

# 基于远期利率分解技术的三因子 HJM 模型研究<sup>①</sup>

李彪, 杨宝臣

(天津大学管理学院, 天津 300072)

**摘要:** 在 HJM 框架下远期利率期限结构可以分解成两个成分函数, 其中一个表示观测到的初始远期利率曲线, 另一个表示远期利率的动力学演变过程. 由于两者具有相同的参数, 因而采用这种分解技术可以简化 HJM 类模型中参数的估计过程. 为有效拟合远期利率曲线的形状, 在原两因子 HJM 模型的基础上又引入了另外一个价差因子, 并利用该三因子 HJM 模型的泛函性, 推导得到一个简单有效的参数估计程序. 据此估计程序以上交所 58 个周截面数据为样本进行实证研究, 结果表明所给出的三因子 HJM 模型设定形式具有相对平稳的指数衰减结构, 可以准确一致地表示取样期间的国债远期利率期限结构.

**关键词:** 远期利率; 分解技术; HJM 模型; 参数估计; 遗传算法

**中图分类号:** F830      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007-9807(2008)06-0112-10

## 0 引言

动态利率期限结构模型, 对固定收益证券定价、利率衍生工具定价及利率风险管理等具有重要意义. 利率过程的复杂性, 决定了利率的变化很难用单因子模型来描述, 因此, 构建多因子利率模型, 尽可能精确地捕捉利率期限结构的动态特征一直是利率期限结构研究的重要方向. Heath, Jarrow 和 Morton<sup>[1,2]</sup> 提出了对利率期限结构进行建模和对利率衍生产品进行定价的新方法, (以下简称 HJM 模型), 假定整个远期利率期限结构的无套利演变过程可以由  $f(t, T) = f(0, T) + G(0, t, T; \cdot)$  来表示, 其中的“ $\cdot$ ”表示相关的状态变量和一组波动函数的参数. 与传统的期限结构模型如 Vasicek<sup>[3]</sup>、Brennan 和 Schwartz<sup>[4]</sup>、Cox, Ingersoll 和 Ross<sup>[5]</sup> 等比较, 该模型存在两个很明显的优点: 首先, HJM 模型对初始的远期函数  $f(0, T)$  没有施加任何约束, 因为该模型中的远期函数是固定而非随机的初始远期利率曲线, 且是可观测的. 之所以说初始远期函数可观测, 是因

为根据观测到的市场上的国债价格并采用一些简单的曲线拟合技术就可以估计出它的值. 与之相反, 传统的期限结构模型由于对即期利率过程作了外生假定, 使得自身的约束函数形式在拟合可观测到的期限结构方面变得异常困难. 其次, HJM 模型不需要对模型进行“利率期限结构的倒置”(inversion of the term structure) 来消除利率或有要求权风险的市场价格. 而且, 在 HJM 框架下, 等价鞅测度的存在且唯一性仅依赖于函数  $G(0, t, T; \cdot)$  的设定形式. 如果说传统利率期限结构模型的约束过于严格, 那么 HJM 模型就太灵活. 这是因为 HJM 模型自身并没有确定精确的状态变量个数, 且其充要条件要求也很容易满足, 就使得函数  $G(0, t, T; \cdot)$  存在很多不同的设定形式, 包括具有不同的状态变量以及各种形式的波动函数, 如 Amin 和 Morton<sup>[6]</sup> 就曾指出, 即使是在仅有 1 个因子和 2 个参数的情况下, 也存在 6 种不同的 HJM 模型设定形式.

尽管从理论上讲, 在给定了一个初始的远期利率曲线后, 就可以对 HJM 模型的某种设定形式

① 收稿日期: 2006-11-15; 修订日期: 2008-01-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471051).

作者简介: 李彪(1979—), 男, 河北景县人, 博士后. Email: libiao2002403@163.com

进行校准(calibrate),也就是通过对一组利率或有要求权的当前价格进行拟合来估计得到该种HJM模型设定形式下的参数值.进而,对所有的HJM模型设定形式采用这种方法进行校准,就可以找到最佳的一种设定形式.然而,与HJM模型的路径依赖性相伴而生的数值计算复杂性,使得很难对多因子HJM模型的某种设定形式进行校准.此外,即使已经利用短期利率或有要求权校准后的某种HJM模型设定也可能由于长期利率或有要求权的缺乏和流动性不足,造成对其定价的偏差.因此,如何通过改变函数 $G(0,t,T;\cdot)$ 的设定形式来简化对HJM模型的数值计算复杂性,就成为本文研究的基本出发点.可以证明函数 $G(0,t,T;\cdot)$ 能够以形式 $G(0,t,T;\cdot) = G(t,T;\widehat{W}(t),\alpha) - G(0,T;\widehat{W}(0),\alpha)$ 进行分解,其中,该式中的第2个成分函数仅涉及到当前已实现的状态变量,第1个成分函数随着 $t \rightarrow 0$ 也收敛于第2个成分,而 $\alpha$ 是一组为两个成分函数所共有的参数.对函数 $G(0,t,T;\cdot)$ 的这种分解就意味着,如果函数 $G(0,t,T;\cdot)$ 的设定形式能够使得它的第2个成分函数是对初始远期利率曲线的合理表示,也就是如果

$$f(0,T) = G(0,T;\widehat{W}(0),\alpha)$$

成立,那么HJM模型远期函数的演变过程就可以仅用第1个成分函数来表示,即

$$f(t,T) = G(t,T;\widehat{W}(t),\alpha)$$

这个结论成立就进一步意味着HJM模型可以通过估计初始的远期函数

$$f(0,T) = G(0,T;\widehat{W}(0),\alpha)$$

来进行校准,因为对该函数进行估计得到的参数值与对远期函数的未来演变 $f(t,T) = G(t,T;\widehat{W}(t),\alpha)$ 的估计得到的参数值相同.不过就中国的固定收益市场情况来看,由于利率或有要求权基本尚不存在,而国债数量相对日渐增多,对上述函数中参数的估计基本上就是一个横截面曲线拟合,因而也就避免了在HJM模型校准阶段可能出现的路径相关计算的复杂性.

