刍议“无分红股票期权的构造定价模型”[①]

——与戴锋教授商榷

郑　红
（东北大学工商管理学院，沈阳 110004）

摘要：从 DF 模型的构建、公式推导、结果分析等方面，针对“无分红股票期权的构造定价模型”一文阐述了自己的看法，并利用普遍公认的假设推导出看涨和看跌期权定价公式及任意时刻提出执行的期权价值，指出推广和普及既符合实际又计算灵活方便的期权定价方法应引起学术界重视.

关键词：期权定价模型；DF 构造；B-S 公式
中图分类号：F224　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007 - 9807(2008)06 - 0091 - 04

0 引　言

戴锋教授等学者在《管理科学学报》2005 年 5 期发表了题为“无分红股票期权的构造定价模型”（以下简称戴文），提出了期权执行价格的 DF 构造，并给出了无分红股票期权定价的构造性解析模型，指出该模型同时适用于美式期权和欧式期权[1].

戴文富有开创性的成果值得深入思索，解决任意时刻提出执行的看涨或看跌期权定价模型正是目前学术研究的热点. 当前的问题是 DF 构造定价模型能否取得重大突破尚需进一步研究.

1 关于 DF 构造定价模型的几点思考

1）从模型构建方面，定义期权执行价格 DF 构造是否必要. 戴文提出的偏尾分布与偏尾过程较好地描述现货资产、股票及衍生商品证券价格变化的结构特点，但与金融界普遍公认的维纳过程、对数正态分布相比，尚不能说前者更优. 金融资产服从对数正态分布假设使建模过程中的数学处理大为简化. 偏尾分布表达式比较繁琐，在此基础上定义 DF 构造的合理性尚需检验或证明. 戴文在定义 5 中指出，“若 X 为与股票 $S(t)$ 相关的某项固定资产价值，若 $\{X_s(t,T), t \in [0,\infty], T > t\}$ 是一个 DF 过程，且 $X_s(t,T) \in P(X, D[S(t)](T-t))$，则将 $X_s(t,T)$ 称为资产价值 X 关于股票 $S(t)$ 的 DF 随机构造”. 同时指出，“由于 $t = T$ 时，$X_s(t,T) = X$”，“X 为期权的执行价格”. 诚然，定义 DF 过程与 DF 构造本身是成立的，但将其用在期权定价模型中，其合理性尚需考虑. 即：执行价格 X 是买卖双方预先约定的某一固定价格，是已知量，在合约有效期内不会发生改变. 若考虑时间价值，在任意时刻 $\tau \in [t,T]$，执行价格 X 的现值为 $Xe^{-r(T-\tau)}$，这是普遍公认的金融数学知识. 而且在戴文期权价格数据对照表 —— 表 1 中，也没有体现执行价格的 DF 随机构造，说明为执行价格 X 定义随机构造的意义不大.

2）公式(4) 与(6) 的推导有待推敲. 关于积分限的选取方面，看涨期权一般应以股票价格大于执行价格作为积分限，看跌期权以股票价格小于执行价格作为积分限，这是期权得以执行的条件. 而戴文定义的积分限是股票的远期价值，其理论根据没有说明. 看涨期权计量的是在初始时刻

① 收稿日期：2006 - 02 - 28；修订日期：2006 - 06 - 13.
基金项目：辽宁省社科基金重点资助项目（L07ASH001）.
作者简介：郑　红（1972—），女，辽宁沈阳人，博士生. Email：hzheng@mail.neu.edu.cn

t,未来股票价格大于执行价格的期望报酬或损失. 在时刻 t 观察,看涨期权在未来任意时刻 $\tau \in [t,T]$ 被提出执行时,标的股票价格 $S(\tau)$ 也是一个随机变量,不可能是固定常数,式(4) 中 $C_s(t)$ 的推导基础 $D[S(\tau)] = 0$ 是否成立尚需推敲. 虽然相对于提出执行的期权合约而言,标的价格必须确定,否则无法交割,但此时亦无须计算期权价格,期权价格早在初始时刻 t 决定购买期权时已经确定,并不是在执行期权时确定.

3) 从构造模型的结果来看,戴文提出的看涨期权当前价值 $C_s(\tau) = S(\tau) - Xe^{-r(T-\tau)}$,只相当于期权的内在价值,缺乏体现股票随机波动的时间价值. 期权价格应由两部分组成,内在价值和时间价值. 一份看涨期权的内在价值由标的股票价格和执行价格之差决定,而时间价值是指由期权合约的有效期长短等时间因素所决定的标的资产价格波动风险的估计[2],不确定性构成期权时间价值的主要部分. 包含内在价值和时间价值的期权价格反映了市场参与者对标的资产价格变化的波动预期. 戴文提出的由股票市场波动产生的价值在定价结果中没有出现,DF 随机构造也没有发挥应有作用,如果模型不能体现不确定的随机因素,则期权定价本身也失去存在的基础.

