第 12卷第 1期
2009年 2月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol 12 No. 1
Feb. 2009

最优保险投资决策①

郭文旌[1,2], 李心丹[2]
(1. 南京财经大学金融学院, 南京 210046; 2. 南京大学工程管理学院, 南京 210093)

摘要: 2005年初我国对保险公司直接进入资本市场进行投资开始放开. 如何选择最佳的投资策略就成为目前保险公司所面临的难题,而传统的投资模型的诸多不足使得它在实际应用中有很大局限性. 讨论的模型克服了传统模型的不足. 在该模型中,索赔是一个复合 Poisson过程,保险公司可选择与投资期内的安全要求相一致的投资比例. 应用最优控制原理求解模型得到了最优投资策略以及有效边界的解析形式,并讨论了承保收益和承保风险对投资策略与有效边界的影响.

关键词: 最优投资策略; 承保收益; 承保风险; 有效边界
中图分类号: F840 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2009)01 - 0118 - 07

0 引 言

随着商业保险公司保费收入不断增加,累积的保险资金越来越多. 到 2007年底,我国保险业总资产已突破 3万亿元. 而保险公司运作保险资金的最佳途径就是投资. 但是过去我国对保险公司的投资有严格的限制,只允许投资债券、基金等,不允许保险公司直接进入股票市场投资. 这些限制一方面减少保险公司面对的风险,但另一方面也造成了大量资金积压的不良状态. 2005年 2月 17日,中国保监会与中国银监会联合下发了《关于保险资金股票投资有关问题的通知》,揭开了保险公司直接进入股票市场投资的序幕. 这对保险公司而言无疑是个好消息,但是如何选择投资策略又成为了它们目前所面临的重要问题. 若选择得好,投资可以给保险公司带来丰厚的收益; 如果选择不好,不但不能从投资中取得收益,还可能加快公司破产的步伐.

关于保险公司如何选择投资策略的问题, Krous[1]、Kahane[2]、Briys[3]、Browne[4]、Hipp 与 Plum[5,6]、Yang与 Zhang[7]、荣喜民[8~11]等在这方面做了一系列工作. 总体而言,现有文献主要应用到两个准则: 一是最大化效用准则,如 Krous[1]、Kahane[2]、Briys[3]、Browne[4]、Yang 与 Zhang[7]、荣喜民[8,10,11]; 二是最小化破产概率准则,如 Hipp与 Plum[5,6]. 后者由于模型求解很困难,结论实用性不强,所以后续研究很少. 而利用效用准则的研究近几年越来越多. 关于这一问题的前期研究,如 Krous[1]、Kahane[2]、Briys[3]等,主要存在以下几个不足: (1)没有考虑承保风险; (2)只考虑了保费收取与赔付间时滞的投资,也就是说在投资期间不能有收取保费和赔付发生; (3)投资策略与保险公司的保费收取率以及赔付过程(包括赔付到来的强度以及每次赔付量)没有关系,这显然不符合实际情况. 荣喜民等[8~11]在[1~3]基础上考虑了承保风险. Browne[4]、Yang与 Zhang[7]将问题推广到连续时间情形,考虑了承保风险,同时也考虑了索赔到来的随机性,但是仍然未能解决第三个不足.

本文研究了保险公司一个时间段的投资问

① 收稿日期: 2005 - 08 - 16; 修订日期: 2008 - 10 - 06.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70671053); 江苏省教育厅高等学校哲学社会科学项目(07SJB790013); 中国博士后基金资助项目(20080431079); 江苏省博士后基金资助项目(0801034C); 南京财经大学支撑项目(2007ZC013).
作者简介: 郭文旌(1971—),男,湖南新宁人,博士,副教授. Email: guowenjing1971@163.com

题,在投资期内,保险公司既收取保费,又承担可能到来的索赔,而且承保收益是个随机过程.得到了保险公司的最优投资策略和有效边界解析形式,得到的最优投资策略和有效边界都与保费收取率以及赔付过程都有关系,克服了已有文献的不足.并讨论了最优策略以及有效边界与预定收益、安全负载、风险态度和承保风险之间的动态关系.