此外,由于两因子的HJM模型对收益率曲线形状的表现并不太理想,因此可以通过再引入另外一个指数衰减函数因子来对远期收益率曲线的短端进行控制,以使得收益率曲线能够展现出符

合市场实际情况的复杂形状.为提升该三因子模型在市场中的实际可操作性,本文还导出了一个简单而又非常精确的估计程序,利用该程序对中国国债市场上的横截面周数据样本进行实证研究表明,这个三因子HJM模型设定能够准确地对各截面样本进行拟合.

## 1 HJM模型的分解

为简单而又不失一般性,本文主要对应用最为广泛的两因子HJM模型进行分析,该模型描述远期利率过程的随机微分方程的具体形式如下

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)} dW_2(t) \quad (1)$$

式(1)中,远期利率的瞬时变化主要是由两个不确定性来源造成的:长期因子 $\{W_1(t) : t \in [0,\tau]\}$ 和价差因子 $\{W_2(t) : t \in [0,\tau]\}$ ,其中,后者由于波动函数的衰减性使得其对短期利率的影响要比长期利率大得多.由HJM模型所要求的充分必要条件,可以得到式(1)中的无套利漂移函数为

$$\alpha(t,T) = -\sigma_1 \phi_1(t) - \sigma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)} \phi_2(t) + \sigma_1^2(T-t) - 2 \frac{\sigma_2^2}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)} \times (e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)} - 1) \quad (2)$$

式(2)中, $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 是风险的市场价格,只要它们可预测,其形式任意.在等价鞅测度 $\tilde{Q}$ 及其布朗运动

$$\widehat{W}_i(t) = W_i(t) - \int_0^t \phi_i(v) dv \quad (i = 1, 2)$$

框架下,式(2)中风险的市场价格可以剔除掉,因而式(1)中HJM模型的强解(strong solution)为

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma_1^2 t(T - \frac{t}{2}) - 2 \left(\frac{\sigma_2}{\lambda}\right)^2 \times [e^{-\lambda T}(e^{\lambda t} - 1) - 2e^{-\frac{\lambda}{2}T}(e^{\frac{\lambda}{2}t} - 1)] + \sigma_1 \widehat{W}_1(t) + \sigma_2 \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{2}(T-v)} d\widehat{W}_2(v) \quad (3)$$

值得一提的是,由于HJM模型明确假定布朗运动是由 $\widehat{W}_i(0)$ 开始的,所以式(3)中的 $\sigma_1 \widehat{W}_1(t)$ 可由式

$$\int_0^t \sigma_1 d\widehat{W}(v) = \sigma_1 \widehat{W}(t) - \sigma_1 \widehat{W}(0)$$

积分得到.

由于布朗运动在任意水平处开始都不会影响到等价鞅测度的存在且唯一性, 本文将该状态变量的初始值假定为  $\widehat{W}_1(0) \neq 0$ . 此外, 对式(3)中的最后一个积分项进行分部积分并考虑到  $\widehat{W}_2(0) \neq 0$ , 则可以得到下式

$$\begin{aligned} \sigma_2 \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{2}(T-v)} d\widehat{W}_2(v) = & \\ \sigma_2 [e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)} \widehat{W}_2(t) - e^{-\frac{\lambda}{2}T} \widehat{W}_2(0)] - & \\ \sigma_2 \int_0^t (\lambda/2) e^{-\frac{\lambda}{2}(T-v)} \widehat{W}_2(v) dv & \quad (4) \end{aligned}$$

因此, 结合式(4), 重新整理式(3), 得到下式

$$\begin{aligned} f(t, T) = f(0, T) + \{ \sigma_1 \widehat{W}_1(t) + & \\ \sigma_1^2 t (T - \frac{t}{2}) + \sigma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)} \times & \\ [\widehat{W}_2(t) + \frac{4\sigma_2^2}{\lambda^2}] - 2(\frac{\sigma_2}{\lambda})^2 e^{-\lambda(T-t)} - & \\ \frac{\sigma_2 \lambda}{2} \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{2}(T-v)} \widehat{W}_2(v) dv \} - & \\ \{ \sigma_1 \widehat{W}_1(0) + \sigma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}T} [\widehat{W}_2(0) + \frac{4\sigma_2^2}{\lambda^2}] - & \\ 2(\frac{\sigma_2}{\lambda})^2 e^{-\lambda T} \} & \\ = f(0, T) + G(t, T) - G(0, T) & \quad (5) \end{aligned}$$

式(5)中,  $G(0, T)$  表示没有涉及到未来时刻  $t$  的第2个大括号中的各项;  $G(t, T)$  表示第1个大括号中的各项, 除最后一个随机积分项外其他各项均没有涉及到当前时刻0. 因而, 如果初始的远期利率曲线可以通过  $G(0, T)$  及其状态变量和参数来表示, 也就是如果

$$\begin{aligned} f(0, T) = G(0, T) & \\ = \sigma_1 \widehat{W}_1(0) + \sigma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}T} \times & \\ [\widehat{W}_2(0) + \frac{4\sigma_2^2}{\lambda^2}] - 2(\frac{\sigma_2}{\lambda})^2 e^{-\lambda T} & \quad (6) \end{aligned}$$

成立, 则未来时刻  $t$  的远期函数  $f(t, T) = G(t, T)$ , 且成立

$$\begin{aligned} f(t, T) = \sigma_1 \widehat{W}_1(t) + \sigma_1^2 t (T - \frac{t}{2}) + & \\ \sigma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)} [\widehat{W}_2(t) + \frac{4\sigma_2^2}{\lambda^2}] - 2(\frac{\sigma_2}{\lambda})^2 e^{-\lambda(T-t)} - & \\ (\frac{\sigma_2 \lambda}{2}) \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{2}(T-v)} \widehat{W}_2(v) dv & \quad (7) \end{aligned}$$

从式(5)、(6)和(7)中显然可以看到,  $f(0, T)$  和  $f(t, T)$  的函数形式类似, 具有完全相同的参数和状态变量, 尽管它们在不同时刻具有不同值. 此外, 随着  $t \rightarrow 0, f(t, T) \rightarrow f(0, T)$ , 这就意味着随着日历时刻  $t$  的逼近, 在时刻  $t$  将要实现的远期函数  $f_t(t, T)$  就会逼近于函数  $f(0, T)$ . 因而, HJM 模型可以通过只估计初始的远期函数式(6)来进行校准, 这是因为估计式(6)得到的参数结果与估计式(7)中的远期函数  $f(t, T)$  得到的参数结构完全相同. 而对式(6)的估计仅涉及到了很少的几个因子, 基本上是一个简单的横截面的曲线拟合, 完全可以利用债券市场上的国债价格数据样本来进行. 这样也就避免了在校准阶段因为利用利率或有要求权所导致的路径依赖的计算复杂性. 而在校准后, 则可以利用由短期函数  $f(t, T)$  的演变过程驱动的路径依赖程序来对利率或有要求权进行定价.

