外生状态的信息与经典的柔性选择①

倪得兵，唐小我
(电子科技大学管理学院，成都 610054)

摘要：将经典柔性决策模型中决策者的柔性选择与观察到的外生状态(信息)之间的比较静态关系进行了统一的考察，并且将相应的结果应用于实物期权投资模型和动态规划模型. 这一比较静态关系表明，在一定的技术假定下，决策者利益函数的上模性(决策选择与外生状态之间的互补特性)对应于二者之间的同向变化，而决策者利益函数的子模性(决策选择与外生状态之间的替代特性)对应于二者之间的反向变化. 这一结果统一了文献中存在的关于决策选择与观察到的外生状态之间的比较静态关系的具体结果，从而扩展了这些结果.

关键词：不确定性；柔性；柔性决策；比较静态
中图分类号：F224.1；F224.9　文献标识码：A　文章编号：1007-9807(2009)02-0001-08

0 引 言

在具有外生不确定性的条件下，决策选择导致的结果均具有不确定性. 这使得决策者具有强烈的“趋利避害”动机. 如果决策者具有这种“趋利避害”的能力，则他就能够根据外生环境的变化灵活地选择对自己最有利的决策. 这种选择的灵活性通常被称为决策柔性.

文献[1]指出，决策中涉及的柔性包含两方面的内容：(1)决策选项蕴含的未来选择空间的大小和未来可行选择对新信息的反应速度的快慢；(2)决策者根据观察到的信息进行反应的最优化模式. 在决策模型的框架下，前者模型化了决策者拥有(或者将构建)的资源对决策者最优反应的约束，而后者则模型化了决策者如何在该约束下进行反应. 基于此，文献[1]给出了柔性(包括范围柔性和反应柔性)的一般定义，建立了柔性决策模型，在一般的假定下证明了“决策选项的价值随着该选项的柔性(范围柔性和/或反应柔性)水平的增加而增加”这一基本结论. 该结果扩展了基于实物期权的柔性决策模型蕴含的价值论断和及时反应柔性决策模型的价值论断[2,3].

对于具有决策柔性的决策者来讲，其决策规则一定会表现出相机行动的特征，即决策者将会根据观察到的信息进行最优反应. 这显然是个比较静态问题. 比较静态分析的实质是获取在均衡或者最优决策条件下，均衡或者决策结果与外生变量变化之间的关系. 在柔性决策的背景下，一个重要的比较静态关系是，决策者如何根据观察到的信息选择具有何种柔性水平的决策选项.

对这一问题的研究文献主要表现在如下几个方向上.

1) 动态规划模型的解函数(对应)的单调性. 文献[4]在不存在外生不确定性的条件下研究了动态决策规则的跨期单调性，即第 $t+1$期的决策选择随着第 t期的决策选择变化而变化的单调趋势. 与文献[4]一样，文献[5]也在确定性环境中研究了动态决策规则的单调性，但该文献关注的是整个解函数相对期初状态变量的保序(order preserving)性质(即对任意的后续期间，

① 收稿日期：2007-03-14；修订日期：2007-06-04.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70702025)；教育部科学技术研究重点资助项目(105149)；电子科技大学中青年学术带头人培养计划.
作者简介：倪得兵(1973—)，男，重庆永川人，博士，副教授. Email: nidb@uestc.edu.cn

较“高”的期初选择蕴含着决策者将选择较“高”的未来选项), 并给出相应的充分必要条件. 文献[6]研究了随机动态规划函数(对应)相对于外生状态变量的单调性, 并给出了单调递增的充分条件.

2) 实物期权模型下决策规则的单调性 文献[7]在实物期权模型一般形式下(即最优停时模型)研究了选时决策规则的单调性, 给出了非减决策规则的充分条件. 在实物期权模型的应用中, 一些学者在具体的背景下考察决策规则的单调性. 比如, 文献[2]在投资的情形下通过临界值与市场增长趋势和风险之间关系隐含给出了投资选时规则与二者的比较静态关系; 文献[8]基于实物期权模型用数值的方法考察了不对称信息对最优投资临界值的影响; 文献[9]在实物期权框架下用数值算例展示了利润流的波动性、切换成本和产品关联度对最优产品切换决策的影响; 文献[10]分析了代理人柔性努力决策行为相对于市场价格的不确定程度之间的比较静态关系, 并考察该柔性行为对分成制委托代理合同的影响; 文献[11]在市场网络外部性和市场进入柔性的假定下指出, 柔性具有延迟市场进入的功能. 由于这些应用研究是最优停时问题的特殊情况, 因此, 相应的比较静态关系可以统一在文献[2]中.

