

# 中国利率期限结构平滑样条拟合改进研究<sup>①</sup>

胡海鹏, 方兆本

(中国科学技术大学管理学院统计与金融系, 合肥 230026)

**摘要:** 在 FNZ 模型和 Waggoner 模型的基础上, 结合中国国债市场的发展现状, 从拟合对象、粗糙度惩罚项的函数形式、参数估计方法、最优化目标函数形式以及估计样本等五方面进行修正和改进, 提出利用可变粗糙度惩罚项三次平滑样条改进模型来拟合中国的利率期限结构, 并利用上交所国债市场 2002 年 1 月 1 日至 2003 年 12 月 31 日的国债收盘价格数据对该模型进行实证研究. 结果发现, 笔者提出的改进模型能够较合理、有效地估计较为完整的中国静态利率期限结构.

**关键词:** 静态利率期限结构; 即期利率; 远期瞬间利率; 三次平滑样条; 信息理论准则

**中图分类号:** F8      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007-9807(2009)01-0101-11

## 0 引言

利率期限结构是金融经济学中一个十分重要的基础性研究领域, 它在固定收益证券定价以及利率风险管理方面扮演着重要的角色. 所谓利率期限结构是指不同期限利率之间的关系. 由于一定期限的零息票债券到期收益率等于该期限的市场利率. 因此, 利率期限结构可以用期限不同, 但风险、流动性等其他条件均相同的零息票债券的到期收益率曲线来表示. 从研究时点的角度看, 利率期限结构有静态和动态之分, 前者是指通过拟合、平滑来估计某一时点上市场的利率期限结构, 而后者则通过随机模型来刻画利率期限结构的动态变化. 本文研究的是利率期限结构的静态拟合估计. 当市场上有大量不同期限的无违约风险零息票债券时, 我们就可以较容易地拟合出利率期限结构. 但债券市场上到期期限在一年以上的债券大部分都是付息债券, 由于“息票效应”的影响, 期限相同的付息债券和零息票债券的到期收益率一般是不相等的, 这就需要通过间接的方法从付息债券的价格中提取相应的利率期限结构. 本文的写作正是对这种间接提取方法的探讨和研究.

## 1 文献回顾

利用息票债券价格来提取利率期限结构的统计方法目前已有多种, 其主要差别在于拟合对象和所采用的拟合函数形式不同. 拟合对象主要有贴现函数、零息票债券到期收益率以及远期瞬间利率这三种利率期限结构的等价表达式; 而采用的拟合函数形式主要有参数类和非参数类两种. 本节以此为线索简要介绍了国内外学者在利率期限结构静态拟合估计中所作的贡献.

利用参数技术拟合利率期限结构主要是采用指数衰减型函数来估计远期瞬间利率, 该技术首先由 Nelson 和 Siegel<sup>[1]</sup> 提出, 其具体函数形式为

$$f(t, t+m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \quad (1)$$

其中,  $f(t, t+m)$  表示  $t$  时刻所计算的在  $t+m$  时刻起息的远期瞬间利率.  $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\tau_1$  为待估参数, 每个参数均有一定的经济意义, 分别表示利率的长期水平、短期水平、收益率曲线的斜率以及驼峰形

① 收稿日期: 2005-07-21; 修订日期: 2008-10-12

作者简介: 胡海鹏 (1976—), 男, 福建惠安人, 博士生. E-mail: hpengt@mail.ustc.edu.cn

状. Nelson和 Siegel方法能够较好地估计形状相对简单的收益率曲线, 但对于复杂的利率期限结构, 该方法的拟合优度较差. 由此, Svensson<sup>[2, 3]</sup>扩展了 Nelson和 Siegel方法, 在式 (1) 的基础上增加了一项, 即

$$f(t, t+m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \times \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \quad (2)$$

该新增项加强了估计双驼峰状收益率曲线的能力, 提高了拟合效果. Nelson-Siegel模型和 Svensson模型由于采用了确定形式的拟合函数, 参数估计较为简单, 但这两个模型对收益率曲线长短期两端部分的数据变动十分敏感, 这两部分某个数据的较大变动(如出现异常值)都很可能对整个利率期限结构的估计产生很大的扭曲, 因此稳定性较差; 此外, 这两种方法所估计的债券价格误差也较大.

利用非参数统计方法来估计静态利率期限结构主要有两种: 自助法(Bootstrapping)和样条法. 其中, 利用自助法来估计利率期限结构是由 Fama和 Bliss<sup>[4]</sup>提出的, 该方法从附息票债券中剥离出息票并利用递归运算方法估计出零息票债券的到期收益率水平. 但自助法假定两个相邻期限之间的利率服从线性关系, 并要求估计样本中各息票债券的附息日相同或相近, 这些假设与现实并不太符合. 同时, 实证研究也表明利用自助法拟合出的利率期限结构其短期部分精确度较高, 而中长期部分的拟合优度则较差. 利率期限结构静态拟合的另一种非参数方法是样条法, 该方法是由 McCulloch<sup>[5, 6]</sup>首先提出. McCulloch利用二次和三次回归样条法估计贴现函数, 并表明三次样条法的估计效果要好于二次样条函数法. 但利用三次回归样条法所估计出的隐含远期瞬间利率曲线波动性较大, 尤其在长期部分会出现较大的振荡状态. 由此, Vasicek和 Fong<sup>[7]</sup>提出利用指数样条法来拟合贴现函数. 不过, Shea<sup>[8]</sup>指出采用指数样条函数形式会存在多重共线性问题, 同时该方法所估计出的隐含远期瞬间利率曲线的远端部分仍然会呈现出较大的振荡态势. 为了克服三次回归样条估计法所出现的振荡远期瞬间利率曲线

这个缺陷, Fisher Nychka 和 Zervos<sup>[9]</sup> 在 McCulloch的三次回归样条法基础上提出了用三次平滑样条法来拟合远期瞬间利率曲线. 但此后, Bliss<sup>[10]</sup> 通过实证分析指出三次平滑样条法的拟合优度不太稳定. 而 Waggoner<sup>[11]</sup> 分析了 Fisher Nychka和 Zervos方法精确度不够稳定的主要原因在于采用了常数粗糙度惩罚项(Roughness Penalty), 因此他建议采用可变粗糙度惩罚项, 并利用实证研究表明该方法能够较好地拟合出美国的静态利率期限结构. 由于利用三次平滑样条法拟合利率期限结构具有较好的灵活性、准确性和平滑性等优点, 该方法目前已成为利率期限结构静态估计方面的主流方法. 一些发达国家的中央银行, 如美国和日本央行, 均采用该方法来构建各自国家的即期收益率曲线.