1　模型的建立

设资本市场上可供选择的证券有 $n+1$种,其中一种无风险证券,它的价格过程满足如下微分方程

$$\mathrm{d}p_0(t) = rp_0(t)\mathrm{d}t,\quad t\in[0,T]$$

其中:r为无风险利率.其余为 n种风险证券,它们的价格过程 $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)$ 分别满足下面随机微分方程

$$\mathrm{d}p_i(t) = p_i(t)\Big[\mu_i \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\mathrm{d}B_j^{(1)}(t)\Big],\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中:μ_i为第 i种证券瞬时条件期望收益率,σ_{ij}, $i, j\in\{1,2,\cdots,n\}$为第 i种证券瞬时条件风险(方差),$B_j^{(1)}(t)$为标准布朗运动. r, μ_i, σ_{ij}, $i, j=1,2,\cdots,n$均为常值.令

$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$, $\sigma=(\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\mathrm{B}^{(1)}(t)=(B_1^{(1)}(t), B_2^{(1)}(t),\cdots,B_n^{(1)}(t))^{\mathrm{T}}$其中上标“T”表示矩阵或向量的转置.假定对某个 $\delta>0$, σ满足

$$\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\geq\delta\mathrm{I}$$

其中:I为 n阶单位矩阵.

与一般投资者[12,13]不同,保险公司一般不允许将所有保费用于风险投资,因为在投资期一旦发生大额索赔,公司非常有可能面临破产.设保险公司初始资本为 w_0,为了减少破产的风险,保险公司将初始资本分为两部分:一部分用于投资,所占比例为 θ,留存部分 $(1-\theta)w_0$应对可能到来的索赔.事实上,我国对保险公司直接进入资本市场进行风险投资的投资比例就有一定限制,《关于保险资金股票投资有关问题的通知》明确规定保险公司当年的风险投资比例的上限为其上一年度总资产的 5%.因此保险公司的财富 $w(t)$ 可以认为是由以下两部分构成

一部分是留存资本加上收取的保费再减去赔付的所得,记为 $\hat{w}(t)$.本文假定索赔满足复合 Poisson过程,则 $\hat{w}(t)$ 满足如下等式

$$\hat{w}(t) = (1-\theta)w_0 + at - \sum_{k=1}^{N(t)}x_k \tag{1}$$

其中:a为保险公司单位时间收取的保费,x_k $(k\geq1)$ 表示第 k次索赔额,$\{x_k\}_{k\geq1}$ 为独立同分布序列,$N(t)$表示至时刻 t为止发生的索赔次数,这里假定 $\{N(t), t\geq0\}$ 是以 $\lambda(\lambda>0)$ 为参数的 Poisson过程.令

$$\phi(s,w_0) = P(\inf\{t: w(t)<0\}<s \mid w(0)=w_0)$$

$$\phi(w_0) = \lim_{s\to\infty}\phi(s,w_0)$$

$\phi(s,w_0)$称为初始财富为 w_0条件下 s时刻前破产的概率,$\phi(w_0)$称为初始财富为 w_0条件下的终极破产的概率.

据文献[4], $\hat{w}(t)$近似于一个扩散过程,即式(1)近似满足下面随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\hat{w}(t) = \alpha\mathrm{d}t + \beta\mathrm{d}B^{(2)}(t)\\ \hat{w}(0) = (1-\theta)w_0\end{cases} \tag{2}$$

其中:α、β为常值,且 $\beta>0$, $B^{(2)}(t)$为标准 Brown运动,α、β、a、λ以及 x_1有下面近似等式成立.

$$\alpha = a - \lambda\mathrm{E}(x_1),\quad \beta^2 = \lambda\mathrm{E}(x_1^2) \tag{3}$$

其中:参数 α就是保险公司的相对安全负载,α越大,表明保险公司破产的可能性越小,也就是越安全;参数 β描述了承保的风险程度,β越大,表明承保风险越大.