3) 及时反应柔性模型下的决策规则的单调性 及时反应柔性模型的特征为决策者对观察到的信息的反应延迟时间为 0 文献[1]称这类模型为完全柔性模型. 但这容易与文献[3]定义的决策选项的完全柔性(perfect flexibility)相混淆. 在文献[3]中, 如果一个决策选项引致的后续决策可行空间包括全部可想像的可行选择, 则称其具有完全柔性. 由于实物期权模型隐含地假定了反应延迟时间为 0, 因此该模型也属于及时反应柔性模型, 但是实物期权模型的最优停时特征使得该模型具有重要的应用领域. 基于此, 本文将其区别对待. 文献[12]在及时反应柔性模型下研究了决策规则相对于信息结构的单调性, 并给出使得该保序性质成立的充分条件. 该保序性质的核心是, 在一些技术性假定下, 如果信息结构能够提供更多的信息(more informative), 则决策者将会选择柔性水平更高的决策选项. 关于该结果的详细解释, 参见文献[3].

这 3类模型都具有如下两个特征: 1) 决策者决策时期数被外生给定(可能为无穷期); 2) 决策的反应延迟时间也被外生给定(对动态规划模型, 反应延迟时间通常假定为 1, 而实物期权和及时反应柔性模型则假定为 0). 因此, 本文统称这 3类模型为经典柔性决策模型, 以区别于文献[1]定义的一般柔性决策模型.

本文将集中研究经典柔性决策模型下, 决策者的柔性选择行为对观察到的外生状态(信息)的比较静态关系, 即回答问题“决策者根据观察到的外生信息如何进行柔性选择”. 这一关系可以将上述 3个具体的决策模型的比较静态结果统一起来, 从而扩展相应的结果. 应当指出, 本文研究的对象不同于文献[3]和[12], 前者关心的是外生状态的信息本身, 后者关心的是信息结构. 另外, 本文采用的逻辑推理方法类似于文献[6], 但文献[6]只是在动态规划的背景下给出了外生状态(信息)与决策者决策选择之间的比较静态关系, 本文则将之扩展到经典柔性决策框架下.

下面, 首先给出一些关于格规划的数学准备, 然后建立经典柔性决策模型, 进而讨论决策者的柔性选择行为对观察到的外生状态(信息)的比较静态关系, 并将获得的比较静态结果应用于实物期权模型和动态规划模型, 最后, 指出需要进一步研究的问题.

1 一些数学准备

现在为比较静态分析准备一些格规划方面的知识[13, 14]. 格(lattice)是配备了偏序 $\preceq$ 的偏序集 X, 并且对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 满足

$$x_1 \wedge x_2 \in X, \quad x_1 \vee x_2 \in X$$

其中, $x_1 \wedge x_2$表示$\{x_1, x_2\}$在 X 中依据 $\preceq$ 的最大下界, $x_1 \vee x_2$表示$\{x_1, x_2\}$在 X 中依据 $\preceq$ 的最小上界. 进一步, 如果序 $\preceq$ 是完备的(即 X 中任何两个元素都可比较), 则称 X 为链(chain).

设 $L(X)$ 为格 X 的所有非空子格构成的集合. 对 $X_1, X_2 \in L(X)$, 任意的 $x_1 \in X_1$和 $x_2 \in X_2$, 如果

$$x_1 \wedge x_2 \in X_1, \quad x_1 \vee x_2 \in X_2$$

则称在由 $\preceq$ 引致的集序 $\sqsubseteq$ 下, $X_1 \sqsubseteq X_2$. 应当指出, 这里的“$\sqsubseteq$”不是通常的“包含”关系.

考虑一个配备了偏序 $\prec$ 的偏序集 P 和一个

对应 $B: P \to L(X)$. 对任意的 $p_1, p_2 \in P$, 如果

$$p_1 \prec p_2, x_1 \in B(p_1),$$
$$x_2 \in B(p_2) \Rightarrow x_1 \vee x_2 \in B(p_2)\ (B(p_1))$$

且

$$x_1 \wedge x_2 \in B(p_1)(B(p_2))$$

即

$$p_1 \prec p_2 \Rightarrow B(p_1) \subseteq B(p_2)\ (B(p_2) \subseteq B(p_1))$$

则 $B(p)$ 随着 p 的增加而增加 (减少).

考虑一个定义在格 X 的函数 $f: X \to R$. 对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 如果

$$f(x_1) + f(x_2) \leqslant f(x_1 \wedge x_2) + f(x_1 \vee x_2)$$

则称 f 在 X 上是上模 (supermodular) 的, 或者 f 是 X 上的上模函数. 如果上式中的不等号反向, 则称 f 在 X 上是子模 (submodular) 的, 或者 f 是 X 上的子模函数.