在国内, 随着中国利率市场化步伐的加快和国债市场规模的不断壮大, 构造中国的静态利率期限结构已逐渐成熟, 有关这方面的理论和实证研究成果近几年已陆续出现. 姚长辉和梁跃军<sup>[12]</sup>、杨大楷和王欢<sup>[13]</sup> 以及陈雯和陈浪南<sup>[14]</sup> 分别采用国债基本定价模型逆算法、指数函数法和二次函数法来估计我国的国债收益率曲线. 杨春鹏和曹兴华<sup>[15]</sup> 则运用回归插补法和三次样条插值法来构造我国的国债到期收益率曲线, 并通过实证研究表明利用三次样条插值法预测国债收益率的效果要好于传统的回归分析方法. 赵宇龄<sup>[16]</sup> 分别采用直接方法、模拟法、多项式样条函数法、Nelson-Siegel模型和 Svensson模型来拟合中国的国债收益率曲线. 但以上这些作者研究的对象均是国债的到期收益率曲线, 由于“息票效应”的存在, 到期收益率曲线并不是真正意义上的利率期限结构. 对此, 郑振龙和林海<sup>[17]</sup> 采用自助法和 McCulloch的三次样条法, 并利用上交所的附息国债价格来估计真正意义上的中国静态利率期限结构. 刘灿和易璐<sup>[18]</sup> 则利用 B样条函数法实证研究了我国深沪两市国债收益率的期限结构. 从以上介绍可以看出, 目前国内在估计静态利率期限结构方面并没有用到国外业已成熟的平滑样条主流技术. 鉴于三次平滑样条估计法所具有的优点, 本文对中国利率期限结构提取方法的研究主要集中在该方法, 并结合我国国债市场的现状从五个方面改进了 Fisher Nychka 和 Zervos 以及

W aggoner分别提出的三次平滑样条法。

## 2 样条拟合模型介绍与改进研究

### 2.1 利率期限结构的等价表示法及其与债券价格间的关系

令  $y(\tau)$  表示剩余期限还有  $\tau$  年的无违约风险零息票债券的到期收益率, 则利率期限结构可表示为

$$\tau \rightarrow y(\tau), \tau > 0$$

同时, 设  $\delta(\tau)$  表示  $\tau$  年后支付 1 货币单位的无违约风险零息票债券的当前价格,  $f(\tau)$  表示  $\tau$  年后起息的远期瞬间利率, 则根据定义有

$$\begin{cases} \delta(\tau) = \exp(-\tau y(\tau)) \\ \delta(\tau) = \exp(-\int_0^{\tau} f(s) ds) \end{cases} \quad (3)$$

$$y(\tau) = -\frac{\ln \delta(\tau)}{\tau}$$

进而可得到

$$y(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} f(s) ds}{\tau} \quad (4)$$

因此, 利率期限结构有  $y(\tau)$ 、 $\delta(\tau)$  和  $f(\tau)$  三种等价表述方式。

现设  $P_i$  为某日所观察到的第  $i$  个附息票债券价格,  $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{im_i}$  为该债券的付息日期, 其对应的票息支付额分别为  $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{im_i}$ <sup>②</sup>。则债券的理论价格可表示为

$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} \delta(\tau_{ij}) = \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} \exp(-\tau_{ij} y(\tau_{ij})) \\ &= \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} \exp(-\int_0^{\tau_{ij}} f(s) ds) \end{aligned} \quad (5)$$

现实交易中, 由于各债券的流动性差异、非同步交易等因素的影响, 使得债券的理论价格与观察到的实际价格会有一定的误差, 因此有

$$P_i = \hat{P}_i + \varepsilon_i \quad (6)$$

其中,  $\varepsilon_i$  为随机误差项。

### 2.2 样条估计方法中的三个主要模型

利用样条方法估计静态利率期限结构主要有

三个模型, 它们分别是由 McCulloch Fisher Nychka和 Zervos以及 W aggoner提出来的, 本文把这三个模型依次简称为 McCulloch 模型、FNZ 模型和 W aggoner模型, 各模型简介如下:

#### I) McCulloch 模型

McCulloch模型是通过三次回归样条法来拟合贴现函数, 并对样条构造中所需要的结点个数及空间位置提出了一个“大拇指法则”, 即结点的个数近似于估计样本个数的平方根, 而结点的位置则满足任意两个相邻结点间的债券个数相等或相近。McCulloch模型<sup>③</sup>的目标函数形式为

$$\text{Min} \sum_{j=1}^N (P_i - \hat{P}_i(\delta))^2 \quad (7)$$

其中,  $N$  为估计样本个数,  $P_i$  为第  $i$  个债券的实际价格,  $\hat{P}_i(\delta)$  表示通过三次回归样条法拟合贴现函数进而估计出的债券理论价格。同时, 根据贴现函数的经济意义, 其须满足  $\delta(0) = 1$

#### II) FNZ模型

针对 McCulloch模型在推导隐含远期瞬间利率曲线时其长期部分会出现较大振荡的缺陷, Fisher Nychka和 Zervos引进了三次平滑样条法, 建立 FNZ模型, 即

$$\text{Min} \left\{ \sum_{j=1}^N (P_i - \hat{P}_i(f))^2 + \lambda \int_0^{\tau_{\max}} [f''(s)]^2 ds \right\} \quad (8)$$