另一部分是投资收益,记为 $w(t)$,若记 $\pi_i(t)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$为保险公司在第 i个证券上的投资量,则有

$$\begin{cases}\mathrm{d}w(t) = \Big(\theta w(t) - \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\Big)\dfrac{\mathrm{d}p_0(t)}{p_0(t)} + \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\dfrac{\mathrm{d}p_i(t)}{p_i(t)}\\ \qquad = [\theta w(t)r + \pi^{\mathrm{T}}(t)(\mu - r\mathbf{1}_n)]\mathrm{d}t + \pi^{\mathrm{T}}(t)\sigma\mathrm{d}\mathrm{B}^{(1)}(t)\\ w(0) = \theta w_0\end{cases} \tag{4}$$

其中:$\pi(t) = (\pi_1(t),\cdots,\pi_n(t))^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{1}_n$为分量全为 1的 n维列向量. $B_i^{(2)}$与 $\mathrm{B}^{(1)}(t)$相关,相关系数为 ρ_i,即 $\mathrm{E}[B^{(2)}(t)B_i^{(1)}(t)] = \rho_i t$, $i=1,2,\cdots,n$.

令 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)^{\mathrm{T}}$.

由式 (1) 和 (4) 可知,财富过程 $w(t)$, $t \in [0, T]$,满足下面微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}w(t) = \mathrm{d}(\hat{w}(t) + w(t)) \\ \qquad = [\theta w(t) r + \pi^{\mathrm{T}}(t)(\mu - r\mathbf{1}_n) + \alpha]\mathrm{d}t + \\ \qquad \pi^{\mathrm{T}}(t)\sigma \mathrm{d}B^{(1)}(t) + \beta \mathrm{d}B^{(2)}(t) \\ w(0) = w_0 \end{cases} \tag{5}$$

设一个投资周期的时间跨度为 $[0, T]$,为了保证在这个跨度内减少保险公司破产的可能,保险公司的留存财富需要满足一定条件,本文不妨假定保险公司投资资金占总资金的比例满足

$$\theta \leq 1 + \frac{\ln p_0}{\eta w_0} \tag{6}$$

其中:η为调节系数,p_0为保险公司希望的破产概率上界.事实上,由 Lundberg[14] 不等式得

$$w(T, w_0) < \phi(w_0) \leq \mathrm{e}^{-\eta(1-\theta)w_0} \leq p_0$$

保险公司的目标是在实现终止时间 T时的预期财富水平的情况下使得风险(投资风险与承保风险)最小,因此可以建立模型如下

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi(\cdot)} \mathrm{Var}\, w(T) \\ \mathrm{s.t.}\quad \mathrm{E}w(T) = b \end{cases} \tag{7}$$

其中:b为保险公司终期预期的财富水平.由文献[15](2.7),式(7)等价于下面二次控制问题

$$\min_{\pi(\cdot)} \mathrm{E}[\frac{1}{2} y(T)^2] \tag{8}$$

其中:$y(\cdot) = w(\cdot) - (b - \gamma)$,参数 γ表示保险公司的风险偏好系数,γ越大表明该保险公司越厌恶风险.那么 $y(\cdot)$满足如下微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}y(t) = [\theta r y(t) + \pi^{\mathrm{T}}(t)(\mu - r\mathbf{1}_n) + \\ \qquad \theta r(b - \gamma) + \alpha]\mathrm{d}t + \pi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}B^{(1)}(t) + \\ \qquad \beta \mathrm{d}B^{(2)}(t) \\ y(0) = y = w_0 - (b - \gamma) \end{cases} \tag{9}$$

令

$$V(t, y) = E_t[\frac{1}{2} y^{*}(T)] \tag{10}$$

其中:$y^{*}(\cdot)$为最优投资策略 $\pi^{*}(\cdot)$所对应的式(9)的解,E_t表示起始时间为 t的条件期望算子,显然 $V(0, y) = \min\limits_{\pi(\cdot)} \mathrm{E}[\frac{1}{2} y(T)^2]$.