考虑偏序集 X, P 和 $X \times P$ 上函数 $f(x, p)$. 设 S 为 $X \times P$ 的一个子集, S_p 为 S 在 p 处的截面. 如果对所有的 $p_1 \prec p_2$, $f(x, p_2) - f(x, p_1)$ 在 $S_{p_1} \cap S_{P_2}$ 关于 x 递增 (递减), 则称 $f(x, p)$ 在 S 上关于 (x, p) 具有递增 (递减) 差异.

下面, 结合本文使用符号, 给出两个引理和 Topkis 定理.

引理 1　如果对 $t = 0, 1, 2, \cdots$, D_{t-1}, D_t 和 Z_t 都是链, 并且 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 在 $D_{t-1} \times D_t \times Z_t$ 上具有递增 (递减) 差异, 则 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 是 $D_{t-1} \times D_t \times Z_t$ 上的上模 (子模) 函数.

引理 2 (保持上模性)　如果对 $t = 0, 1, 2, \cdots$, D_{t-1}, D_t 和 Z_t 都是链, S 是 $D_{t-1} \times D_t \times Z_t$ 的一个子格, $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 是 S 上的上模 (子模) 函数, S_{d_{t-1}, z_t} 是 S 在 (d_{t-1}, z_t) $(d_{t-1} \in D_{t-1}, z_t \in Z_t)$ 处的截面, 并且

$$g(d_{t-1}, z_t) \equiv \max_{d_t \in S_{d_{t-1} z_t}} f(d_{t-1}, d_t, z_t)$$

在投影

$$\Pi_{D_{t-1} \times Z_t} = \{(d_{t-1}, z_t) \mid S_{d_{t-1}, z_t} \neq \Phi\}$$

上有限, 则 $g(d_{t-1}, z_t)$ 是 $\Pi_{D_{t-1} \times Z_t}$ 上的上模 (子模) 函数.

Topkis 定理　假设 X 是一个格, P 是一个偏序集, $S = X \times P$, 对应 $S_p: P \to L(X)$ 随着 p 的增加而增加 (减少). 如果 $f(x, p)$ 是 S_p 上的上模函数 (对每一个固定 $p \in P$), 并且 $f(x, p)$ 在 S 上具有递增 (递减) 差异, 则

$$A(p) \equiv \arg\max_{x \in S_p} f(x, p)$$

随着 p 的增加而增加 (减少).

2　经典柔性决策模型

根据柔性的一般定义[1], 如果决策者在第 0 期选择了 $d_0 \in D_0$, 则他的后续决策可行空间 ($T(d_0)$ 和 $\Gamma(d_t)$) 和反应速度 ($\tau(d_0)$) 就确定了. 假设决策者是 (贝叶斯) 理性的, 即根据观察到的外生状态进行概率分布推断, 并根据推断的概率分布最大化自己的期望利益 (如利润、收入等). 但是, 一旦他选择了 d_0, 就只能根据第 $t - \tau(d_0)$ 期观察到的信息形成第 t 期的预期, 并且只能在未来的 $T(d_0)$ 期中自由选择满足条件 $d_t \in \Gamma d_{t-1}$ 的决策.

设函数 $F: D_{t-1} \times D_t \times Z_t \to R$ 为决策者的支付函数, 那么, 决策者的决策行为可以表示为

$$\max_{d_0, \cdots, d_{\tau(d_0)}} \mathrm{E}_0 [\sum_{t=1}^{\tau(d_0)} f(d_{t-1}, d_t, z_t) + \max_{d_{\tau(d_0)+1} \in \Gamma d_{\tau(d_0)}} \mathrm{E}_1 [F(d_{\tau(d_0)}, d_{\tau(d_0)+1}, z_{\tau(d_0)+1}) + \cdots + \max_{d_{T(d_0)} \in \Gamma d_{T(d_0)-1}} \mathrm{E}_{T(d_0)-\tau(d_0)} \times [F(d_{T(d_0)-1}, d_{T(d_0)}, z_{T(d_0)})]]] \tag{1}$$

式中, $\mathrm{E}_t(\cdot)$ 表示决策者以第 t 期观察到的信息为基础形成 (贝叶斯) 预期, $z_t \in Z$ 为决策者第 t 期面临的外生状态.

从形式上看, 模型 (1) 是一个动态规划模型. 但是, 模型 (1) 与标准的动态规划模型之间具有明显的差异. 首先, 在标准的动态规划模型中, 决策期数是外生给定的, 而在模型 (1) 中, 决策期数随着 d_0 的变化而内生变化. 其次, 在标准的动态规划模型中, 决策者根据第 $t-1$ 期的信息形成第 t 期的 (贝叶斯) 预期, 即动态规划模型是模型 (1) 当 $\tau(d_0) \equiv 1$ 时的特例.

