, a \quad (36)$$

$$f_{k,rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs, k \quad (37)$$

$$q_{rs}^i \geq 0 \quad \forall i, rs \quad (38)$$

2 算法设计

本文设计了模拟退火算法求解上文中的双层

规划问题,以求解带公平限制的两时段一般路网次优模型为例,算法如下:

$$\text{令 } \tau = (\tau_1^1, \tau_2^1, \dots, \tau_a^1, \dots, \tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_a^2, \dots)^T$$

$$a \in A^* \quad (39)$$

$$x = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_a^1, \dots, x_1^2, x_2^2, \dots, x_a^2, \dots)^T$$

$$a \in A^* \quad (40)$$

$$\Omega = \{ \tau \mid p_{rs}^i / \bar{p}_{rs}^i \leq \phi_{rs}^i \} \quad (41)$$

步骤1 给定初始解 $\tau^0 \in \Omega$, 初始温度下 $T^0 > 0$, 整数 $\sigma \geq 2$, 常数 $\beta > 0$. 用 Frank-Wolfe 算法求解下层规划问题 $W(\tau^0)$ (假定下层问题用 W 表示). 置 $\tau^0 = \tau^0, X^0 = x^0, \tau_{\max} = \tau^0, X_{\max} = x^0, W_{\max} = W(\tau^0, x^0), k = 0$;

步骤2 产生随机向量 $Z^k = (Z_1^k, \dots, Z_n^k)$,

$$Z_i^k = \text{sgn}(U_i) \cdot \left(\frac{1}{|U_i|^\sigma} - 1 \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (42)$$

其中, U_i 是 $[-1, 1]$ 上均匀分布且两两相互独立的随机变量组. 利用当前迭代点 τ^k 和随机向量 Z^k 产生一个新的试探点 I^k , 即 $I^k = \tau^k + Z^k$;

步骤3 若 $I^k \in \Omega$ 则转入下一步, 否则计算

$$I^k = \tau^k + \text{random} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cdot Z^k \quad (43)$$

其中, $\text{random} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ 表示 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ 上均匀分布的一个随机数. 如这时 $I^k \in \Omega$, 则转下一步. 否则继续进行式(43)的计算, 直到 $I^k \in \Omega$ 为止, 否则转下一步. 若在设定的迭代步数上始终有存在 $I^k \notin \Omega$, 则这时令 $I^k = \tau^k$ 并转下一步;

步骤4 用 Frank-Wolfe 算法求解下层规划问题 $W(I^k)$, 得到 $X^{k*}(I^k)$;

步骤5 产生一个在 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数 η , 计算在给定当前迭代点 τ^k 和温度 T^k 下接受试探点 I^k 的概率 $P_a(I^k | \tau^k, T^k)$, 即

$$P_a(I^k | \tau^k, T^k) = \min \left\{ 1, \exp \left[\frac{W(\tau^k) - W(I^k)}{\beta T^k} \right] \right\} \quad (43)$$

如果 $\eta \leq P_a(I^k | \tau^k, T^k)$, 则置 $\tau^{k+1} = I^k, X^{k+1} = X^{k*}, W(\tau^{k+1}, X^{k+1}) = W(I^k, X^{k*})$; 否则置 $\tau^{k+1} = \tau^k, X^{k+1} = X^k, W(\tau^{k+1}, X^{k+1}) = W(\tau^k, X^k)$;

步骤6 如果 $W(\tau^{k+1}, X^{k+1}) \geq W_{\max}$, 则置 $\tau_{\max} = \tau^{k+1}, X_{\max} = X^{k+1}, W_{\max} = W(\tau^{k+1}, X^{k+1})$;

步骤7 如果终止条件满足, 则算法结束, 置 $\tau^* = \tau_{\max}, X^* = X_{\max}, W^* = W_{\max}$; 否则转步骤8.

步骤8 根据给定的温度更新函数, 产生一个新的温度 T_{k+1}

$$T_{k+1} = \frac{T}{(k+1)^\sigma}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (44)$$

置 $k = k + 1$, 转至步骤2.

3 模拟求解

一般地说, 要获得上述模型的解析解比较困难, 特别是双层规划模型的求解非常复杂, 通常不能求得解析解. 因此, 采用优化数值模拟的研究来获得以上模型的数值解.