2 最优投资策略

本节应用随机控制的方法求解模型来得到保险公司的最优投资策略 $\pi^{*}(\cdot)$的解析形式.

式(10)对应的 HJB方程为

$$0 = V_t + \min_{\pi(\cdot)}\{V_y[\theta r y(t) + \pi^{\mathrm{T}}(t)(\mu - r\mathbf{1}_n) + \theta r(b - \gamma) + \alpha] + \frac{1}{2}V_{yy}[\beta^2 + \pi^{\mathrm{T}}(t)\Sigma\pi(t) + 2\beta\pi^{\mathrm{T}}(t)\sigma\rho]\} \tag{11}$$

其中,$\Sigma = \sigma\sigma^{\mathrm{T}}$, $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$.终止条件为 $V(T, y) = \frac{1}{2}y^2$.

猜想式(11)的解具有如下形式

$$V(t, y) = \frac{1}{2}p(t)y^2 + q(t)y + e(t) \tag{12}$$

将式(12)代入式(11)计算整理得

$$[A(t)y^2 + B(t)y + C(t)] + \frac{1}{2}p(t) \times \min_{\pi(\cdot)}\{[\pi(t) + \Sigma^{-1}\mathrm{D}(t)]^{\mathrm{T}}\Sigma[\pi(t) + \Sigma^{-1}\mathrm{D}(t)]\} = 0 \tag{13}$$

其中

$$A(t) = \frac{1}{2}\dot{p}(t) + [\theta r - \frac{1}{2}(\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n)]p(t)$$

$$B(t) = \dot{q}(t) + [\theta r - (\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n)]q(t) + [\theta r(b - \gamma) + \alpha - \beta(\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho]p(t)$$

$$C(t) = \dot{e}(t) + \frac{1}{2}\beta^2(1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho)p(t) + [\theta r(b - \gamma) + \alpha - \beta(\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho] \times q(t) - \frac{1}{2}(\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n)\frac{q(t)^2}{p(t)}$$

$$\mathrm{D}(t) = \beta\sigma\rho + (y + \frac{q(t)}{p(t)})(\mu - r\mathbf{1}_n)$$

$\dot{p}(t)$, $\dot{q}(t)$, $\dot{e}(t)$分别表示函数 $p(t)$, $q(t)$, $e(t)$的一阶导数.容易验证关于函数 $p(t)$, $q(t)$, $e(t)$且满足终止条件的如下一阶常微分方程

$$\begin{cases} A(t) = 0 \\ p(T) = 1 \end{cases}, \begin{cases} B(t) = 0 \\ q(T) = 0 \end{cases}, \begin{cases} C(t) = 0 \\ e(T) = 0 \end{cases}$$

存在而且有惟一解.由文献[16]Ⅳ定理 5.1可知,问题(8)的最优控制为

$$\pi^*(t) = -\Sigma^{-1}\left[\beta\sigma\rho + \left(y + \frac{q(t)}{p(t)}\right)(\mu - r\mathbf{1}_n)\right] \tag{14}$$

为了得到最优控制的解析形式,需要得到 $\frac{q(t)}{p(t)}$ 的表达式,令 $h(t) = \frac{q(t)}{p(t)}$,容易解得

$$h(t) = \frac{G}{\theta_r}\left(1 - e^{-\theta_r(T-t)}\right)$$

其中: $G = \theta_r(b - \gamma) + \alpha - \beta(\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho$. 综上讨论,将 y 换回 $w - (b - \gamma)$,于是得到下面结论.