进一步, 如果对任意的 $d_0 \in D_0$ 都有 $\tau(d_0) \equiv 0$, 则模型 (1) 就变成了文献 [3, 12] 讨论的及时反应柔性模型. 如果 $D_0 = \{0, 1\}$, $\Gamma(1) = \{0, 1\}$, $\Gamma(0) = \Phi$, $T(0) = \infty$, $T(1) = \infty$, 并且对任意的 $d_0 \in D_0$ 都有 $\tau(d_0) \equiv 0$, 则模型 (1) 就变成了标准的实物期权模型[2].

在引言中已经指出, 可以将这 3类模型统称为经典柔性决策模型. 根据这 3类模型都具有的

两个共同特征(即对任意的 $d_0 \in D_0$, $T(d_0)$ 和 $\tau(d_0)$ 均为外生给定的常数), 为简化符号, 本文固定 $T(d_0) = N_0$ 和 $\tau(d_0) = 0$ 来表述经典柔性决策模型, 从而经典柔性决策模型可描述为

$$V(d_0, z_0) = \mathrm{E}_0 \max_{d_1 \in \Gamma d_0} [F(d_0, d_1, z_1) + \mathrm{E}_1 \max_{d_2 \in \Gamma d_1} [F(d_1, d_2, z_2) + \cdots + \mathrm{E}_{N_0-1} \max_{d_{N_0} \in \Gamma d_{N_0-1}} [F(d_{N_0-1}, d_{N_0}, z_{N_0})]]] \tag{2}$$

应当指出, 下面的比较静态结果在 $\tau(d_0) = t_0 > 0$ 的情形下也成立, 因此, 这种符号的简化不会丢失经典柔性决策模型所具有的一般特征.

3 外生信息对经典柔性选择的影响

设 $D_0 \subset \mathrm{R}^1$, 并且对所有的 $t = 0, 1, 2, \cdots, N_0 - 1$, 假定

$$\Gamma d_t = [0, g(d_t)]$$

其中, $g: D_t \to D_{t+1}$ 是关于 d_t 的非减函数, 并且约定 $\Gamma\Phi = \Phi$. 根据柔性的一般定义[1], $T(d_0) = N_0$ 和 $\tau(d_0) = 0$, $d_0 \geqslant_f d_0'$ 等价于 $d_0 \geqslant d_0'$, 其中, "$\geqslant$" 表示 R^1 上"大小"关系, $\geqslant_f$ 表示 d_0 比 d_0' 更具柔性. 明显地, 对所有的 $t = 0, 1, 2, \cdots, N_0$, $D_t \subset \mathrm{R}^1$ 和 $Z_t = Z \subset \mathrm{R}^1$ 在偏序 $\geqslant$ 下均为格, 并且 $\geqslant$ 在 R^1 上完备, 从而 $D_t \subset \mathrm{R}^1$ 和 $Z_t = Z \subset \mathrm{R}^1$ 在偏序 $\geq$ 下均为链.

下面, 假设 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 为 $D_{t-1} \times D_t \times Z$ 上的上模函数, 首先证明, $V(d_0, z_0)$ 是 $D_0 \times Z$ 上的上模函数, 然后应用 Topkis 定理证明, 决策者的最优选择 $A(z_0)$ 随着 z_0 的增加而增加. 这两个结论都依赖于如下假定.

条件 1 对所有的 $t = 0, 1, 2, \cdots, N_0 - 1$, 如果 z_t 增加, 则条件概率函数 $\Psi(z_{t+1} \mid z_t)$ 向右移动.

满足条件 1的随机演进过程通常被称为具有正的持续性的不确定性[2]. 如果 $h(z_{t+1})$ 是 z_{t+1} 的增函数, 则其以 z_t 为条件的条件期望随着 z_t 增加而增加.

为方便论证, 根据式(2)的结构, 首先定义

$$V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1}) \equiv \mathrm{E}_{N_0-1}\left[\max_{d_{N_0} \in \Gamma d_{N_0-1}} F(d_{N_0-1}, d_{N_0}, z_{N_0})\right]$$

然后, 对 $t = 0, 1, 2, \cdots, N_0 - 1$, 递归地定义

$$V_{t-1}(d_{t-1}, z_{t-1}) \equiv \mathrm{E}_{t-1}\left[\max_{d_t \in \Gamma d_{t-1}} F(d_{t-1}, d_t, z_t) + V_t(d_t, z_t)\right]$$

命题 1 对任意的 $t = 0, 1, 2, \cdots, N_0$, 如果外生不确定性满足条件 1, 并且 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 是 $D_{t-1} \times D_t \times Z_t$ 上的上模(子模)函数, 则 $V_{t-1}(d_{t-1}, z_{t-1})$ 是 $D_{t-1} \times Z_{t-1}$ 上的上模(子模)函数.

证明　将本命题的证明分为 3步.