式中,  $\hat{P}_i(f)$  表示通过三次常数粗糙度惩罚项平滑样条法拟合远期瞬间利率进而计算而得的债券理论价格,  $\tau_{\max}$  表示样本中所有债券剩余期限的最大值,  $\lambda$  为粗糙度惩罚项, 其通常由最小化广义交叉验证 (Generalized Cross-Validation) 指标来

估计, 即  $\lambda$  的最优估计值  $\hat{\lambda}$  可表示为

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^N (P_i - \hat{P}_i(f))^2}{(N - \text{Enp}(\lambda))^2} \right\} \quad (9)$$

其中, 函数形式  $\arg \min_x \{y(x)\}$  表示使得  $y(x)$  达到最小值的  $x$  值, 而  $\text{Enp}(\lambda)$  为有效参数个数。在

② 在我国, 一般有  $C_{i1} = C_{i2} = \dots = C_{im_i-1}, C_{im_i} = C_{i1} + 100$

③ 为了增强模型之间比较的直观性, 本文所描述的 McCulloch 模型与其原始的模型叙述形式上有些不同, 但其本质是一致的。

FNZ模型中,构造样条所需要的结点个数大约为样本总数的三分之一,结点的空间分配则满足任意两个相邻结点间的债券数目相等或相近.

### III) Waggoner模型

由于 FNZ 模型采用常数粗糙度惩罚项,使得模型的拟合优度不够稳定.对此,Waggoner建议使用可变粗糙度惩罚项,提出 Waggoner 模型,即

$$\text{Min} \left\{ \sum_{j=1}^N (P_i - \hat{P}_i(f))^2 + \int_0^{\tau_{\text{max}}} \lambda(s) [f''(s)]^2 ds \right\} \quad (10)$$

式中,  $\lambda(s)$  为三阶阶梯函数,其表达式如下:

$$\lambda(s) = \begin{cases} 0.1 & 0 < s \leq 1 \\ 100 & 1 < s \leq 10 \\ 100\,000 & s > 10 \end{cases} \quad (11)$$

在 Waggoner 模型中,结点个数与空间位置的确定原则与 FNZ 模型相同.

### 2.3 平滑样条模型的改进

采用三次平滑样条法,尤其是 Waggoner 模型,能够产生较好的拟合效果,但这些复杂的方法主要是针对发达债券市场利率期限结构的构造而提出的.在中国,由于国债市场各期限品种还不够齐全,某些国债券种的流动性不足,债券衍生产品市场更是缺失,因此,照搬国外的这些成熟技术未必能产生同样精确的效果.但借鉴这些方法的成熟思想并结合中国国债市场的现状来估计中国静态利率期限结构将是一种很有意义的尝试.据此,本文利用了三次平滑样条法的优点,在 FNZ 模型和 Waggoner 模型的基础上从五方面进行改进,以期构造更适合估计中国静态利率期限结构的平滑样条法,其具体的改进思路如下:

1) 拟合对象选择为  $V(\tau) = y(\tau)(1 + \tau)$ . 国内外利率期限结构的实证研究已证实了利率一般会出现均值回复现象,其结果将是当到期期限趋于无穷时,零息票债券的到期收益率渐近于常数.由于三次平滑样条方法具有渐近的线性关系,当把拟合对象选定为  $V(\tau)$  时,由渐近线性特征可得  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} V'(\tau) = y_c$ . 其中  $y_c$  为某一常数,进而根据  $V(\tau)$  的表达式有  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{V(\tau)}{1 + \tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} V'(\tau) = y_c$ . 因此,利用三次平滑样条技术直接拟合  $V(\tau)$  并进而估计出利率期限结构将符合

利率的均值回复特征.

2) 对粗糙度惩罚项  $\lambda$  采用二阶阶梯函数形式.在 FNZ 模型中,  $\lambda$  值依赖于日期  $t$  不同日期的  $\lambda$  值不一样.这样,估计出的利率期限结构其变动不仅是由市场利率本身的变化引起的,而且部分也是由  $\lambda$  值的估计误差波动所导致的,这也是 FNZ 模型拟合优度不稳定的主要缘由.同时, FNZ 模型假定同一天内  $\lambda$  值对于所有期限的“粗糙度惩罚”均相等.但一般说来,利率期限结构的中短期部分所包含的信息要远远大于其长期部分,因而估计的利率期限结构其前端部分应更加强调拟合优度,而其后端部分则应以平滑性为主.鉴于此, Waggoner 对  $\lambda$  采用如式 (11) 所示的三阶阶梯函数形式,其不同的取值范围分别对应于短期国债、中期国债和长期国债的年限.由此可见, Waggoner 模型对于  $\lambda$  表达形式的选择比 FNZ 模型要合理得多.然而,由于中国国债市场缺乏短期品种,而以 3 至 10 年的中期国债为主.因此,笔者认为粗糙度惩罚项  $\lambda$  采用二阶阶梯函数形式并以 10 年期限为分界限更符合我国国债市场的发展现状.

3) 利用信息理论准则 (简称 TIC 准则) 来估计  $\lambda$  值.在确定了  $\lambda$  的函数形式后,接下来就需要估计其具体值. FNZ 模型和 Waggoner 模型对  $\lambda$  的选择不仅在表达形式上不一样,在估计  $\lambda$  值所采用的准则也不同. FNZ 模型利用最小化广义交叉验证来获得每天的最优  $\lambda$  估计值,但该准则是为了避免繁琐的计算而经过简化得来的,它只有在债券价格与拟合对象为线性关系时才成立,即当以贴现函数为拟合目标时,利用该准则估计的  $\lambda$  值才是最优的.但是, FNZ 模型的拟合对象被设定为远期瞬间利率,其与债券价格存在指数关系,因而采用最小化广义交叉验证所估计的  $\lambda$  值具有一定的误差.而 Waggoner 模型对式 (11) 中  $\lambda$  的三个具体值是由最小化加权绝对误差准则得来的,但该准则对于最优  $\lambda$  值的甄别能力较低,即利用该准则估计的  $\lambda$  值一般有多重解,有时甚至达到十多个.从粗糙度惩罚项  $\lambda$  的统计意义看,引入  $\lambda$  主要是为了减少多余的参数,即最优的  $\lambda$  值对应最优的有效参数数目.当  $\lambda$  趋于零时,有效参数个数接近于用来构造样条的结点个数加上二;当  $\lambda$