由于两因子的 HJM 模型仅能对远期利率曲线的短端和长端进行有效拟合, 而为拟合远期利率曲线的形状, 就很有必要引入第3个因子<sup>[7-10]</sup>. 此外, 远期利率曲线在其短端附近经常表现出很陡峭的倾斜, 为充分刻画这一特征也必须引入一个充分大的参数  $\lambda$  的指数衰减波动函数. 因此, 通过引入另外一个价差因子, 对式(1)中的随机微分方程进行了扩展, 具体形式如下

$$\begin{aligned} df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma_0 dW_0(t) + & \\ \sigma_1 e^{-\frac{\lambda_1}{2}(T-t)} dW_1(t) + \sigma_2 e^{-\frac{\lambda_2}{2}(T-t)} dW_2(t) & \quad (8) \end{aligned}$$

为符号表示方便起见, 将式(8)中的3个因子重新表示成  $W_0, W_1$  和  $W_2$ , 且还可以进一步表示成  $R = R(0) = \sigma_0 \widehat{W}_0(0)$  和  $R(t) = \sigma_0 \widehat{W}_0(t)$ . 根据重新设定后的符号以及与式(2)~(7)相类似的推导过程, 可以得到三因子 HJM 模型的初始远期利率函数  $f(0, T)$  和未来远期利率函数  $f(t, T)$ , 具体形式分别见下面的式(9)和(10)

$$\begin{aligned} f(0, T) = R + \sigma_1 e^{-\frac{\lambda_1}{2}T} [\widehat{W}_1(0) + 4 \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^2}] - & \\ 2(\frac{\sigma_1}{\lambda_1})^2 e^{-\lambda_1 T} + \sigma_2 e^{-\frac{\lambda_2}{2}T} [\widehat{W}_2(0) + 4 \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2^2}] - & \\ 2(\frac{\sigma_2}{\lambda_2})^2 e^{-\lambda_2 T} & \quad (9) \end{aligned}$$

$$f(t, T) = R(t) + \sigma_0^2 t (T - \frac{t}{2}) + \sigma_1 e^{-\frac{\lambda_1}{2}(T-t)} \times$$

$$\begin{aligned}
& [\widehat{W}_1(t) + 4\frac{\sigma_1}{\lambda_1^2}] - 2(\frac{\sigma_1}{\lambda_1})^2 e^{-\lambda_1(T-t)} - (\frac{\sigma_1 \lambda_1}{2}) \times \\
& \int_0^t e^{-\frac{\lambda_1}{2}(T-v)} \widehat{W}_1(v) dv + \sigma_2 e^{-\frac{\lambda_2}{2}(T-t)} \times \\
& [\widehat{W}_2(t) + 4\frac{\sigma_2}{\lambda_2^2}] - 2(\frac{\sigma_2}{\lambda_2})^2 e^{-\lambda_2(T-t)} - \\
& \frac{\sigma_2 \lambda_2}{2} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_2}{2}(T-v)} \widehat{W}_2(v) dv \quad (10)
\end{aligned}$$

### 2 模型参数估计

式(9)中初始远期利率函数  $f(0, T)$  的参数可以利用广义非线性优化技术, 如 Brown 和 Dybvig<sup>[11]</sup>、Brown 和 Schaefer<sup>[12]</sup> 等在对 Cox, Ingersoll 和 Ross<sup>[5]</sup> 模型进行估计时采用的非线性优化方法. 然而, 由于式(9)具有很好的泛函性(functionality), 完全可以对其推导得到一个很简单的估计方法. 首先用  $f(T)$  表示  $f(0, T)$ , 即  $f(T) = f(0, T)$ , 并改写式(9), 形式如下

$$f(T) = R + ae^{-\frac{\lambda_1}{2}T} + be^{-\lambda_1 T} + ce^{-\frac{\lambda_2}{2}T} + de^{-\lambda_2 T} \quad (11)$$

式(11)中

$$\begin{aligned}
a &= \sigma_1 \widehat{W}_1(0) + 4\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^2}; & b &= -2\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^2} \\
c &= \sigma_2 \widehat{W}_2(0) + 4\frac{\sigma_2^2}{\lambda_2^2}; & d &= -2\frac{\sigma_2^2}{\lambda_2^2} \quad (12)
\end{aligned}$$

如果对指数衰减参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的选择恰当, 就可以估计得到系数  $a, b, c$  和  $d$  的值, 进而根据式(12)就可以计算出状态变量和波动参数的值, 具体形式如下

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (-\lambda_1^2 \frac{b}{2})^{1/2}; & \widehat{W}_1(0) &= \frac{a+2b}{\sigma_1} \\
\sigma_2 &= (-\lambda_2^2 \frac{d}{2})^{1/2}; & \widehat{W}_2(0) &= \frac{c+2d}{\sigma_2} \quad (13)
\end{aligned}$$

值得注意的是, 式(13)中的远期利率波动的非负性要求系数  $b < 0$  和  $d < 0$ .