第 1步　当 $t = N_0$ 时, $V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1})$ 是 $D_{N_0-1} \times Z_{N_0-1}$ 上的上模(子模)函数. 令

$$H_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0}) \equiv \max_{d_{N_0} \in \Gamma d_{N_0-1}} F(d_{N_0-1}, d_{N_0}, z_{N_0})$$

由于 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是 $D_{N_0-1} \times D_{N_0} \times Z_{N_0}$ 上的上模(子模函数, 由引理 2可知, $H_{N_0-1}(d_{N_0-1}, Z_{N_0})$ 是 $D_{N_0-1} \times Z_{N_0}$ 上的上模(子模)函数.

注意到

$$V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1}) = \mathrm{E}_{N_0-1}[H_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0})] = \int H_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0}) Q(z_{N_0-1}, dz_{N_0})$$

对任意的 $d_{N_0-1}, d'_{N_0-1} \in D_{N_0-1}$ 满足 $d_{N_0-1} \geqslant d'_{N_0-1}$, 由 $H(\cdot, \cdot)$ 的上模性(子模性)可知, $H(d_{N_0-1}, z_{N_0}) - H(d'_{N_0-1}, z_{N_0})$ 随着 z_{N_0} 的增加而增加(减小). 再由条件 1可得

$$V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1}) - V_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z_{N_0-1}) = \int [H_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0}) - H_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z_{N_0})] \times Q(z_{N_0-1}, dz_{N_0})$$

随着 z_{N_0-1} 的增加而增加(减小), 从而对 z_{N_0-1} 而言具有递增差异.

现在, 验证 $V_{N_0-1}, z_{N_0-1})$ 对 d_{N_0-1} 而言具有递增差异. 事实上, 对 $z_{N_0-1} \geqslant z'_{N_0-1}$ 和 $d_{N_0-1} \geqslant d'_{N_0-1}$, 由 $H(\cdot, \cdot)$ 的上模性(子模性)可知

$$\begin{aligned}
&[V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1}) - V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z'_{N_0-1})] - [V_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z_{N_0-1}) - V_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z'_{N_0-1})] \\
&= [V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1}) - V_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z_{N_0-1})] - [V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z'_{N_0-1}) - V_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z'_{N_0-1})] \\
&= \int [H_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0}) - H_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z_{N_0})] \times Q(z_{N_0-1}, dz_{N_0}) - \int [H_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0}) - H_{N_0-1}(d'_{N_0-1}, z_{N_0})] \times Q(z'_{N_0-1}, dz_{N_0}) \geqslant (\leqslant) 0
\end{aligned}$$

这表明 $V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1})$ 对 d_{N_0-1} 而言具有递增差异. 由于 $D_{N_0-1} \subset R^1$ 且 $Z_{N_0-1} = Z \subset \mathrm{R}^1$ 在 $\geqslant$ 下是

链, 且 $V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1})$ 在 $D_{N_0-1}\times z_{N_0-1}$ 上具有递增差异, 因此, 由引理 1可知, $V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1})$ 是 $D_{N_0-1}\times Z_{N_0-1}$ 上的上模 (子模) 函数.

第 **2**步　当 $t=N_0-1$时, $V_{N_0-2}(d_{N_0-2}, z_{N_0-2t})$ 是 $D_{N_0-2}\times Z_{N_0-2}$ 上的上模 (子模) 函数. 令

$$H_{N_0-2}(d_{N_0-2}, z_{N_0-1})\equiv \max_{d_{N_0-1}\in\Gamma d_{N_0-2}}[F(d_{N_0-2}, d_{N_0-1}, z_{N_0-1})+V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1})]$$

由于 $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是 $D_{N_0-2}\times D_{N_0-1}\times Z_{N_0-1}$ 上的上模(子模)函数, 并且 $V_{N_0-1}(d_{N_0-1}, z_{N_0-1})$ 是 $D_{N_0-1}\times Z_{N_0-1}$ 上的上模 (子模) 函数, 因而, 上式中的目标函数是 $D_{N_0-2}\times D_{N_0-1}\times Z_{N_0-1}$ 上的上模 (子模) 函数. 根据引理 2, $H_{N_0-2}(d_{N_0-2}, z_{N_0-1})$ 是 $D_{N_0-2}\times Z_{N_0-1}$ 上的上模 (子模) 函数. 应用与第一步相同的方法, 即可证明, $V_{N_0-2}(d_{N_0-2}, z_{N_0-2t})$ 是 $D_{N_0-2}\times Z_{N_0-2}$ 上的上模 (子模) 函数.

第 **3**步　重复第 2步, 即可证明, 对任意的 $t=1, 2, \cdots, N_0$, $V_{t-1}(d_{t-1}, z_{t-1})$ 是 $D_{t-1}\times Z_{t-1}$ 上的上模 (子模) 函数.　证毕

推论 1　如果外生不确定满足条件 1, 并且 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 是 $D_{t-1}\times D_t\times Z_t$ 上的上模 (子模) 函数, 则 $V(d_0, z_0)$ 是 $D_0\times Z_0$ 上的上模 (子模) 函数.