趋于无穷时, 相应的有效参数数目则为两个. 由此可见, 最优  $\lambda$  值的估计实质上是模型选择问题. 在模型选择的众多准则中, 比较常用的主要有 AIC 准则、BIC 准则、MDL (Minimum Description Length) 准则以及 ITC (Information Theoretic Criteria) 准则. 其中, ITC 准则是由 Bai 等<sup>[19]</sup> 在 AIC 准则和 MDL 准则的基础上提出来的, 由于该准则具有强相合性的统计优点, 在模型选择领域中已受到广泛的应用. 因此, 本文采用了 ITC 准则来估计最优  $\lambda$  值, 以避免 FNZ 模型和 Waggoner 模型在估计最优  $\lambda$  值时所出现的不足.

4) 对定价误差引入以久期倒数为基础的权重. 一般说来, 利率的变化对短期债券价格和长期债券价格的影响是不同的, 加上债券其固有的“到期价格回归面值”特征, 使得定价误差会出现异方差现象, 即式 (6) 中的误差序列  $\{\varepsilon_i\}_{i=1, \dots, N}$  具有异方差特性. 该现象最早是由 Vasicek 和 Fong (1982) 发现的, 他们假定价格误差随机序列满足  $E(\varepsilon_i) = 0$ ,  $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 D_i^2$ ,  $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$ , 其中  $D_i$  为第  $i$  个债券的麦考莱 (Macaulay) 久期. 为了解决债券价格序列出现的这种异方差现象, 本文在目标函数的定价误差部分引入权重, 其大小为各债券对应的久期的倒数, 这样就有

$$Var(\varepsilon_i \frac{1}{D_i}) = \frac{1}{D_i^2} E(\varepsilon_i^2) = \frac{\sigma^2 D_i^2}{D_i^2} = \sigma^2.$$

5) 引入 7 天、14 天和 28 天封闭式国债回购利率作为短期国债的合理替代数据源. 由于中国债券市场缺乏一年以内的短期国债, 因而构造出来的利率期限结构不够完整; 同时, 在利率动态建模时, 也需要较为完整的静态利率期限结构数据来估计其模型参数. 然而, 由于平滑样条法一般假设其边界及边界以外的部分满足线性关系, 这样, 利用该方法来预测样本债券所覆盖的期限以外的利率将产生较大的误差. 因此, 为了构造较为完整的中国利率期限结构, 需要引进合理的、能够反映市场短期利率走势的数据源. 鉴于本文的实证数据取自于上交所上市交易的国债价格, 所以笔者主要考虑了上交所封闭式国债回购利率数据. 目前, 上交所封闭式国债有 1 天、2 天、3 天、4 天、7 天、14 天、28 天、91 天和 182 天共 9 个品种. 其中, 1 天、2

天、3 天和 4 天国债券回购由于期限极短, 受市场短期投机行为影响较大, 时常会出现异常波动性, 因而不适宜采用; 而 91 天和 182 天国债券回购因期限相对较长, 存在一定的违约风险, 因此这些利率包含了一定的信用风险溢价, 这与利率期限结构是反映无违约风险零息票债券的到期收益率相违背的, 因而也不宜采用. 但对于 7 天、14 天和 28 天国债券回购, 其交易频繁, 市场流动性较好, 期限又不太长, 且有国债作为抵押, 违约风险极低, 因而这三个国债回购品种的利率所隐含的信用风险溢价极其微小. 由此可见, 7 天、14 天和 28 天封闭式国债回购利率可作为短期国债较为合理的数据替代源.

综合以上五方面, 本文提出了一个改进的三次平滑样条函数法来估计中国的静态利率期限结构, 其最优化目标函数为

$$\text{Min} \left\{ \sum_{j=1}^N \left( \frac{P_j - \hat{P}_j(V(\tau))}{D_j} \right)^2 + \lambda_1 \int_0^{10} [V''(s)]^2 ds + \lambda_2 \int_0^{\tau_{\max}} [V''(s)]^2 ds \right\} \quad (12)$$

式中,  $\hat{P}_j(V(\tau))$  表示通过拟合  $V(\tau)$  进而估计的第  $j$  个债券的理论价格,  $D_j$  为债券  $j$  的麦考莱久期,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  为粗糙度惩罚项

#### 2.4 三次平滑样条改进模型的参数估计

改进后的三次平滑样条模型参数估计 (即式 (12) 的函数最优化问题求解) 的整体思路为, 先把最优化目标函数式 (12) 化为二次型的形式, 然后利用非线性最小二乘法来求得收敛解. 同时, 根据 ITC 准则来估计收敛解中粗糙度惩罚项  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的最优估计值. 具体的推导过程如下所示.

先令  $\phi(\tau) = (\phi_1(\tau), \dots, \phi_k(\tau))^T$  为一组三次 B 样条基底<sup>④</sup>, 其中上标 T 表示向量或矩阵转置. 则任意的三次样条均可由 B 样条基底的线性组合来表示. 因此,  $V(\tau)$  的三次样条拟合函数可表示为

$$V(\tau) = \phi(\tau)^T \beta = \sum_{k=1}^K \beta_k \phi_k(\tau) \quad (13)$$

其中,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$  为待估参数. 进而有

$$\begin{aligned} \int_0^{10} [V''(s)]^2 ds &= \beta^T \left( \int_0^{10} \phi''(s)^T \phi''(s) ds \right) \beta \\ &= \beta^T H_1 \beta \end{aligned} \quad (14)$$

④ 由于篇幅所限, B 样条基底的定义及构造详见 Simonoff (2000)<sup>[20]</sup> 著作的介绍.