由于式(11)中的远期利率函数  $f(T)$  关于  $T$  无限可微, 因而与远期利率曲线形状有关的所有信息都内含于该函数在原点处的导数中. 由式(11)可以得到函数  $f(T)$  的各阶导数

$$\begin{aligned}
f(0) &= R + a + b + c + d \\
f'(0) &= -\frac{\lambda_1}{2}a - \lambda_1 b - \frac{\lambda_2}{2}c - \lambda_2 d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \frac{\lambda_1^2}{4}a + \lambda_1^2 b + \frac{\lambda_2^2}{4}c + \lambda_2^2 d \\
f'''(0) &= -\frac{\lambda_1^3}{8}a - \lambda_1^3 b - \frac{\lambda_2^3}{8}c - \lambda_2^3 d \quad (14)
\end{aligned}$$

在式(14)中注意到  $f(0) = r$  恰好是瞬时利率. 此外, 如果函数  $f(T)$  的前三阶导数已知, 则可以通过求解下式得到系数  $a, b, c$  和  $d$  的值

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\lambda_1}{2} & -\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{2} & -\lambda_2 \\ \frac{\lambda_1^2}{4} & \lambda_1^2 & \frac{\lambda_2^2}{4} & \lambda_2^2 \\ -\frac{\lambda_1^3}{8} & -\lambda_1^3 & -\frac{\lambda_2^3}{8} & -\lambda_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - R \\ f'(0) \\ f''(0) \\ f'''(0) \end{bmatrix} \quad (15)$$

为确定远期利率函数  $f(T)$  的前三阶导数, 需要估计与远期利率相对应的折现函数, 这是因为付息债券价格是折现函数的线性形式. 与式(9)中的远期利率函数  $f(0, T)$  相对应的折现函数形式如下

$$\begin{aligned}
p(T) &= \exp\left(-\int_0^T f(v) dv\right) \\
&= \exp\left\{-RT + \lambda_1 \frac{\sigma_1}{2} [W_1(0) + 4\frac{\sigma_1}{\lambda_1^2}] \times \right. \\
&\quad \left. [e^{-\frac{\lambda_1}{2}T} - 1] - 2\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^3} [e^{-\lambda_1 T} - 1] + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda_2 \sigma_2}{2} [W_2(0) + \frac{4\sigma_2}{\lambda_2^2}] \times \right. \\
&\quad \left. [e^{-\frac{\lambda_2}{2}T} - 1] - \frac{2\sigma_2^2}{\lambda_2^3} (e^{-\lambda_2 T} - 1)\right\} \\
&= e^{-RT} \cdot e^\delta \quad (16)
\end{aligned}$$

式(16)中的  $\delta$  表示大括号中除  $RT$  项以外的所有各项. 由于当  $\delta \approx 0$  时,  $e^\delta \approx 1 + \delta$ , 因此, 式(16)中的折现函数可以近似为

$$\begin{aligned}
p(T) &\approx g(T) \\
&= \beta_0 e^{-RT} + \beta_1 e^{-(R+\frac{\lambda_1}{2})T} + \beta_2 e^{-(R+\lambda_1)T} + \\
&\quad \beta_3 e^{-(R+\frac{\lambda_2}{2})T} + \beta_4 e^{-(R+\lambda_2)T} \quad (17)
\end{aligned}$$

式(17)中

$$\beta_0 = 1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)$$

对式(16)采用式(17)中的方式进行近似的目的是利用  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  和  $\beta_4$  估计值来近似折现函数  $p(T)$  在原点处的导数, 然后再将折现函数在原点处的导数转换成远期利率函数的导数. 令  $p_j(R)$  表示付

息债券  $j$  由折现函数  $e^{-Rt}$  进行折现的理论现值,  $P_j(R + \lambda_1/2)$  表示由折现函数  $e^{-(R+\lambda_1/2)T}$  进行折现的理论现值, 依此类推. 可以证明, 付息债券  $j$  由函数  $g(T)$  进行折现的现值是 5 个“理论现值”的线性组合, 即

$$P_j = P_j(R) + \beta_1 [P_j(R + \frac{\lambda_1}{2}) - P_j(R)] + \beta_2 [P_j(R + \lambda_1) - P_j(R)] + \beta_3 [P_j(R + \frac{\lambda_2}{2}) - P_j(R)] + \beta_4 [P_j(R + \lambda_2) - P_j(R)] \quad (18)$$

再令  $\hat{P}_j$  表示付息债券  $j$  观测到的市场价格加上应计利息,  $\varepsilon_j = \hat{P}_j - P_j$  表示定价误差. 由于上面给出的折现函数  $g(T)$  对于同一横截面国债价格数据样本中的所有国债  $N$  都适用, 因此式 (18) 中的 4 个系数  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  和  $\beta_4$  就可以通过最小化下面联立方程的均方根误差 (RSME, root mean squared errors) 来进行估计.

$$\begin{aligned} \hat{P}_j - P_j(R) = & \beta_1 [P_j(R + \frac{\lambda_1}{2}) - P_j(R)] + \\ & \beta_2 [P_j(R + \lambda_1) - P_j(R)] + \\ & \beta_3 [P_j(R + \frac{\lambda_2}{2}) - P_j(R)] + \\ & \beta_4 [P_j(R + \lambda_2) - P_j(R)] + \varepsilon_j \\ & j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (19)$$

由式 (19) 估计得到系数  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  和  $\beta_4$  的值后, 进而利用式 (17) 得到折现函数  $p(T)$  在原点处的近似导数值, 具体形式为

$$\left\{ \begin{aligned} r = -p'(0) \approx -g'(0) &= \beta_0 R + \beta_1 (R + \frac{\lambda_1}{2}) + \beta_2 (R + \lambda_1) + \beta_3 (R + \frac{\lambda_2}{2}) + \beta_4 (R + \lambda_2) \\ p''(0) \approx g''(0) &= \beta_0 R^2 + \beta_1 (R + \frac{\lambda_1}{2})^2 + \beta_2 (R + \lambda_1)^2 + \beta_3 (R + \frac{\lambda_2}{2})^2 + \beta_4 (R + \lambda_2)^2 \\ p'''(0) \approx g'''(0) &= -[\beta_0 R^3 + \beta_1 (R + \frac{\lambda_1}{2})^3 + \beta_2 (R + \lambda_1)^3 + \beta_3 (R + \frac{\lambda_2}{2})^3 + \beta_4 (R + \lambda_2)^3] \\ p^{(4)}(0) \approx g^{(4)}(0) &= \beta_0 R^4 + \beta_1 (R + \frac{\lambda_1}{2})^4 + \beta_2 (R + \lambda_1)^4 + \beta_3 (R + \frac{\lambda_2}{2})^4 + \beta_4 (R + \lambda_2)^4 \end{aligned} \right. \quad (20)$$

接着, 再根据折现函数和远期利率函数之间的数学关系式, 可以得到相应的远期利率函数在原点处的导数, 具体形式为

$$\begin{cases} f'(0) = r^2 - p''(0) \\ f''(0) = 2r^3 - 3rp''(0) - p'''(0) \\ f'''(0) = 6r^4 - 12r^2p''(0) + 3[p''(0)]^2 - 4rp'''(0) - p^{(4)}(0) \end{cases} \quad (21)$$

将式 (20) 和 (21) 中的结果带入式 (15) 可以求解得到远期利率函数的 4 个系数  $a, b, c$  和  $d$  的值.