证明　在命题 1中, 取 $t=1$可知, $V_0(d_0, z_0)$ 是 $D_0\times Z_0$ 上的上模 (子模) 函数.　证毕

命题 2　对任意的 $t=1, 2, \cdots, N_0$, 如果外生不确定性满足条件 1, 并且 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 是 $D_{t-1}\times D_t\times Z_t$ 上的上模 (子模) 函数, 则当 $t=N_0$ 时的 $A(z_t)$ 为

$$A(z_t)=\arg\max_{d_t\in\Gamma d_{t-1}}F(d_{t-1}, d_t, z_t)$$

当 $t<N_0$时的 $A(z_t)$ 为

$$A(z_t)=\max_{d_t\in\Gamma d_{t-1}}[F(d_{t-1}, d_t, z_t)+V_t(d_t, z_t)]$$

都随着 z_t 的增加而增加 (减小).

证明　根据 Topkis定理, 只需验证定理中的 3个条件. 当 $t=N_0$时, 1) 由于约束对应 $d_{N_0}\in\Gamma d_{N_0-1}$独立于 z_{N_0}, 从而对任意给定的 d_{N_0-1}, Γd_{N_0-1} 随着 z_{N_0} 增加而增加. 2) 函数 $F(d_{N_0-1}, d_{N_0}, z_{N_0})$ 在 $D_{N_0-1}\times D_{N_0}\times Z_{N_0}$ 上的上模性 (子模性) 意味着 $F(d_{N_0-1}, d_{N_0}, z_{N_0})$ 在 $D_{N_0}\times Z_{N_0}$ 上具有递增 (递减) 差异. 3) 显然, 函数 $F(d_{N_0-1}, d_{N_0}, z_{N_0})$ 在 $D_{N_0-1}\times D_{N_0}\times Z_{N_0}$ 上的上模性 (子模性) 暗示 $F(d_{N_0-1}, d_{N_0}, z_{N_0})$ 是 $D_{N_0}\times Z_{N_0}$ 上的上模 (子模) 函数. 这表明, Topkis定理的条件得以满足, 从而命题 2的第 1部分成立. 对于第 2部分, 由命题 1可知, $V_t(d_t, z_t)$ 是 $D_t\times Z_t$ 上的上模 (子模) 函数. 应用证明第一部分同样方法, 可以证明结论成立.　证毕

根据推论 1, 如果外生不确定性满足条件 1, 并且 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 是 $D_{t-1}\times D_t\times Z_t$ 上的上模 (子模) 函数, 则 $V(d_0, z_0)$ 是 $D_0\times Z_0$ 上的上模 (子模) 函数. 注意到 D_0 是给定的, 从而应用证明命题 2同样的方法可证明如下命题.

命题 3　如果外生不确定性满足条件 1, 并且对任意的 $t=1, 2, \cdots, N_0$, $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 是 $D_{t-1}\times D_t\times Z_t$ 上的上模 (子模) 函数, 则

$$A(z_0)=\max_{d_0\in D_0}V(d_0, z_0)$$

都随着 z_0 的增加而增加 (减小).

命题 3表明, 如果决策者的利益函数具有上模性, 则随着观察到的外生状态的“值”增大, 决策者将会选择更具柔性的决策. 如果决策者的收益函数具有子模性, 则随着观察到的外生状态的“值”增大, 决策者将会选择柔性水平低的决策. 应当指出, 由于这里并没有涉及任何具体的决策背景, 从而外生状态“值”和决策选项均只是理论上的符号而已, 因而无法判断外生状态“值”的大小是否对决策有利. 只有涉及到具体的决策环境, 才能真正赋予相应的含义. 但是, 在这个相当一般的理论意义下, 命题 3为判断决策者决策选择随着观察到的外生状态发生变化而变化的方向提供了一个理论依据.

进一步, 本文只在决策者第 0期的选择空间 D_0 上定义柔性水平的比较关系, 而未在其后续决策空间 D_t 中考虑各个决策选项之间的柔性水平的比较. 这种对两种决策选项区别对待的原因是, 柔性的属性 (范围和速度) 要求考虑比较第 0期决策选项引致的未来可行选择空间 (用后续决策的可行选择空间表示) 的大小和对信息的反应速度. 如果将后续决策选项与第 0期决策选项同等对待, 则在一般框架下, 模型将会变得无法分析. 比如, 某个后续决策改变了它对应的第 0期决策所确定的可行决策的时期 $(T(d_0))$, 如何在这一维度上对第 0期决策选项进行柔性水平的比较呢? 因此, 根据柔性的属性, 区别对待两种决策选项至少具有方便分析的意义.