3.1 模拟路网及参数说明

3.1.1 模拟路网

本模拟路网为一典型路网, 如图1所示. 整个路网包含了三个节点, 三个路段, 两个 OD 对 ①③ 和 ②③, 三条路段 1、2 和 3. 本模型仅考虑单向 OD, 即 $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2$ 和 $2 \rightarrow 3$; 其中 OD 对 ①③ 拥有两条路径: 1 和 23; OD 对 ②③ 只有一条路径 3. 在这个路网中, 节点 ① 相当于城市郊区, 节点 ③ 相当于市中心; 路段 1 是一条取道城郊进入市区的道路, 路段 3 属于中心市区的道路, 路段 2 则为连接城郊与市区的道路.

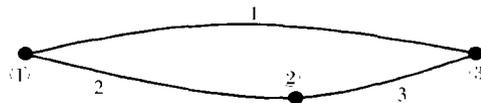


图1 模拟路网

Fig.1 A simple network for simulation

3.1.2 成本函数说明

路段的平均出行成本 $c_a^i(x_a^i)$ 包括出行时间成本和计划相关成本:

$$c_a^i(x_a^i) = \alpha T_a^i + \beta S_i, i = 1, 2; a \in A$$

式中, α 和 β 分别为出行时间和计划相关时间的价值. α 和 β 的值由 Small^[13] 中得到:

$$\alpha = 11 \text{ (美分/min)} \text{ 和 } \beta = 6.5 \text{ (美分/min)}$$

出行时间 T_a^i 采用美国公共道路局 (BPR) 函数:

$$T_a^i = T_a^0 \left[1 + 0.15 \left(\frac{x_a^i}{K_a} \right)^4 \right], i = 1, 2; a \in A$$

式中, T_a^0 表示路段 a 的非拥挤出行时间 (min), K_a 为路段 a 的通行能力水平 (车辆/h). 由于 K_a 小于路段 a 的最大容量, 交通量 x_a^i 可能超过 K_a . 表 1 给出了路段出行成本函数的参数设置. 对于计划相关时间, 高峰期 $S_1 = 0$, 非高峰期 S_2 假定为一常数 $S = 1$ (min).

表 1 路段出行成本参数

Table 1 Cost parameter values for each link

Link	1	2	3
T_a^0 (min)	2	1	1
K_a (车辆/h)	2 000	3 000	3 000

3.1.3 需求函数说明

假定高峰期 ($i = 1$) 和非高峰期 ($i = 2$) 的需求函数为线性, 对于任一 OD 对, 其需求函数形式如下:

$$q^1 = Q^1 - \beta_{11}p^1 + \beta_{12}p^2,$$

$$q^2 = Q^2 + \beta_{21}p^1 - \beta_{22}p^2$$

式中的参数满足下列假定:

- 1) $Q^1 > Q^2 > 0$, 即高峰期的潜在需求高于非高峰期;
- 2) $\beta_{ij} > 0, i, j = 1, 2$, 即本时间段价格效应为负, 而交叉时间段价格效应为正;
- 3) $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} > 0$, 表示本时间段价格效应超过交叉时间段价格效应;
- 4) $\beta_{12} = \beta_{21}$, 由此可导出反需求函数的可积性条件成立^[11].

基本需求参数表 2 给出

表 2 两时段模型需求参数

Table 2 Demand parameter values for two-period model

OD-Pair	Q^1	Q^2	β_{11}	$\beta_{12}(\beta_{21})$	β_{22}
①③	7 500	4 000	21	15	25
②③	1 800	1 200	6	4	7

单位: Q^i (车辆/h), β_{ij} (车辆²/(美分/h))

3.2 结果分析

考察公平限制对次优拥挤定价模型 (即对路段 1 和路段 3 高峰期收费) 的影响. 设 $\varphi_{rs}^i = \varphi$, 即对所有时段、路段的公平限制一样. 表 3 为路网模拟结果. 第一行为 φ 由 0 ~ 1 变化. 当 $\varphi = 0$, 对于各时段各路段的公平限制是最严格的, 与用户不收费模型相比不允许有进一步的不公平因素, 而拥挤定价模型必然会带来不公平因素, 此时次优拥挤定价模型实际上就是不收费均衡模型; 当 $\varphi = 1$ 时, 由于社会福利最大化条件限制, 所允许的不公平程度是最大的 (若不以社会福利最大化为条件, 不公平程度可以达到无限), 但是由于受次优的约束, 此时模型所能达到的最大的社会福利水平即为该方案的水平, 即次优拥挤定价模型. 末一行为受公平约束限制 OD 对. 当 $\varphi = 0$ 时, 所有时段的 OD 对都受公平约束 (此时任一 OD 对出行成本的增加都会带来不公平因素); 当 $\varphi = 0.1 \sim 0.9$ 时, 高峰期 OD 对 ②③ 受约束 (说明当公平约束逐渐放松的时候, 高峰期 OD 对 ②③ 的出行成本比 OD 对的出行成本增加更快, 这也从一个侧面反映了路段 3 的拥挤程度); 当 $\varphi = 1$ 时, 所有各 OD 对都不受约束 (此时公平约束的进一步放松并不能进一步增加社会福利).