结论 1 如果保险公司预期终止财富的目标值为 b,那么该公司最优投资策略为

$$\pi^*(t) = -\Sigma^{-1}\left[\beta\sigma\rho + \left(w(t) - b + \gamma + \frac{G}{\theta_r}\left(1 - e^{-\theta_r(T-t)}\right)\right)(\mu - r\mathbf{1}_n)\right] \tag{15}$$

文献[15](5.12)给出的是一般投资者的最优投资策略,从(5.12)来看最优投资策略主要决定于投资者的风险偏好以及初始财富. 而从式(15)可以看出,与(5.12)相比较,保险公司的投资决策相对要复杂得多,它的投资决策不仅决定于投资者的风险偏好、初始财富还决定于保费的收取额、索赔的风险还有索赔风险与股票市场的风险的相关程度等. 下面讨论保险公司最优投资决策与其决定因素之间的关系,找出它们之间的关系以便于保险公司在投资条件变化的情况下更好的调整自己的投资策略.

令

$$\Sigma^{-1} = (a_{ij})_{n\times n},\quad f(t) = \sigma\rho - \frac{1}{\theta_r}\left(1 - e^{-\theta_r(T-t)}\right) \times (\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho(\mu - r\mathbf{1}_n).$$

将 π^* 分别对 b, γ, α, β 求偏导数容易得到下面结论.

结论 2 在假定 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ 条件下,最优投资策略有下面性质

(i) 保险公司预期终止财富的目标值越大,风险投资越多;

(ii) 保险公司对风险的厌恶程度越大,风险投资越少;

(iii) 保险公司的安全负载越大,风险投资越少;

(iv) 当 $f(t) > 0$ 时,保险公司的理赔风险越大,风险投资越少;当 $f(t) < 0$,保险公司的理赔风险越大,风险投资越多.

3 有效边界

定义 $\left(\sqrt{\mathrm{Var}\,w^*(T)},\ \mathrm{E}w^*(T)\right)$ 称为一个有效点,若 $w^*(t)$ 表示问题(7)的最优投资策略通过式(5)所对应的财富过程. 所有有效点的集合称为有效边界.

下面将导出有效边界的表达形式.

将式(15)代入(5)并两边取期望得

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathrm{E}w(t) = \Big[(\theta_r - L)\mathrm{E}w(t) - \beta\rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n) - \left(\gamma - b + \frac{G}{\theta_r}\left(1 - e^{-\theta_r(T-t)}\right)\right) \times L + \alpha\Big]\mathrm{d}t \\ w(0) = w_0 \end{cases} \tag{16}$$

其中: $L = (\mu - r\mathbf{1}_n)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n)$. 解这个方程得

$$\mathrm{E}w(T) = M\gamma + N \tag{17}$$

其中: $M = 1 - e^{LT}$, $N = \frac{1}{\theta_r}\left(\alpha - \beta\rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n)\right)\left(e^{\theta_r T} - 1\right) + w_0 e^{\theta_r T}$

对 $w(t)^2$ 应用 Ito 公式并两边求期望得

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathrm{E}w(t)^2 = \Big\{(2\theta_r - L)\mathrm{E}w(t)^2 + 2\left[\alpha - \beta \times \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n)\right]\mathrm{E}w(t) + \beta^2\left(1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho\right) + \left[\left(\gamma - b + \frac{G}{\theta_r}\left(1 - e^{-\theta_r(T-t)}\right)\right)\right]^2 L\Big\}\mathrm{d}t \\ w(0)^2 = w_0^2 \end{cases}$$

解此方程,经过复杂的计算可得

$$\mathrm{E}w(T)^2 = X\gamma^2 + 2Y\gamma + Z \tag{18}$$

其中: $X = e^{2LT} - e^{LT}$, $Y = MN$, $Z = N^2 + \beta^2\left(1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho\right)\left(e^{(2\theta_r - L)T} - 1\right)$