当然, 尽管在一般意义上无法分析, 但在一些特殊的环境中, 这种分析还是可能的. 比如, 在固定 $T(d_0)$ 和 $\tau(d_0)$ 并且应用上述区间的方法定义 Γ 的条件下, 由于此时柔性的比较关系等价于数值的大小关系, 从而命题 2实际上给出决策者各期决策对各期外生状态的比较静态判断.

最后, 命题 2和命题 3的一个关键假定是决策者的利益函数的上模性 (子模性). 这一性质具有重要的经济意义. 根据上模性 (子模性) 的定义, 如果利益函数对两个变量具有上模性 (子模性), 则它们之间存在递增 (递减) 差异, 也就是说, 一个变量的边际利益随着另一个变量的增加而增加 (减小). 这意味着, 如果利益函数对两个变量具有上模性 (子模性), 则这两个变量之间具有互补性 (替代性). 明显地, 如果利益函数在决策变量与外生状态上具有上模性 (子模性), 则当一个变量值 (外生状态) 按照本小节定义的比较关系增加时, 另一个变量 (决策变量) 的边际利益也将按照本小节定义的比较关系增加 (减小). 在这种情形下, 决策者的利益最大化行为必然导致决策选择对参数变化的"同向 (反向) "反应. 这就是命题 2和命题 3的直观解释.

4 两个直接的理论应用

本小节将决策选择对观察到的外生状态的比较静态结果应用到经典的实物期权投资模型和动态规划模型中. 由于实物期权投资模型和动态规划模型涉及的变量和目标函数在各自的具体应用领域中均具有各自不同的经济 (或者工程) 的含义, 从而讨论具体背景下的经济 (或者工程) 的应用将会显得十分杂乱, 进而偏离本文的研究主题. 但是, 这两个模型下的 (最优) 决策规则均具有柔性的 "相机行动 " 特征. 这一特征在大量经济 (或者工程) 的应用背景均可以解释为 "理性决策者 (只要拥有相应的能力) 都会根据观察到的最新信息调整其以往的选择 ", 从而 (相对于非柔性的决策) 更加准确地描述了理性决策者的行为动机所蕴含的选择行为. 事实上, 在存在外生不确定的条件下, 这种柔性的相机决策规则引致的决策目标的最优值将会大于等于非柔性的决策规则对应的最优值[1~3, 15]. 当赋予决策目标函数具体的经济含义 (如收入、利润和价值等) 时, 这两个特殊的经典柔性模型暗示, 如果决策者遵循柔性的相机决策规则, 他将会获得更好的结果 (如更高的收入、利润和价值等). 基于上述原因, 本小节仅在相对抽象的模型层次上讨论决策选择与观察到的外生状态 (信息) 之间的比较静态关系.

1) 实物期权投资模型

与标准的净现值投资模型相比较, 实物期权模型放松了" now or never"假定, 允许决策者 (投资者) 延迟其决策 (投资) 行为. 这使得决策者可等到完全观察到特定的信息才作出相应的投资决定. 通常投资决策是一种长期决策. 这意味着, 投资者观察到的信息不可能完全消除投资项目的不确定性. 但是, 观察到的信息有助于判断项目的预期价值, 从而在给定的时点, 决策者可以根据相应的价值预期决定是否投资.

正式地, 在一个实物期权投资模型中, 在第 0期, 决策者的可行空间为 $D_0 = \{0, 1\}$. 模型中关于对外生信息的完全观察和即时反应的假定暗示 $\tau(0) = \tau(1) = 0$ 进一步, 模型还隐含地假定, 未来决策的可行时间段足够长, 即决策者可以自由地在未来 N 个时期内 (N 充分大, 通常被隐含地假定为 ∞) 决策, 即 $T(0) = T(1) = N$.

对任意的 $t = 1, 2, \cdots, N$, 可将约束对应定义为

$$\Gamma d_{t-1} = \begin{cases} \{0, 1\} & d_{t-1} = 1 \\ \Phi & d_{t-1} = 0 \end{cases}$$

式中, $d_{t-1} = 1$表示决策者第 $t-1$期的决策是"等待", $d_{t-1} = 0$第 $t-1$期的决策是 "立刻投资 ". 尽管这里使用的符号与通常的使用在含义上有所差异 (比如, 通常 $d_{t-1} = 1$表示投资, 而 $d_{t-1} = 0$表示等待), 但为与前面关于柔性的定义一致, 仍然采用了前者.