表 3 带公平约束路段 1 和路段 3 高峰期收费模拟结果

Table 3 Results of peak time period pricing with equity constraints on link 1 and 3

φ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
x_1^1	3 260	3 191	3 158	3 124	3 091	3 058	3 024	2 991	2 957	2 923	2 891
x_2^1	3 827	3 816	3 772	3 729	3 685	3 641	3 598	3 554	3 511	3 467	3 425
x_3^1	5 521	5 487	5 420	5 353	5 286	5 219	5 152	5 086	5 019	4 952	4 888
x_1^2	2 447	2 455	2 463	2 472	2 480	2 490	2 500	2 510	2 520	2 531	2 542
x_2^2	1 335	1 383	1 429	1 474	1 518	1 562	1 606	1 649	1 691	1 733	1 774
x_3^2	2 527	2 590	2 650	2 710	2 770	2 829	2 887	2 945	3 003	3 060	3 114
q_{13}^1	7 087	7 007	6 930	6 853	6 776	6 699	6 622	6 545	6 467	6 390	6 315
q_{23}^1	1 694	1 671	1 647	1 624	1 601	1 578	1 555	1 531	1 508	1 485	1 463
q_{13}^2	3 782	3 838	3 892	3 945	3 999	4 052	4 105	4 158	4 212	4 265	4 316
q_{23}^2	1 191	1 207	1 222	1 237	1 252	1 267	1 282	1 297	1 311	1 326	1 341
τ_1^1	0	5.80	10.41	15.01	19.58	24.14	28.68	33.21	37.71	42.20	46.52
τ_3^1	0	4.40	9.21	14.00	18.75	23.47	28.17	32.83	37.46	42.07	46.49
W	47 941	48 023	48 094	48 157	48 211	48 256	48 292	48 320	48 340	48 352	48 355
约束 All	路段 1 和路段 3 高峰期收费										None

单位: 交通量 (车辆/h); 费用 (美分/辆); 社会福利 (美元)

图2为该方案各时段OD流量随着公平约束限制的变化图,表明随公平约束的放松,OD对①③和OD对②③的高峰期流量不断减小,而非高峰期的流量不断增加,并且呈严格递减和递增关系,即随着次优拥挤定价模型中公平约束条件的放松,社会福利最大化的目标不断接近最优状

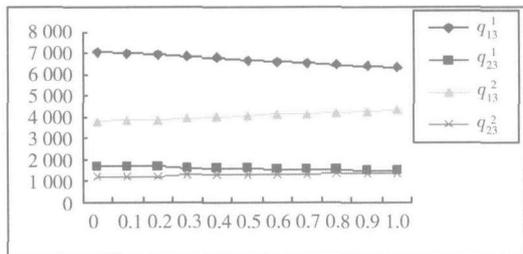


图2 各时段 OD 流量随公平约束限制变化图

Fig.2 OD traffic volume with different equity constraints in multiple time periods

态.图3为各时段、路段的交通流量变化图,各路段的高峰期流量随着公平约束的放松而不断增长,非高峰期流量则相反.类似的情况也发生在总交通流量的变化上(图4),随着公平约束的放松,总交通流量单调递减,在最不公平状态时达到最小,即此时对交通拥挤的减缓效果最佳.