综上所述, 在 HJM 框架下对三因子期限结构模型采用分解技术后的参数估计程序可以简单概括为: 给定  $(\lambda_1, \lambda_2, R)$  值, 调用下述参数估计程序; 根据结果调整  $(\lambda_1, \lambda_2, R)$  值, 重复调用估计程序, 直到估计结果满足条件: (1) 估计结果的均方根误差最小化; (2) 短期国债没有表现出普遍性的定价误差; (3) 满足系数  $b < 0$  和  $d < 0$ . 参数估计所调用的估计程序主要包括以下几个步骤.

**步骤 1** 根据式 (18) 计算每只国债的 5 个“理论现值”及其线性组合.

**步骤 2** 根据式 (19) 的联立回归方程采用遗传算法最小化均方根误差 (RMSE), 估计得到系数  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  和  $\beta_4$  的值.

**步骤 3** 根据式 (20) 计算折现函数  $p(T)$  在原点处的近似导数值, 再由式 (21) 将其转变成远期利率函数  $f(T)$  在原点处的导数.

**步骤 4** 将式 (21) 中的远期利率函数  $f(T)$  在原点处的导数值带入式 (14) 求解得到系数  $a, b, c$  和  $d$  的值, 再将其带入式 (12) 即可得到模型的状态变量和隐含波动值.

在调用上述参数估计程序过程的步骤 2 中, 利用到了遗传算法, 下面仅简略给出该算法在本文中的操作过程和实现步骤.<sup>[13]</sup>

(1) 遗传算法操作过程

A. 变量编码

对  $x$  选择二进制形式的编码, 即 0, 1 字符串.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x_j$  用一串 0, 1 字符串表示. 在本文中

$$x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

B. 适应度函数

由于本文是对函数求最小优化, 这时可取

$F(i) = L_{\max} - f(i)$ ,  $F(i)$  为第  $i$  个个体的适应度,  $f(i)$  为第  $i$  个个体的目标函数值  $f(i) = f(x^i) = f(x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)$ ,  $L_{\max}$  为  $f(i)$  的最大值估计.

C. 选择、交叉及变异

随机产生初始群体  $N$ , 求得其中每个个体的适应度  $F(i)$ , 定义第  $i$  个个体入选种群的概率为

$$p(i) = \frac{F(i)}{\sum_j F(j)}$$

适应函数值大的个体生存概率大, 在本文中按轮盘赌方式进行选择而产生新种群. 即适应度高的个体保留, 个体适应度低则用适应度高的个体取代. 然后再对新种群以概率为  $p_c$  进行交配, 即两个个体从各自字符串的某一位置(随机确定)开始互相交换, 这样两个子代个体分别且有两个父代个体的特征, 有可能在子代组合成有更高适应度的个体, 这样得到 1 个新种群. 再以较小的概率  $p_m$  使得 1 个个体基因发生变异, 对种群中的每个个体, 在  $[0, 1]$  中产生随机数  $r$ , 若  $r < p_m$ , 则该个体发生变异, 即个体的每一位进行翻转, 由 1 变为 0 或由 0 变为 1, 这可以使求解过程随机地搜索到数值解存在的整个空间, 可以在一定程度上求得全局最优解.

(2) 实现步骤

**步骤 1** 选择编码为 10 位的二值形式, 随机产生初始群体  $POP$ , 群体大小  $N (= 50)$ ;

**步骤 2** 满足停止规则, 算法停止, 否则, 对群体中的每一个体计算适应函数  $f(POP)$ , 并求得每个个体入选种群的概率, 把概率小的劣个体用概率大的优个体代替, 形成新的群体  $newPOP$ ;

**步骤 3** 对新种群以交配概率为  $p_c$  进行交配, 再以一个小的概率  $p$  使得 1 个个体的基因发生变异, 形成新的群体  $newPOP$ , 用  $newPOP$  代替  $POP$ , 返回步骤 2.

### 3 实证研究

本文选取自 2005 年 1 月 5 日到 2006 年 3 月 15 日上海证券交易所记账式国债每周三的收盘价数据<sup>②</sup>作为样本, 除节假日休市和数据缺失外, 共计

58 个截面观测. 之所以选择每周三的国债收盘价数据, 是因为该日的国债价格受股市周末效应和周一效应的影响最小. 在每个截面观测点上, 采集 28 只国债的数据, 这些国债均是不可赎回且享受免税优惠<sup>[14, 15]</sup>.

对采集到的 58 个截面时间点上的每周三收盘价数据, 在 HJM 框架下采用分解技术对三因子期限结构模型进行参数估计. 在估计时, 将与自 2005 年 1 月 5 日开始的周数据相对应的时间进行归零化处理, 即将 2005 年 1 月 5 日作为第 1 周的取样时间点, 在图形的横轴上对应的时间(单位: 周)为 1, 其它作类似处理. 估计过程中发现, 在对折现函数中的参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  进行调整时, 指数衰减参数  $\lambda_1$  相对平稳, 其值基本上处于 0.1 和 0.4 之间, 如图 1 所示. 这表明三因子 HJM 模型中的第 1 个价差因子对利率期限结构长端的影响比短端更大; 而指数衰减参数  $\lambda_2$  的取值波动相对更大一些, 如图 2 所示. 这也表明该模型中的第 2 个价差因子主要是影响利率期限结构的短端的, 因为其影响力随着国债到期时间的增加而迅速衰减. 不过从整个估计情况来看, 在单个截面观测点上, 只要保证  $\lambda_2 > \lambda_1$ , 小幅度调整它们的取值不会对最后的期限结构模型估计结果产生太大的影响, 这也反映了本文所构建的 HJM 三因子利率期限结构模型具有相对平稳的指数衰减结构.