于是最终财富 $w(T)$ 的方差为

$$\mathrm{Var}\,w(T) = \left(e^{LT} - 1\right)\gamma^2 + \beta^2\left(1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho\right)\left(e^{(2\theta_r - L)T} - 1\right) \tag{19}$$

由式(17)解得

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}w(T) - N}{M} \tag{20}$$

将式(20)代入式(19)得

$$\mathrm{Var}w(T) = \frac{1}{e^{LT}-1}(\mathrm{E}w(T) - N)^2 + \beta^2 (1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho)(e^{(2\theta r - L)T} - 1) \quad (21)$$

结论 4 保险公司投资决策模型(7)的有效边界由式(21)给出,它是双曲线的右半支位于直线 l：

$$\mathrm{E}w(T) = \frac{1}{\theta r}(\alpha - \beta\rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n))(e^{\theta r T} - 1) + w_0 e^{\theta r T}$$

以上部分(如图1).

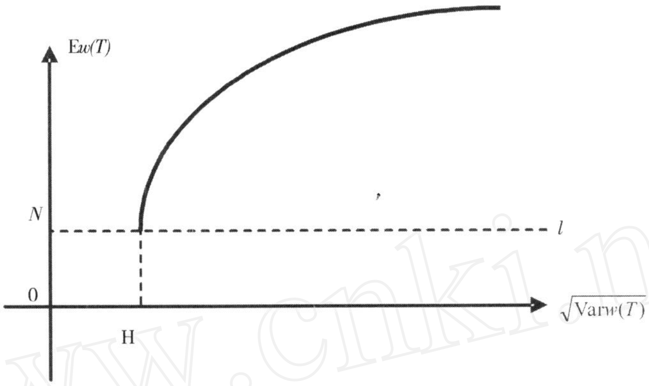

图 1 保险公司投资有效边界(其中 $H = \beta\sqrt{(1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho)(e^{(2\theta r - L)T} - 1)}$)

Fig 1 The investment efficicent frontier of insurer(where $H = \beta\sqrt{(1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho)(e^{(2\theta r - L)T} - 1)}$)

注:容易看出,有效边界与保险公司的承保收益以及承保风险都有关系.因此不同承保收益或不同承保风险的保险公司,它们投资的有效边界并不相同.可以将 N、H分别看作是 α, β的函数,分别就 N、H分别对 α, β求偏导数得

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = \frac{1}{\theta r}(e^{\theta r T} - 1) > 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = -\frac{1}{\theta r}\rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_n)(e^{\theta r T} - 1),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = \sqrt{(1 - \rho^{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\sigma\rho)(e^{(2\theta r - L)T} - 1)} > 0,$$

于是有下面结论.

结论 5 随着承保收益增大,有效边界向上漂移(如图 2).在 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$假定下,又有

1) 有下列情形之一,有效边界随着承保风险增大而向右下上方漂移.

(i) 所有股票都正相关且所有股票风险与承保风险正相关;

(ii) 所有股票都负相关且所有股票风险与承保风险负相关;

2) 有下列情形之一,有效边界随着承保风险增大而向右上方漂移(如图 3).

(i) 所有股票都负相关且所有股票风险与承保风险正相关;

(ii) 所有股票都正相关且所有股票风险与承保风险负相关;

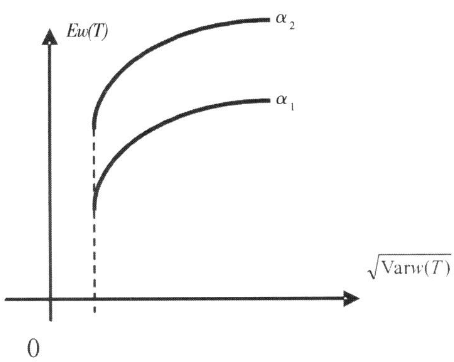

图 2 有效边界随承保收益变化图($\alpha_2 > \alpha_1$)