4) DF 构造法与 B-S 法的期权定价模型缺乏可比性. Black-Scholes 期权定价公式(简称 B-S 法)可用公式表述为

$$B(S(t),t) = S_t N(d_1) - Xe^{-r(T-\tau)} N(d_2) \tag{1}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

其中:$N(\cdot)$ 为标准正态累积分布函数;S_t 为 t 时刻股票市场价格($0 \leqslant t \leqslant T$,$T$ 为期权到期日);r 为无风险利率;X 为执行价格;σ 为投资回报率的标准差,也就是波动率.

B-S 法揭示了初始时刻对期权价格科学的量化估计,确定的是在时刻 t 期权交易成交时的价格 $C_s(t)$;由 DF 构造法得到的只是在时刻 τ($\tau \in [t,T]$)期权被提出执行时的价值 $C_s(\tau)$,二者研究期权的初始时间不同,因此没有可比性.

2 模型的改进与探索

鉴于以上分析,不考虑期权执行价格的 DF 随机构造,执行价格 X 由买卖双方事先确定,在普遍公认的对数正态分布假设下重新推导戴文公式(4)—(6).

1) 戴文公式(4) 看涨期权定价公式的推导

在股票价格服从对数正态分布、风险中性假设下,给定现行股票价格 S_t,到期日股票价格 S_T 的条件分布是以 $E[\ln S_T \mid \ln S_t] = \ln S_t + (r - \sigma^2/2)(T-t)$ 为均值,以 $\mathrm{Var}[\ln S_T \mid \ln S_t] = \sigma^2 \times (T-t)$ 为方差的对数正态分布[3],则给定现行股票价格 S_t,到期日股票价格 S_T 概率密度函数在该假设下记为

$$f(\ln S_T \mid \ln S_t) = f(\ln S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \times \exp\left\{\frac{[\ln S_T - \ln S_t - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \tag{2}$$

戴文公式(4) 看涨期权定价公式为

$$\begin{aligned} C_S(t) &= e^{-r(T-\tau)} E[\max(S(t)e^{-r(T-\tau)} - X, 0)] \\ &= e^{-r(T-\tau)} E[\max(S(T) - X, 0)] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\ln S_T) - X) f(\ln S_T) \mathrm{d}(\ln S_T) \end{aligned}$$

只有当 $S_T > X$ 时看涨期权才会执行,上式转化为

$$C_S(t) = \int_{\ln X}^{+\infty} e^{-r(T-t)} \exp(\ln S_T) f(\ln S_T) \mathrm{d}(\ln S_T) - \int_{\ln X}^{+\infty} e^{-r(T-t)} X f(\ln S_T) \mathrm{d}(\ln S_T) \tag{3}$$

将式(2) 代入式(3) 并进行积分运算便有如下看涨期权定价公式

$$C_S(t) = S_t N\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Xe^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{4}$$

式(4) 即为著名的 B-S 期权定价公式. 本文用概率方法得到了传统用偏微分方程 PDE 的数值解

得到的期权定价公式，一定程度简化了 Black-Scholes 公式复杂的推导过程.

当看涨期权在未来任意时刻 $\tau \in [t,T]$ 被提出执行时，该期权的现值为

$$C_S(\tau) = e^{-r(\tau-t)}E[S(\tau) - Xe^{-r(T-\tau)}] = e^{-r(\tau-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}(\exp(\ln S_\tau) - Xe^{-r(T-\tau)})f(\ln S_\tau)d(\ln S_\tau)$$

只有当 $S_\tau > X$ 时看涨期权才会执行，上式转化为

$$C_S(\tau) = \int_{\ln X}^{+\infty} e^{-r(\tau-t)}\exp(\ln S_\tau)f(\ln S_\tau)d(\ln S_\tau) - \int_{\ln X}^{+\infty} X \cdot e^{-r(T-t)}f(\ln S_\tau)d(\ln S_\tau)$$

通过与上文同样的推导方法，可得

$$C_S(\tau) = S_tN(d_3) - Xe^{-r(T-\tau)}N(d_4) \quad (5)$$

$$d_3 = \frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}},$$

$$d_4 = \frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}}$$

其中，$N(\cdot)$ 为标准正态累积分布函数. 公式中含有任意时刻 $\tau(\tau \in [t,T])$，而计算任意时刻提出执行的期权价值，其定价意义尚须讨论.