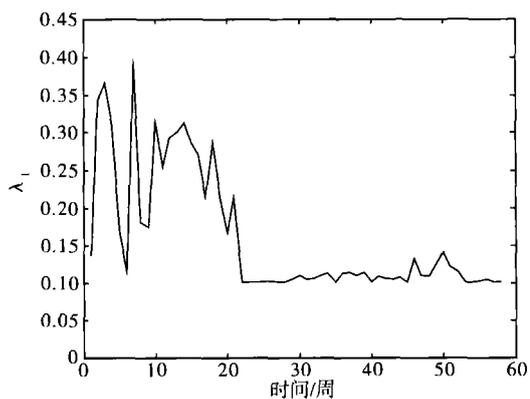


图 1 HJM 模型中参数  $\lambda_1$  的调整取值时序图

Fig. 1 Time series graph of adjusted value of parameter  $\lambda_1$  in HJM model

② 数据来源: 上海证券交易所 <http://www.sse.com.cn>

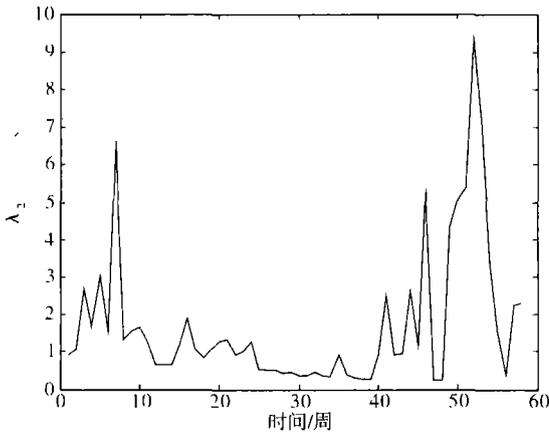


图2 HJM模型中参数 $\lambda_2$ 的调整取值时序图

Fig. 2 Time series graph of adjusted value of parameter  $\lambda_2$  in HJM model

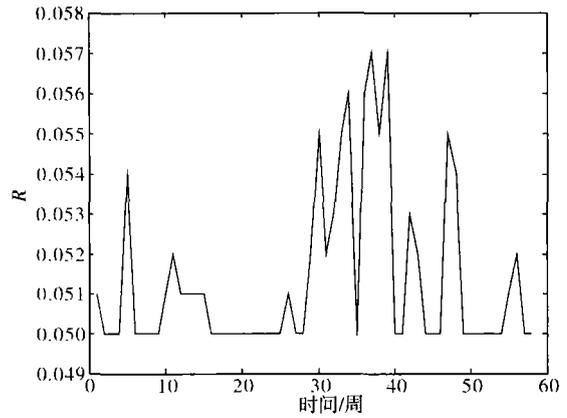


图3 HJM模型中长期利率R的调整取值时序图

Fig. 3 Time series graph of adjusted value of long term rate  $R$  in HJM model

在确定了参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的取值后,在调用参数估计程序时需要调整的仅是长期利率  $R$  的取值,但该利率在理论上是不可观测的,因为它是无限期折现债券 (a discount bond of infinity maturity) 的到期收益率. 不过由于可观测的收益率曲线在其长端一般都呈现扁平化,因此该长期利率  $R$  应当非常接近于在国债市场上可观测到的长期债券的利率. 在我国国债市场上,可观测到的债券最长期限一般在 20 年,其到期收益率一般在 5% 左右,故本文将长期利率  $R$  的初始值定为 5%. 不过由估计过程来看,长期利率  $R$  的选定对每个横截面观测点估计结果的好坏是至为重要的,因此,在调用参数估计程序时对长期利率  $R$  的选定必须谨慎,并遵守以下准则:在预期假说成立的条件下,根据可观测到的收益率曲线在其长端呈现扁平化现象,如果在对某个横截面观测点进行参数估计时,发现估计结果不能满足上面的三项要求,就将长期利率  $R$  上调 10 个基点,再以调整后的参数  $(\lambda_1, \lambda_2, R)$  值来重新对该横截面观测点上的债券价格数据进行估计,以此类推. 长期利率  $R$  在各个横截面观测点上的具体调整情况如图 3 所示.

根据调整后的参数  $(\lambda_1, \lambda_2, R)$  值对各横截面观测点上的债券价格数据进行三因子 HJM 模型估计,具体的拟合效果可以通过均方根误差 (RSME) 来反映,如图 4 所示.

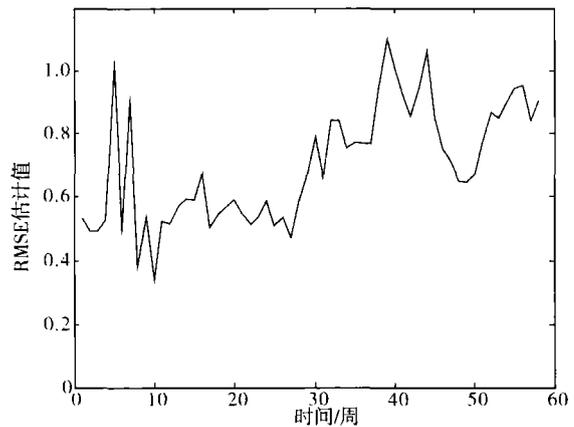


图4 HJM模型的拟合效果, RMSE 时序图

Fig. 4 Time series graph of RMSE measured HJM fitness ability

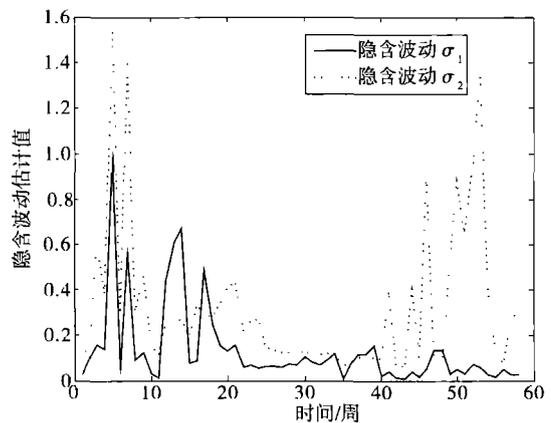


图5 HJM模型中初始远期利率隐含波动时序图

Fig. 5 Time series graph of implied volatility of initial forward rate in HJM model

从图4中,可以看到模型估计的RMSE值基本上处于0.4到1之间,因而这就说明了本文所给出的三因子HJM模型以及相应的分解技术和估计方法是有效的,估计结果是比较理想的.图5给出了初始远期利率两个隐含波动的时序图,从该图中可以看到,隐含波动 $\sigma_1$ 的变动幅度相对较少,处于0到1之间,且在大部分的横截面观测点上是在0.2以下的;而隐含波动 $\sigma_2$ 的变动虽然很不规则,表现为两端截面上的波动大,中间截面上的波动小,但总体上还是比 $\sigma_1$ 的变动幅度要大一些.