式中,  $H_1 = \int_0^T \phi''(s)^T \phi''(s) ds$

同理可得

$$\int_0^T [V''(s)]^2 ds = \beta^T H_2 \beta \tag{15}$$

式中,  $H_2$  的定义为  $H_2 = \int_0^T \phi''(s)^T \phi''(s) ds$

现设  $\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 = H, P = (P_1, \dots, P_N)^T$ ,

$\hat{P}(\beta) = (\hat{P}_1(\beta), \dots, \hat{P}_N(\beta))^T$ , 其中  $\hat{P}_i(\beta), i = 1, \dots, N$  表示估计的债券价格, 它依赖于参数向量  $\beta$ , 则根据式 (5) 和 (13) 可得

$$\begin{aligned} \hat{P}_i(\beta) &= \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} \exp\left(-\frac{\tau_{ij}}{1 + \tau_{ij}} V(\tau_{ij})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} \exp\left(-\frac{\tau_{ij}}{1 + \tau_{ij}} \sum_{k=1}^K \beta_k \phi_k(\tau_{ij})\right) \end{aligned} \tag{16}$$

另设  $W = \text{diag}(\frac{1}{D_1}, \dots, \frac{1}{D_N}), \sqrt{W} = \text{diag}(\frac{1}{D_1}, \dots, \frac{1}{D_N})$ ,

则最优化目标函数式 (12) 可写成如下二次型的形式

$$M_{\beta} \ln\{(\sqrt{W}(P - \hat{P}(\beta)))^T (\sqrt{W}(P - \hat{P}(\beta))) + \beta^T H \beta\} \tag{17}$$

目标函数式 (17) 的最小化可用非线性最小二乘法来求得, 其具体求解过程如下:

首先, 按照 Chow<sup>[21]</sup> 的方法对  $\hat{P}(\beta)$  进行如下线性化处理

$$\hat{P}(\beta) \approx \hat{P}(\beta^0) + \frac{\partial \hat{P}(\beta)}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta=\beta^0} (\beta - \beta^0) \tag{18}$$

式中,  $\beta^0$  为  $\beta$  的一个适当初始值.

然后, 令  $X(\beta^0) = \sqrt{W} \left( \frac{\partial \hat{P}(\beta)}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta=\beta^0} \right), Y(\beta^0) =$

$\sqrt{W}(P - \hat{P}(\beta^0)) + X(\beta^0)\beta^0$ ,

则式 (17) 可化为下列形式

$$M_{\beta} \ln\{(Y(\beta^0) - X(\beta^0)\beta^T)(Y(\beta^0) - X(\beta^0)\beta) + \beta^T H \beta\} \tag{19}$$

这样, 目标函数式 (19) 的最优值即为相应的桥回归参数估计值, 从而可得  $\beta^0$  的一个迭代值  $\beta^1$  满足

$$\beta^1 = (X(\beta^0)^T X(\beta^0) + H)^{-1} X(\beta^0)^T Y(\beta^0) \tag{20}$$

接着, 继续将  $\hat{P}(\beta)$  在  $\beta^1$  处展开并重复式 (18) 至式 (20) 的步骤可得到  $\beta^1$  的迭代值  $\beta^2$ . 如此反复下去, 直至收敛, 最后可得  $\beta$  的收敛解  $\beta^*$ , 即三次平滑样条改进模型的最优参数估计值  $\beta^*$  满足:

$$\beta^* = (X(\beta^*)^T X(\beta^*) + H)^{-1} X(\beta^*)^T Y(\beta^*) \tag{21}$$

一般说来, 上式中改进模型的最优参数估计值  $\beta^*$  需要先知道  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的值后才能求得, 即可把式 (21) 写成如下形式

$$\beta^*(\lambda_1, \lambda_2) = (X(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2))^T X(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2)) + H)^{-1} X(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2))^T Y(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2)) \tag{22}$$

其中,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是根据 ITC 准则来得到最优估计值的, 具体的估计步骤如下:

首先, 根据下列公式计算有效参数数目  $Enp(\lambda_1, \lambda_2)$ ,

$$Enp(\lambda_1, \lambda_2) = \text{trace}(X(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2))(X(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2))^T X(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2)) + H)^{-1} \times X(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2))^T) \tag{23}$$

式中,  $\text{trace}(\cdot)$  表示矩阵的迹.

接着, 由信息理论准则的定义可得

$$ITC(\lambda_1, \lambda_2, C_N) = \frac{N}{2} \ln(\hat{\sigma}^2(\lambda_1, \lambda_2)) + Enp(\lambda_1, \lambda_2) C_N \tag{24}$$

$$\text{其中, } \hat{\sigma}^2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sum_{i=1}^N (p_i - \hat{P}_i(\beta^*(\lambda_1, \lambda_2)))^2}{N - Enp(\lambda_1, \lambda_2)},$$

$\ln(\cdot)$  为自然对数函数.

而  $C_N$  满足  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_N}{N} = 0, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_N}{\ln(\ln(N))} = \infty$ . 一般

说来,  $C_N$  在满足上述约束条件下, 其数量级别越高越好, 本文在实证时对  $C_N$  采用 Bai Krishnaiah 和 Zhao 推荐的形式, 即

$$C_N = \frac{0.2N}{\ln(N)} \tag{25}$$

最后, 根据 ITC 准则, 使  $ITC(\lambda_1, \lambda_2, C_N)$  达到最小值的  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  即为  $\lambda_1, \lambda_2$  的最优估计值.