Fig. 2 The variance of efficient frontier with underwriting return ($\alpha_2 > \alpha_1$)

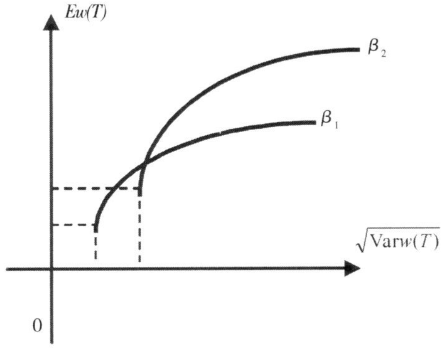

图 3 有效边界随承保风险的变化图($\beta_2 > \beta_1$)

Fig. 3 The variance of efficient frontier with undewriting risk ($\beta_2 > \beta_1$)

4 数据模拟

假设证券市场可供投资选择的证券有 3种:一种债券,利率为 20%,另外两种分别是股票 A、B,它们的各项指标如下表 1

表 1 股票 A、B的收益、风险及其相关关系

Table 1 Returns and risks of stock A, B and their correlation

股票名称	收益率 (μ_i)	风险 (σ_{ii})	协方差 (σ_{AB})
A	$\mu_A = 80\%$	$\sigma_{AA} = 5$	0
B	$\mu_B = 50\%$	$\sigma_{BB} = 2$	

有一个保险公司,年初保费剩余为 2百万,即 $w_0 = 2$,保费收取率为 50万 /年,即 $a = 0.5$,预计今年的索赔到来服从 $\lambda = 5$的 Poisson过程,而个别索赔额 X_1服从参数为 $\xi = 20$的指数分布. 那么相对安全负载 $\alpha = 0.25$,承保风险测度 $\beta = 0.1118$ 保险公司计划年初拿出部分保费用于投资,设投资期为一年,即 $T = 1$,年底预期的财富量为 3百万. 假定承保风险与股票 A、B价格变动相关,相关系数分别为 0.4、0.3,即 $\rho = (0.4, 0.3)^{T}$. 下面设计该保险公司的最优投资组合. 分三个步骤:

步骤 1 计算安全投资比例. 假定保险公司要求在今年一年的投资期内破产的可能性小于千分之一,即 $p_0 = 0.001$. 调节系数 $\eta = \xi - \frac{\lambda}{a} = 10$,根据式 (6) 得

$$\theta \le 1 + \frac{\ln p_0}{\eta w_0} = 1 + \frac{\ln 0.001}{10 \times 2} = 0.6546$$

不妨取 $\theta = 0.65$.

步骤 2 计算保险公司的偏好系数. 在已知预期终止财富的条件下,应用式 (20) 来计算.

$$\gamma = \frac{Ew(T) - N}{M} = \frac{3 - 2.5334}{-0.0408} = -11.4363$$

步骤 3 计算最优投资策略. 根据式 (15),有

$$\pi^*(0) = -\beta\Sigma^{-1}\sigma\rho - [w_0 - b + \gamma + \frac{G}{\theta r}(1 - e^{-\theta r T})]\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_2) = (0.242, 0.767)^{T}$$

所以对该保险公司来说,今年在小于千分之一破产可能的条件下,在股票 A、B上的最投资量分别是 24.2万与 76.7万,在债券上的投资量是 $200 \times 0.65 - 24.2 - 76.7 = 29.1$万时,可以达到年底 3百万的预期财富量.

参 考 文 献:

[1] Krous C G. Portfolio balancing corporate assets and liabilities with special application to insurance management[J]. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1970, 5: 77—105.

[2] Kahane Y, Nye D. A portfolio approach to the property liability insurance industry[J]. Journal of Risk and Insurance, 1975, 42: 579—598.