图6给出了HJM模型中初始远期利率的两个状态变量(风险因子) $\hat{w}_1$ 和 $\hat{w}_2$ 的时序图.从该图中可以看到,状态变量 $\hat{w}_1$ 对远期利率的不确定性影响主要是正向的,且在各个截面观测点上的变动幅度很小(除个别点例外),其值主要集中在零附近,因而对远期利率的影响也是很小的.而状态变量 $\hat{w}_2$ 对远期利率的不确定性影响主要是负向的,在各个截面观测点上的变动幅度相对要大的多,因而对远期利率的影响也要更大一些.

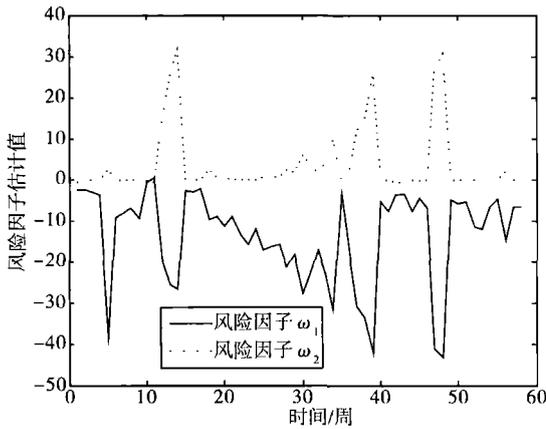


图6 HJM模型中初始远期利率的风险因子时序图

Fig. 6 Time series graph of risk factor of initial forward rate in HJM model

在调整设定参数( $\lambda_1, \lambda_2, R$ )并估计得到隐含波动 $\sigma_1, \sigma_2$ 和风险因子 $\hat{w}_1, \hat{w}_2$ 以及其他过程参数后,就可以利用式(17)和式(11)分别得到该模型在各个截面上的折现函数曲线和初始远期利率曲线.在此基础上,由式(17)中的折现函数并利用式(22)即可得到相对应的即期利率曲线.

$$r(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \left( -\frac{p'(t)}{p(t)} \right) dt \quad (22)$$

为对此作进一步说明,本文以2005年3月16日的横截面债券价格数据样本在进行上述的模型参数估计后,得到相关参数 $\lambda_1 = 0.3152, \lambda_2 = 1.6432, R = 0.051, \sigma_1 = 0.0316, \sigma_2 = 0.1499, \hat{w}_1 = -0.6796$ 和 $\hat{w}_2 = -0.5021$ ,再由上面的式(11)、(17)和(22),即可得到该截面上的折现函数、即远期利率曲线.其中,2005年3月16日上海证券交易所付息国债的折现函数曲线如图7所示.由该图可以看到,折现函数满足必要性条件: $p(0) = 1$ ,且随国债到期时间 $t$ 的增加先呈大幅度衰减趋势,而在无穷远处衰减强度减弱,并逼近于横轴.

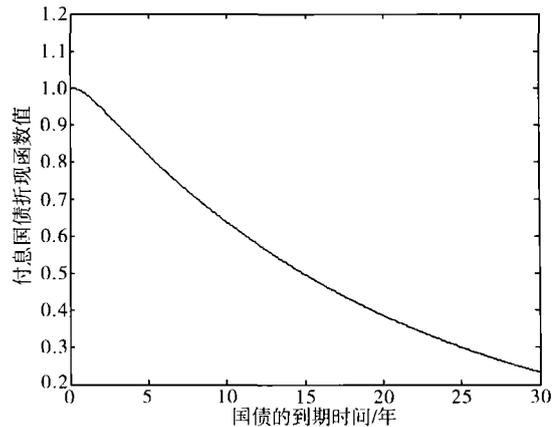


图7 2005年3月16日上海证券交易所付息国债的折现函数曲线

Fig. 7 Discount function plot of govment bond in Shang Stock

Exchange on 16<sup>th</sup> March, 2005

图8给出了2005年3月16日上海证券交易所付息国债的即期利率曲线和远期利率曲线.从该图中可以看到,远期利率曲线是位于即期利率曲线之上的,两条曲线都是先呈快速上涨趋势,然后趋于平稳.不过唯一不足的是,该模型对即远期利率曲线的估计在其短端的值偏小.可以猜测出,出现这种情况的原因仍然可能是对长期利率 $R$ 的设定不太恰当所致,因为该模型是采用设定好参数( $\lambda_1, \lambda_2, R$ )后调用参数估计程序并根据债券的观测价格与其理论价格之间的均方根误差最小化来进行求解的.虽然最后得到的反映模型拟合效果的RMSE值很小,但这并不表明就不存在定价误差.如果存在定价误差,即使短期债券的定价误差比长期债券的定价误差小的多,甚至短期债券的定价误差对整个横截面样本拟合效果的RMSE值

影响并不显著,但由于短期债券的这些定价误差会传递到收益率曲线的构建上,使得收益率曲线出现显著的误差,因而就有可能使收益率曲线在短端发生扭曲,取值偏小。

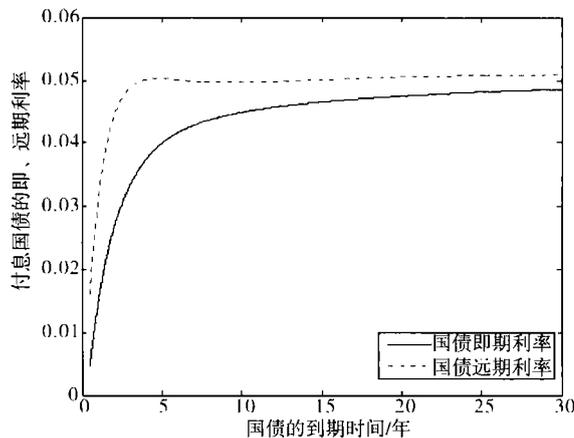


图8 2005年3月16日上海证券交易所付息国债的即期利率曲线和远期利率曲线

Fig. 8 Spot rate and forward rate curve of govtrnment bond in Shang Stock Exchange on 16<sup>th</sup> March, 2005