### 3 实证结果分析

#### 3.1 实证样本数据和指标公式说明

目前, 中国国债市场主要由证券交易所国债市场、银行间债券市场以及商业银行柜台国债市场组成, 其中证券交易所国债市场又以上交所国债交易市场为主。由于银行间债券市场的做市商制度还不够成熟, 其投资主体仍以买入并持有到期的交易策略为主, 因此, 相对于银行间债券市场巨大的托管量, 其国债现券流动性仍较低; 商业银行柜台国债市场由于交易的国债品种较少, 交易清淡, 其国债交易价格对市场利率的敏感性不强; 而上交所国债交易以自动撮合交易方式为主, 交易主体以对市场利率较为敏感的证券公司、基金管理公司等机构投资者为主, 国债现券交易较为活跃, 其形成的利率期限结构更能反映出市场的即期及远期利率走势。因此, 本文选取了上交所国债市场 2002 年 1 月 1 日至 2003 年 12 月 31 日每个交易日的国债收盘价格作为实证研究样本<sup>⑤</sup>。由于部分国债在样本观测期间是陆续挂牌上市交易的, 因此, 用来估计利率期限结构的每天国债数目可能不相等。在本文的研究样本中, 每天的国债数目从样本初期的 9 支增加到样本后期的 19 支。

本文实证研究的估计模型包括利率期限结构样条拟合方法中三个比较常用的模型 (即 McCulloch 模型、FNZ 模型和 Waggoner 模型) 以及笔者根据中国国债市场现状而提出的可变粗糙度惩罚项平滑样条改进模型 (以下简称 I-VRP 模型)。由于四个模型的直接拟合对象不相同, 为此, 本文在评价这四个模型对中国利率期限结构拟合估计的效果差异时, 是先利用这些模型各自拟合出静态利率期限结构, 进而估计出样本期间

内国债的理论价格, 最后统一集中到对国债价格的估计误差分析上, 并从样本内和样本外两个角度来考察样本期间内这四个模型的拟合性能。其中, 样本内评价指标采用价格绝对误差平均 (MAPE) 和价格均方根误差 (RMSE), 这两个指标分别定义如下:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |P_i - \hat{P}_i| \quad (26)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2}{N}} \quad (27)$$

由于交易所国债上市交易的品种还不是很多, 如果采用一般意义上的样本外预测评价方法, 则用来估计模型参数的样本量就会更少, 势必产生较大的模型估计误差, 因此, 本文的样本外评价方法采用了 Davison 和 Hinkley<sup>[22]</sup> 提出的“漏一交叉验证” (Leave one out cross-validation, 简称 CV) 指标<sup>⑥</sup>。

#### 3.2 四个样条模型的拟合优度比较

本节首先考察利用 McCulloch 模型、FNZ 模型、Waggoner 模型以及 I-VRP 模型估计中国静态利率期限结构的拟合性能。其中, 前三个模型对应的各项性能指标是利用式 (5)、式 (7) 至式 (11)、式 (26) 和 (27) 以及 CV 指标计算原理来求得的; 而在考察 I-VRP 模型时, 首先是利用式 (23)、(24) 和 (25) 获得粗糙度惩罚项  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的最优估计值, 然后采用式 (13) 至式 (21) 估计该模型的参数向量值  $\beta$ , 最后利用式 (26) 和 (27) 以及 CV 指标计算方法来获得 I-VRP 模型对应的各项拟合性能指标值。本节实证样本数据不包括回购数据。

最终, 笔者得到了利用这四个样条模型拟合上交所静态利率期限结构的样本内与样本外各项性能评价指标值, 其统计特征如下表所示<sup>⑦</sup>。

⑤ 本文实证研究的数据来源于证券之星网站, 网址为: <http://www.stockstar.com/home.htm>, 而且价格全都调整为全价收盘价格。另外, 由于浮动利率国债未来的现金流具有不确定性, 因而本文的实证研究样本剔除了两个浮动利率国债品种 (其交易代码分别为 010004 和 010010)。

⑥ 由于篇幅有限, 其具体计算方法详见 Davison 和 Hinkley<sup>[22]</sup> 著作的介绍。

⑦ 本文的实证研究计算部分主要是利用 Matlab 6.5.1 软件进行, 而作图部分主要采用 Microsoft Excel 2002。

表 1 四个模型样本内与样本外拟合性能指标的统计特征值

Table 1 Statistical result of fitting indexes for four models in and out of sample

模 型	指标值				
	最小值	最大值	均值	中位数	标准差
样本内指标: MAPE					
M cCulloch模型	0.466 0	1.754 5	0.943 7	0.867 1	0.354 2
FNZ模型	0.317 7	0.943 6	0.660 4	0.643 0	0.135 8
W aggoner模型	0.392 1	1.008 3	0.709 1	0.686 3	0.153 8
I- V RP模型	0.255 2	0.835 7	0.474 9	0.457 6	0.117 9
样本内指标: RM SPE					
M cCulloch模型	0.505 2	2.020 8	1.192 2	1.132 1	0.494 8
FNZ模型	0.387 0	1.526 2	0.749 8	0.758 0	0.160 1
W aggoner模型	0.477 1	1.745 5	0.967 5	0.978 7	0.195 2
I- V RP模型	0.375 0	1.053 1	0.636 6	0.654 1	0.137 3
样本外指标: CV					
M cCulloch模型	0.637 1	1.895 5	1.349 7	1.343 0	0.248 2
FNZ模型	0.509 3	0.987 5	0.805 9	0.763 1	0.120 7
W aggoner模型	0.491 7	0.923 4	0.784 8	0.710 6	0.115 3
I- V RP模型	0.412 2	0.809 6	0.697 9	0.678 4	0.106 1

由上表可看出:

1) I- V RP模型无论是从样本内的 MAPE和 RM SPE指标, 还是从样本外的 CV 指标看, 其统计特征值均优于其他三个模型. 相反地, M cCulloch模型的拟合性能均劣于其他模型;

2) 从样本内角度看, FNZ模型的拟合优度要好于 W aggoner模型, 而后者样本外拟合评价指标的统计特征值要强于前者. 由此可见, 这两个模型在估计中国利率期限结构时并没有各自的绝对优势;

3) 分析 CV和 MAPE指标的统计特征值可看出, 所有模型的样本外估计误差均大于其样本内拟合误差, 但其估计误差的稳定性较强.

### 3.3 四个样条模型估计的利率期限结构图比较

接着, 本文从样本期间内任意选定了日期(即 2003年 12月 30日), 并结合上面 3.2小节所获得的四个样条模型各自的参数估计值, 分别利用这四个样条模型来拟合上交所国债市场该天的利率期限结构(由即期利率曲线和远期瞬间利率曲线来表示). 同样地, 本节实证样本数据不包

括回购数据. 最终的拟合结果如图 1所示.