2）戴文公式(6) 看跌期权定价公式的推导

戴文公式(6) 看跌期权定价公式

$$P_S(t) = e^{-r(T-t)}E[\max(X - S(t)e^{r(T-t)},0)] = e^{-r(T-t)}E[\max(X - S_T,0)] = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}(X - \exp(\ln S_T)) \times f(\ln S_T)d(\ln S_T)$$

只有当 $S_T < X$ 时看跌期权才会执行，上式转化为

$$P_S(t) = -\int_{-\infty}^{\ln X} e^{-r(T-t)}\exp(\ln S_T)f(\ln S_T)d(\ln S_T) + \int_{-\infty}^{\ln X} e^{-r(T-t)}Xf(\ln S_T)d(\ln S_T)$$

进行积分运算便有如下看跌期权定价公式

$$P_S(t) = -S_tN\left(-\frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) + Xe^{-r(T-t)}N\left(-\frac{\ln(\frac{S_t}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) = -S_tN(-d_1) + Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) \quad (6)$$

其中，d_1、d_2 见式(1) Black-Scholes 公式所述. 式(6) 即为传统利用看涨与看跌期权平价关系得到的欧式看跌期权定价公式.

同理，当看跌期权在未来任意时刻 $\tau \in [t,T]$ 被提出执行时，有

$$P_S(\tau) = -S_tN(-d_3) + Xe^{-r(T-t)}N(-d_4) \quad (7)$$

其中，d_3、d_4 见式(5).

3　结束语

自 1973 年出现 Black-Scholes 公式以来，金融界以前所未有的速度接受数学模型和数学工具，许多金融问题淹没在纷繁复杂的数学之中. 在金融领域被数学工具和模型所包围的今天，推广和普及简单而又能够让人普遍接受的公理和假设应引起学术界重视. 对于欧式期权，以 B-S 公式为中心的连续模型和解析方法已取得开创性成果[4]；对于美式期权，以二叉树模型为代表的离散模型和计算法已被普遍接受[5]. 为真正使数学服务于金融，当前应提倡用尽量简单的数学语言解决金融问题. 文献[6] 指出，应该充分认识到现在和将来，迫切需要创造性地研究出既符合实际又计算灵活方便的期权定价方法，这是今后学术研究的发展方向.

参 考 文 献：

[1]戴　锋，丁　锐，秦子夫. 无分红股票期权的构造定价模型[J]. 管理科学学报，2005，8(5)：55—60.
Dai Feng，Ding Rui，Qin Zi-fu. Structure models for options pricing on non-dividend-paying stocks[J]. Journal of Management Sciences in China，2005，8(5)：55—60. (in Chinese)

[2]Stampli J，Goodman V. 金融数学[M]. 北京：机械工业出版社，2004. 23—37.
Stampli J，Goodman V. The Mathematics of Finance：Modeling and Hedging[M]. Beijing：China Machine Press，2004.

23—37. (in Chinese)

[3]坎贝尔 约翰 Y, 安德鲁 W 罗, 麦金雷 艾 克雷格. 金融市场计量经济学[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2003. 269—301.

Campbell J Y, Andrew W L, MacKinlay A C. The Econometrics of Financial Markets[M]. Shanghai: Shanghai University of Finance & Economics Publishing House, 2003. 269—301. (in Chinese)

[4]Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economics, 1973, 81(4): 637—654.

[5]Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7(3): 229—263.

[6]刘海龙, 吴冲锋. 期权定价方法综述[J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 67—73.

Liu Hai-long, Wu Chong-feng. Survey of option pricing methods[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 67—73. (in Chinese)

Note on structure models for options pricing on non-dividend-paying stocks —to discuss with Professor Dai

ZHENG Hong

School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China

Abstract: Based on "Structure models for options pricing on non-dividend-paying stocks", this paper presents its own views from the models constructing, the formula deducing and the results analyzing. Based on generally accepted hypotheses, the paper gives the pricing formula of call options, put options and options exercised at any time before the expiration. Further, the paper puts forward that simple options pricing models conforming to reality ought to be popularized, which should be paid enough theoretical attention.

Key words: options pricing models; DF structure ; B-S formula

---

(上接第 83 页)

measure of market efficiency. The new approach is simple, clear and advantageous to traditional paradigm for the possibility to quantitatively measure market efficiency. We empirically analyzed the features and tendency of conditional predictability of Shanghai Composite Index and drew a comparison with Hong Kong HangSeng Index. We gained several significant conclusions from the results of the tests.

Key words: efficient market hypothesis (EMH); predictability; conditional entropy; Shanghai composite index