#### 4 结 论

本文在 HJM<sup>[1,2]</sup> 框架下,将远期利率函数分解为两个成分函数  $G(0, T)$  和  $G(t, T)$ , 并且如果  $G(0, T) = f(0, T)$ , 那么远期利率函数的未来演变过程  $f(t, T)$  可以简化为  $G(t, T)$ , 即  $f(t, T) = G(t, T)$ . 由于两因子的 HJM 模型仅能对远期利率曲线的短端和长端进行有效拟合, 而为拟合远期利率曲线的形状, 可再引入另外一个价差因子, 并可以证明由此得到三因子 HJM 模型的成分函数  $G(0, T)$  是已实现远期利率曲线 (the realized forward rate curve) 的一致表示. 这种发现对于 HJM 模型在市场中的实际应用有着极为重要的

意义, 因为成分函数  $G(t, T)$  中的参数与成分函数  $G(0, T)$  中的参数完全相同, 而后者可以根据国债市场上的横截面债券价格数据并利用某种曲线拟合技术来估计, 因而避免了在 HJM 模型校准阶段对路径依赖型衍生产品的复杂计算. 而对于三因子 HJM 模型成分函数  $G(0, T)$  的识别, 根据它所具有的较好泛函性, 可以推导得到简单而又相当准确的估计程序.

基于上述模型构建思路和参数估计程序, 本文对上海证券交易所自2005年1月5日到2006年3月15日28只记账式国债每周三的收盘价数据作为横截面观测点样本进行了实证研究. 估计过程中发现, 对参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的调整不会对最后的期限结构模型估计结果产生太大的影响, 反映了所构建的 HJM 三因子利率期限结构模型具有相对平稳的指数衰减结构, 但是长期利率  $R$  的选定对每个横截面观测点估计结果的好坏是至为重要的, 应当遵守本文所给出的选择准则. 在设定好参数  $(\lambda_1, \lambda_2, R)$  后, 就可以进行模型参数估计, 估计结果表明本文所构建的三因子 HJM 模型可以准确且一致地表示取样期间的上交所的国债远期利率期限结构, 这些均可以通过 RMSE 时序图、隐含波动  $\sigma_1, \sigma_2$  和风险因子  $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2$  来体现. 为对此作进一步说明, 本文还以2005年3月16日的截面债券价格数据为样本, 估计给出了相应的折现函数、即期利率曲线和远期利率曲线. 至于该模型对即远期利率曲线的估计在其短端的值偏小, 可能是对长期利率  $R$  的设定不太恰当所致.

在接下来的研究中, 将进一步探讨是否可以通过该三因子 HJM 模型的设定形式并以国债市场上的债券价格数据为样本来对利率或有要求权进行一致性定价.

#### 参 考 文 献:

[1] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A discrete time approximation[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1990, 25: 419—440.

[2] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation[J]. Econometrica, 1992, 60(1): 77—105.

[3] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177—188.

[4] Brennan M J, Schwartz E S. A continuous time approach to the pricing of bonds[J]. Journal of Banking and Finance,

- 1979, 3(2): 133—155.
- [5] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. *Econometrica*, 1985, 53(2): 385—408.
- [6] Amin K, Morton A. Implied volatility functions in arbitrage-free term structure models[J]. *Journal of Financial Economics*, 1994, 35(2): 141—180.
- [7] Chambers D R, Carleton W T, Waldman D W. A new approach to estimation of the term structure of interest rates[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1984, 19(3): 233—252.
- [8] Chen Guo. A decomposition of the term structure model of Heath, Jarrow and Morton[J]. *Applied Financial Economics*, 1998, (8): 111—118.
- [9] Jordan J V. Tax effects in term structure estimation[J]. *Journal of Finance*, 1984, 39(2): 393—406.
- [10] McCulloch J H. The tax adjusted yield curve[J]. *Journal of Finance*, 1975, 30(3): 811—829.
- [11] Brown S J, Dybvig P H. The empirical implications of the Cox, Ingersoll and Ross theory of the term structure of interest rates[J]. *Journal of Finance*, 1986, 41(3): 617—630.
- [12] Brown R H, Schaefer S M. The term structure of real interest rates and the Cox, Ingersoll and Ross model[J]. *Journal of Financial Economics*, 1994, 35(1): 3—42.
- [13] 李敏强, 寇纪松. 遗传算法的基本理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002. 16—66.  
Li Min-qiang, Kou Ji-song. *Generic Alogrithm Theory and Application*[M]. Beijing: Science Publishing House, 2002. 16—66. (in Chinese)
- [14] 范龙振. 短期利率模型在上交所债券市场上的实证分析[J]. *管理科学学报*, 2007, 10(2): 80—89.  
Fan Long-zhen. Empirical analysis of short interest rate models with half-year interest rate in the Shanghai Stock Exchange [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2007, 10(2): 80—89. (in Chinese)
- [15] 林海. 利率期限结构研究述评[J]. *管理科学学报*, 2007, 10(1): 79—98.  
Lin Hai. Term structure of interest rate: Selected literature review[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2007, 10(1): 79—98. (in Chinese)

## Empirical study of three-factor HJM model based on forward rate decomposition technique

Li Biao, YANG Bao-chen

School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China

**Abstract:** Under the HJM framework, forward interest rate term structure can be decomposed into two component functions: one can represent the observed initial forward rate curve; the other is the dynamic evolution of forward rate. Because they have the same parameters, it can simplify the practical implementation of a class of HJM models which allow the parameters of the model to be estimated from the initial forward rate function. In order to accurately fit the shape of forward rate curve, the paper introduces another spread factor on the basis of the original two-factor HJM model and derives a simple and accurate estimation procedure by utilizing the functionality of the extended HJM model. According to the procedure, the paper empirically investigates the ability of the model to fit the forward interest rate term structure by a sample of 58 weekly bond price data of Shanghai Stock Exchange. The results show that the three-factor HJM specification has stable exponential decay structure and is a consistent representation of the term structure of interest rate during the sampling period.

**Key words:** forward interest rate; decomposition technique; HJM model; parameter estimation; genetic algorithm