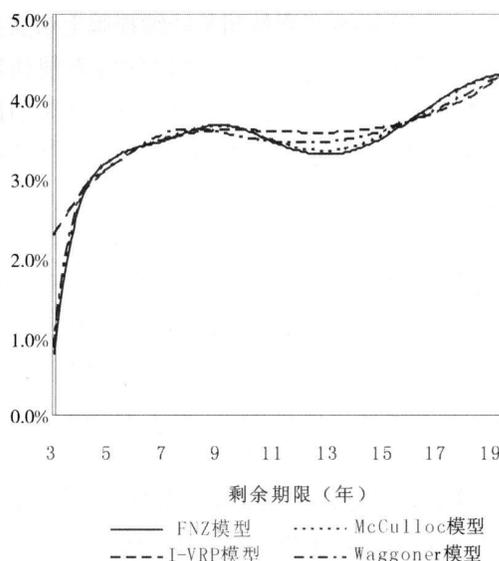


图 1 即期利率曲线

Fig. 1 Spot rate curve

从图 1可看出, M cCulloch模型、FNZ模型和 W aggoner模型所拟合的期限在 3年左右的即期利率均小于 2.0%, 而期限大约在 2.5年的即期利率甚至低于 1.0%, 这与现实是不符合的; I- V RP

模型估计的短期限即期利率明显要合理得多, 这可能得益于 I-VRP 模型引入了以久期导数为基础的权重. 在中长期部分, 这四个模型均表现出类似的拟合性能. 同时, 由图 2 可看出, McCulloch 模型和 FNZ 模型估计的远期瞬间利率曲线均呈现出明显的振荡状态, 而 Waggoner 模型只在短期部分出现较大的振荡, 在这一方面, I-VRP 的表现相对较好.

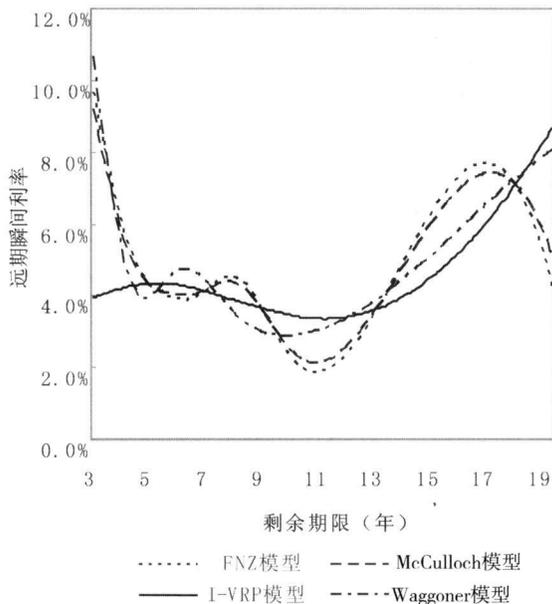


图 2 远期瞬间利率曲线

Fig. 2 Instantaneous forward rate curve

综合以上表 1、图 1 和图 2 可看出, 相对于 McCulloch 模型、FNZ 模型和 Waggoner 模型, I-VRP 模型能更准确地拟合中国的静态利率期限结构.

### 3.4 I-VRP 模型估计上交所利率期限结构的进一步考察

鉴于 I-VRP 模型在拟合上交所静态利率期限结构方面的优良性能, 本文接着利用该模型来考察引入国债回购利率数据对构造利率期限结构的影响. 我们知道, 由于中国缺乏 1 年期以下的国债品种, 因而构造出的利率期限结构还不完整<sup>⑧</sup>. 由此, 本文引进上交所 7 天、14 天和 28 天三个国债回购品种的利率, 并以该利率构造相应期限的

零息票债券<sup>⑨</sup>, 以此作为短期国债的合理数据替代源. 在引入三个国债回购品种的利率数据后, 本文利用 I-VRP 模型并根据式 (21)、(22)、(23)、(24) 和 (25) 拟合了 2003 年 12 月 1 日上交所国债市场较为完整的利率期限结构, 如图 3 所示:

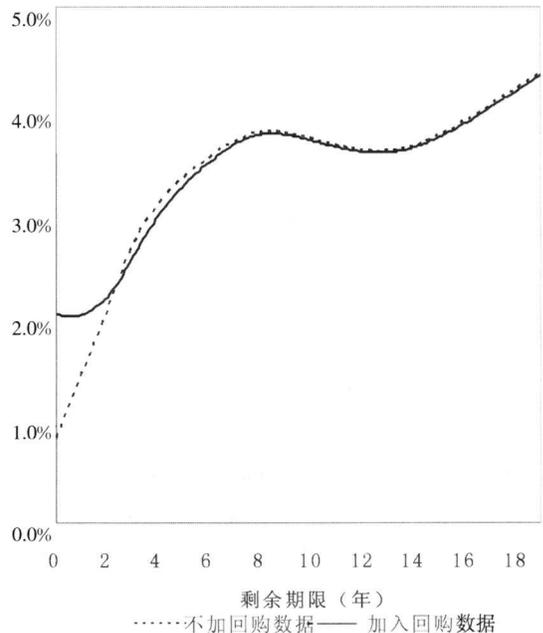


图 3 2003 年 12 月 1 日上交所国债即期利率曲线

Fig. 3 Spot rate curve of SSE treasury security market on 2003 12 1

由图 3 可知, 没加入回购数据所构造的即期利率曲线其期限在大约 3 年以下的部分, 各即期利率呈现显著的线性关系; 而加入国债回购利率数据后构建的利率期限结构其短期部分既平滑又十分合理. 此外, 从图 3 也可以看出, 不管是否加入国债回购数据, 其拟合的即期利率曲线在中长期部分几乎重合, 证明了利用三次平滑样条法构造利率期限结构时不会因为某部分数据出现异常变动而对整个利率期限结构产生扭曲作用, 具有较好的稳定性能.