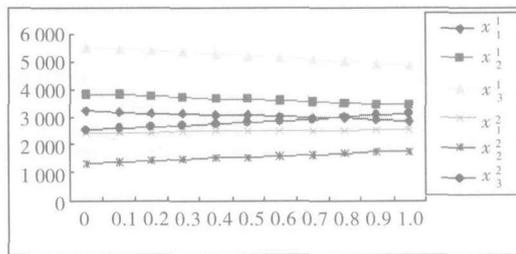


图3 各时段、各路段流量随公平约束限制变化图

Fig.3 Link traffic volume with different equity constraints in multiple time periods

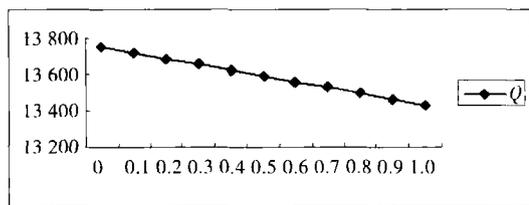


图4 总交通流量随公平约束限制变化图

Fig.4 Total traffic volume with different equity constraints

拥挤费用的变化情况与总交通量的变化相反,就本方案而言随着公平约束的放松而逐渐增加.从 $\varphi = 0$ 时,拥挤费用为0,逐渐增加到次最优拥挤收费的水平.当 φ 较小的时候路段1的费用增长比路段3的费用增长快,后渐渐趋于一致,但前者始终大于后者(图5).

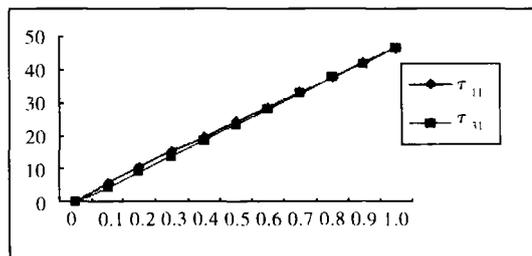


图5 次优拥挤费用随公平约束限制变化图

Fig.5 Second-best congestion charge with different equity constraints

社会福利的变化与拥挤费用的变化情况类似,但是社会福利的变化渐趋平缓,随着公平约束的不断放松,社会福利的增加值逐渐减小.这说明,公平约束的不断放松,使得公平约束对总体社

会福利最大化目标的约束力不断削弱,反而次优收费方案的空间约束与时间约束的作用逐渐增强.事实上,当 φ 接近于1的时候,对高峰期路段2与非高峰期各路段实施拥挤收费更能促进社会福利的提高(如图6).

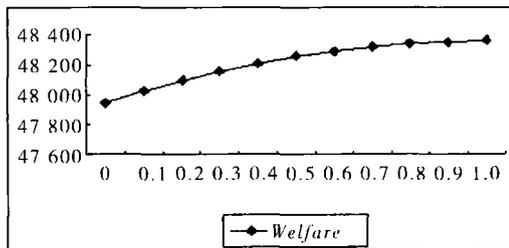


图6 社会福利随公平约束限制变化图

Fig.6 Total social welfare with different equity constraints

4 结束语

与道路拥挤收费其他研究相比,本文主要是建立了一个在公平限制条件下城市道路系统多时段一般路网次优拥挤定价问题的双层规划模型,并通过一典型路网的模拟计算分析了拥挤定价在改善社会福利的同时所带来的不公平因素,取得了良好的研究成果.

在当前研究成果的基础上,可将模型以 2×2 以上 OD 对的一般路网加以实证,并考虑混合交通、出行者价格弹性等约束,并建立拓展模型.

参考文献:

- [1] Lindsey C R, Verhoef E T. Traffic congestion and congestion pricing[EB/OD]. <http://www.tinbergen.nl>, 2000. 11. 14
- [2] Schrank D, Lomax T. The 1999 annual mobility report information for urban America[EB/OD], <http://mobility.tamu.edu>, 1999.
- [3] Liu N L, Boyce D E. Variational inequality formulation of the system-optimal travel choice problem and efficient congestion tolls for a general transportation network with multiple time periods[J]. *Regional Science and Urban Economics*, 2002, 32: 627—650.
- [4] Yang H, Huang H J. The Multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem[J]. *Transportation Research Part B*, 2004, 38: 1—15.
- [5] Arnott R, de Palma A, Lindsey R. Route choice with heterogeneous drivers and group-specific congestion costs[J]. *Regional Science and Urban Economics*, 1992, 22: 71—102.
- [6] Huang H J. Fares and tolls in a competitive system with transit and highway: The case with two groups of commuters[J]. *Transportation Research Part E*, 2000, 36: 267—284.
- [7] Verhoef E T, Nijkamp P, Rietveld P. Second-best congestion pricing: The case of an untolled alternative[J]. *Journal of Urban Economics*, 1996, 40: 279—302.
- [8] Verhoef E T. Second-best congestion pricing in general networks, Heuristic algorithms for finding second-best toll levels and toll points[J]. *Transportation Research Part B*, 2002, 36: 707—729.
- [9] Verhoef E T. Second-best congestion pricing in general static transportation networks with elastic demands[J]. *Regional Science and Urban Economics*, 2002, 32: 281—310.
- [10] Yang H, Huang H J. Carpooling and congestion pricing in a multilane highway with high-occupancy- vehicle lanes[J]. *Transportation Research Part A*, 1999, 33: 139—155.
- [11] Liu N L, McDonald J F. Economics efficiency of second-best congestion pricing schemes in urban highway systems[J]. *Transportation Research Part B*, 1999, 33: 157—188.
- [12] Liu N L, McDonald J F. Efficient congestion tolls in the presence of unpriced congestion: A peak and off-peak simulation model[J]. *Journal of Urban Economics*, 1998, 44: 352—366.
- [13] Small K A. The scheduling of consumer activities: Work trips[J]. *The American Economic Review*, 1982, 467—479.
- [14] Ferrar P. Road network toll pricing and social welfare[J]. *Transportation Research Part B*, 2002, 36: 471—483.
- [15] 黄海军, Michael G H B, 杨海. 公共与个体竞争交通系统的定价研究[J]. *管理科学学报*, 1998, 1(2): 17—23.
Huang Haijun, Michael G H B, Yang Hai. Pricing and modal split in a competitive system of mass transit and highway [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 1998, 1(2): 17—23. (in Chinese)
- [16] 田琼, 黄海军, 杨海. 瓶颈处停车换乘 logit 随机均衡选择模型[J]. *管理科学学报*, 2005, 8(1): 1—8.
Tian Qiong, Huang Haijun, Yang Hai. Mode choice models based on logit stochastic equilibrium in transportation systems with park-and-ride option[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(1): 1—8. (in Chinese)
- [17] 晏克非, 张国强, 覃煜. 基于车辆动态导航的拥挤定价[J]. *交通运输工程学报*, 2001, 1(3): 74—76.
Yan Kefei, Zhang Guoqiang, Qin Yu. Congestion pricing based on vehicle dynamic navigation[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2001, 1(3): 74—76. (in Chinese)
- [18] 黄卫, 胡勇. 电子收费在道路交通收费中的应用[J]. *东南大学学报: 自然科学版*, 2001, 31(3): 15—18.
Huang Wei, Hu Yong. Electronic toll collection applied in road tolling[J]. *Journal of Southeast University (natural science edition)*, 2001, 31(3): 15—18. (in Chinese)
- [19] 王健, 胡运权, 徐亚国. 拥挤定价理论发展对我国城市交通管理的启示[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2003, 3(3): 52—57.
Wang Jian, Hu Yunquan, Xu Yaguo. Congestion pricing theory development and application in China[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2003, 3(3): 52—57. (in Chinese)
- [20] 张华歆, 周溪召. 多模式交通网络的拥挤道路收费双层规划模型[J]. *系统工程理论方法应用*, 2005, 14(6): 546—551.

Zhang Huaxin, Zhou Xizhao. Bi-level programming model of congestion pricing based on mixed traffic network[J]. System Engineering-Theory Methodology Applications, 2005, 14(6): 546—551. (in Chinese)

[21] 刘南, 陈达强, 陈鸣飞. 城市道路系统多时段、多出行方式拥挤定价模型[J]. 管理工程学报, 2007, 21(2): 89—94.

Liu Nan, Chen Daqiang, Chen Mingfei. Congestion pricing models with multiple time periods and travel modes for urban road systems[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2007, 21(2): 89—94. (in Chinese)

[22] Sheffi Y. Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1985.

[23] Yang H, Zhang X. Multiclass network toll design problem with social and spatial equity constraints[J]. Journal of Transportation Engineering, 2002, 9: 420—428.

Second-best congestion pricing model on multiple time periods with equity constrains

LIU Nan¹, CHEN Da-qiang^{1,2}, WU Zhao-feng¹

1. College of Management, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. College of Computer Science & Information Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China

Abstract: The problem of general traffic network congestion pricing with multiple time periods and equity constrains is discussed in this paper. A bi-level programming model of general traffic network congestion pricing on multiple time periods with equity constrains is established, and the model is solved by a SA (Simulated Annealing) algorithm. In order to get a result for analyzing, a simulation study is applied for the bi-level programming problem on a simple network.

Key words: congestion pricing; multiple time periods; bi-level programming model; simulated annealing algorithm (SAA)