[3] Briys E P. Investment portfolio behavior of non-life insurers: A utility analysis[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1985, 4: 93—98.

[4] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(4): 937—958.

[5] Hipp C, Plum M. Optimal investment for insurer[J]. Insurance: Mathematics & Economics, 2000, 27: 215—228.

[6] Hipp C, Plum M. Optimal investment for investor with state dependent income, and for insurer[J]. Finance and Stochastics, 2003, 7: 299—321.

[7] Yang H L, Zhang L H. Optimal investment for insurer with jump diffusion risk process[J]. Insurance: Mathematics & Economics, 2005, 37: 615—634.

[8] 荣喜民, 吴孟铎, 刘泊炀. 保险投资的最优投资比例研究[J]. 天津大学学报, 2001, 34(2): 198—200.
Rong Ximin, Wu Mengduo, Liu Boyang. Research on investment proportion of insurance investment[J]. Journal of Tianjin University(Science and Technology), 2001, 34(2): 198—200. (in Chinese)

[9] 荣喜民, 吴孟铎, 刘泊炀. 保险基金投资的单位风险收益最优化模型研究[J]. 管理工程学报, 2001, 15(2): 40—43.
Rong Ximin, Wu Mengduo, Liu Boyang. Research on the unit risk return optimization model of insurance funds investment

[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2001, 15(2): 40—43. (in Chinese)
[10] 荣喜民, 卢美萍, 李 践. 考虑承保风险的保险基金投资研究[J]. 系统工程学报, 2004, 19(2): 198—201.
Rong Ximin, Lu Meiping, Li Jian. Research on investment of insurance funds with underwriting risk[J]. Journal of Systems Engineering, 2004, 19(2): 198—201. (in Chinese)
[11] 荣喜民, 李 楠. 保险基金的最优投资研究[J]. 数量经济技术经济研究, 2004, 10: 62—67.
Rong Ximin, Li Lan. Research on optimal investment of insurance funds[J]. Quantitative & Technical Economics, 2004, 10: 62—67. (in Chinese)
[12] 郭文旌, 胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合[J]. 管理科学学报, 2005, 8(2): 13—19.
Guo Wenjing, Hu Qiying. Multi-period portfolio optimization when exit time is uncertain[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(2): 13—19. (in Chinese)
[13] 杨瑞成, 刘坤会. 随机跳跃幅度的最优消费与证券选择策略问题[J]. 管理科学学报, 2005, 8(6): 83—97.
Yang Ruicheng, Liu Kunhui. Optimal strategies on consumption and portfolio problem with stochastic jump-range[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(6): 83—87. (in Chinese)
[14] Lunberg F I. Approximerad Framstallning av Sannolikhetsfunktionen. II, Ätersforsäkring av Kollektivrisker[M]. Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1903.
[15] Li X, Zhou X Y, Lim A. Dynamic mean-variance portfolio selection with no shorting constraints[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2002, 40(5): 1540—1555.
[16] Fleming W H, Soner H M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

Optimal investment decision of insurer

GUO Wen-jing[1,2], *LI Xin-dan*[2]
1. School of Finance, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210046, China;
2. School of Management Science & Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Abstract: Early in 2005, insurance corporations are permitted to invest in capital market directly. So how to select the optimal investment strategy becomes a difficult problem faced by insurance corporations now. However, the shortcomings of traditional investment models restrict their applications in practice. The model studied in this paper overcomes the shortcomings of the traditional models. In our model the insurance claim is assumed to be a compound Poisson process. Insurance corporations can select investment proportion consistent with its safety claim in investment period. By applying the principle of optimal control to solve the model, the analytical expressions of the optimal strategy and the efficient frontier are derived. In addition, the effect of underwriting return and underwriting risk on the optimal strategy and the efficient frontier are discussed.

Key words: optimal investment strategy; underwriting return; underwriting risk; efficient frontier