## 4 结 论

本文结合国外估计利率期限结构业已成熟的

⑧ 可参见上面的图 1 和图 2

⑨ 所构造的零息票债券面值为 100 元, 其相应的“市场价格”是通过把国债回购的单利率转化为连续复合利率后再利用式 (5) 来计算的.

样条方法和中国国债市场的发展现状,在 FNZ 模型和 W aggoner 模型的基础上提出了可变粗糙度惩罚项三次平滑样条模型(即 I-VRP 模型).在理论方面, I-VRP 模型优化了模型拟合对象,利用具有强相合性统计优点的 ITC 准则来估计形式为二阶梯函数的粗糙度惩罚项,并引入以久期

倒数为基础的加权重数.在实证方面,利用 I-VRP 模型估计上交所利率期限结构时,无论是从样本内还是样本外考察均比 FNZ 模型和 W aggoner 模型有了较大程度的改进.可见, I-VRP 模型能够较为有效、准确地拟合我国的静态利率期限结构,具有较强的应用价值.

## 参 考 文 献:

- [1] Nelson C R, Siegel A F. Parsimonious modeling of yield curves[J]. Journal of Business, 1987, 60(4): 473—489.
- [2] Svensson L. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates—Sweden 1992—94[R]. Washington: International Monetary Fund, 1994. 1—13.
- [3] Svensson L. Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method[J]. Sveriges Riksbank Quarterly Review, 1995, 3(1): 13—26.
- [4] Fama E F, Bliss R R. The information in long-maturity forward rates[J]. American Economic Review, 1987, 77(4): 680—692.
- [5] McCulloch J H. Measuring the term structure of interest rates[J]. Journal of Business, 1971, 44(1): 19—31.
- [6] McCulloch J H. The tax-adjusted yield curve[J]. Journal of Finance, 1975, 30(3): 811—830.
- [7] Vasicek O A, Fong H G. Term structure modeling using exponential splines[J]. Journal of Finance, 1982, 37(2): 339—356.
- [8] Shea G S. Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: Equilibrium models and spline approximations[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1984, 19(3): 253—269.
- [9] Fisher M, Nychka D, Zervos D. Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines[R]. Washington: Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board, 1995. 1—15.
- [10] Bliss R R. Testing term structure estimation methods[J]. Advances in Futures and Options Research, 1997, 9(1): 197—231.
- [11] W aggoner D. Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices[R]. Georgia: Federal Reserve Bank of Atlanta, 1997. 1—10.
- [12] 姚长辉, 梁跃军. 我国国债收益率曲线的实证研究[J]. 金融研究, 1998, 19(8): 12—18.  
Yao Changhui, Liang Yuejun. Empirical research on yield curve of Chinese government bonds[J]. Financial Research Journal, 1998, 19(8): 12—18. (in Chinese)
- [13] 杨大楷, 王欢. 关于我国国债收益率曲线的再研究[J]. 扬州大学税务学院学报, 1999, 4(3): 50—54.  
Yang Dakai, Wang Huan. More research on yield curve of Chinese treasury security market[J]. Journal of Taxation College of Yangzhou University, 1999, 4(3): 50—54. (in Chinese)
- [14] 陈雯, 陈浪南. 国债利率期限结构: 建模和实证[J]. 世界经济, 2000, 23(8): 24—28.  
Chen Wen, Chen Langnan. Interest rate term structure of treasury security: Modeling and empirical analysis[J]. World Economy, 2000, 23(8): 24—28. (in Chinese)
- [15] 杨春鹏, 曹兴华. 我国国债收益率曲线的构造与实证研究[J]. 投资与证券, 2002, 12(10): 80—82.  
Yang Chunpeng, Cao Xinghua. Constructing and analyzing empirically yield curve of Chinese treasury security market[J]. Investment and Security, 2002, 12(10): 80—82. (in Chinese)
- [16] 赵宇龄. 中国国债收益率曲线构造的比较分析[J]. 上海金融, 2003, 24(9): 29—31.  
Zhao Yuling. Comparative analysis on constructing yield curve of Chinese treasury security market[J]. Shanghai Finance

- 2003, 24(9): 29—31. (in Chinese)
- [17] 郑振龙, 林海. 中国市场利率期限结构的静态估计[J]. 武汉金融, 2003, 4(3): 33—36  
Zheng Zhenlong Lin Hai. Static estimation of Chinese term structure[J]. Wuhan Finance Monthly, 2003, 4(3): 33—36 (in Chinese)
- [18] 刘 灿, 易 璐. 深沪两市国债收益率期限结构的实证研究—B样条函数法[J]. 证券市场导报, 2004, 14(2): 36—41.  
Liu Chan, Yi Lu. Empirical analysis on interest rate term structure of treasury security markets in SZSE and SSE—B spline function method[J]. Securities Market Herald, 2004, 14(2): 36—41 (in Chinese)
- [19] Bai Z D, Krishnaiah P R, Zhao L C. On rates of convergence of efficient detection criteria in signal processing with white noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1989, 35(2): 380—388
- [20] Simonoff J S. Smoothing Methods in Statistics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000: 118—239.
- [21] Chow G C. Econometrics[M]. New York: McGraw-Hill, 1983: 121—248
- [22] Davison A C, Hinkley D V. Bootstrap Methods and Their Applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997: 250—342

## Research on improving smoothing spline method to fit China's term structure of interest rates

HU Hai-peng, FANG Zhao-ben

Department of Statistics and Finance, Management School of University of Science & Technology of China  
Hefei 230026, China

**Abstract** This paper considering the current situation of the treasury security market in China improves the FNZ model and Waggoner model from five aspects: the fitted object, the function in describing the roughness penalty, the method of estimating parameters, the optimal function and the sample. Then, we propose to approximate China's term structure of interest rates with the improved variable roughness penalty cubic smoothing spline approach. Also, this paper carries out an empirical work with the daily treasury security close prices data which are extracted from the SSE treasury security market. Finally, both the in-sample and out-of-sample results indicate the improved model can reasonably fit the relatively integrated static term structure of interest rates in China.

**Key words** static term structure of interest rates; spot rate; instantaneous forward rate; cubic smoothing splines; information theoretic criteria