注意到前面的约定 $\Gamma\Phi = \Phi$, 只要决策者在某个时期 $0 \leqslant t \leqslant N$ 选择了 $d_t = 0$(即投资), 则他在以后各期的决策的可行空间为 Φ, 即不再具有投资机会. 如果他在时期 $0 \leqslant t \leqslant N$ 选择了 $d_t = 1$(即等待), 则下一个时期的可行空间为 $\{0, 1\}$, 即仍然有投资机会. 这与标准实期权投资模型的解释一致. 决策者第 0期的可行空间为 $D_0 = \{0, 1\}$. 根据柔性的一般定义[1], 显然有 $1 = d_0 \geqslant_f d_0' = 0$

在任意的时刻 $t = 1, 2, \cdots, N$, 假设决策者的选择空间为 $D_t = \{1, 0\}$, 并且 P_t 为项目的预期价值. 如果决策者选择 $d_t = 0$, 则他将支付的投资成本为 C, 从而其净价值为 $P_t - C$, 记为 $Q(P_t, 0)$, 即终结价值 (termination value). 如果决策者选择 $d_t = 1$, 则将其净价值记为 $S(P_t, 1)$, 即连续价值 (continuation value). 连续价值为决策者在未来决策最优的条件下, 所获得所有现金流量的净现值. 综合这两种情况, 可以将实物期权投资模型中决策者的利益函数表示为

$$V(P_t, d_t) = \begin{cases} Q(P_t, d_t) & 若\ d_t = 0 \\ S(P_t, d_t) & 若\ d_t = 1 \end{cases}$$

在一个实物期权投资模型中[2], $P_t \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}^1$ 且 $D_t \in \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^1$, 从而在配备通常的大小关系 $\geqslant$ 的条件下, 它们都是链. 进一步, 根据文献 [2], 如果条件 1得以满足, $S(P_t, 1) - Q(P_t, 0)$ 随着 P_t 增加而减小, 因而决策者的利益函数 $V(P_t, d_t)$ 对 (P_t, d_t) 具有递减差异, 从而具有子模性. 由命题 2可知, 最优决策 (投资) 规则

$$A(P_t) = \underset{d_t \in \{1, 0\}}{\arg\max} V(P_t, d_t)$$

随着 P_t 的增加而减少. 也就是说, 随着观察到的预期价值的增加, 决策者越倾向于选择柔性水平较低的决策, 反之, 则倾向于选择柔性水平较高的决策. 但是, 决策者选择空间只有两个元素, 因而必然存在一个门槛值 P_t^* 使得当 $P_t \geqslant P_t^*$ 时, 决策者选择 $d_t = 0$, 即"立即投资"; 当 $p_t < P_t^*$ 时, 决策者选择 $d_t = 1$, 即"等待". 显然, 这一决策规则适用于 $t = 0$ 的情形. 上述分析表明, 命题 2和命题 3的结论与文献 [2] 中的最优停时解 (optimal stopping solution) 规则一致.

2) 动态规划模型

与实物期权模型一样, 一个标准的动态规划模型 (如文献 [15]) 通常首先固定决策未来可行决策时间段为有限的 T, 即对任意的 $d_0 \in D_0$, $T(d_0) = N$, 然后, 固定一个约束对应 $\Gamma: D_{t-1} \to D_t$. 但动态规划模型并不假定决策的反应是完全的: 决策者第 $t(>0)$ 期依赖于观察到的第 $t-1$ 期揭示的外生状态 z_{t-1}, 即对任意的 $d_0 \in D_0$, $\tau(d_0) = 1$.

设有界连续函数 $F(d_{t-1}, d_t, z_t)$ 为决策者第 t 期的支付函数 $(t = 1, 2, 3, \cdots, N)$. 定义第 N 期价值函数为

$$W_N(d_{N-1}, z_{N-1}) = \max_{d_N \in \Gamma d_{N-1}} \mathrm{E}_{N-1}[F(d_{N-1}, d_N, z_N)]$$

根据 $W_N(d_{N-1}, z_{N-1})$, 标准的动态规划原理 (贝尔曼方程) 意味着, 对任意的 $t = 0, 1, 2, \cdots, N-2$, $W_{t+1}(d_t, z_t)$, 满足

$$W_{t+1}(d_t, z_t) = \max_{d_{t+1} \in \Gamma d_t} \mathrm{E}_t[F(d_t, d_{t+1}, z_{t+1}) + W_{t+2}(d_{t+1}, z_{t+1})]$$

如果条件 1得以满足且 $F(d_t, d_{t+1}, z_{t+1})$ 是 $D_t \times D_{t+1} \times Z_{t+1}$ 上的上模 (子模) 函数, 则应用证明命题 2同样的方法, 可以证明,

$$A(z_t) = \underset{d_{t+1} \in \Gamma d_t}{\arg\max} \mathrm{E}_t[F(d_t, d_{t+1}, z_{t+1}) + W_{t+2}(d_{t+1}, z_{t+1})]$$

随着 z_t 的增加 (依据 $\mathbb{R}^1$ 上大小关系) 而增加 (减小). 与实物期权投资模型一样, 这一比较静态特征也适用于 $t = 0$ 的情形. 这表明, 命题 2和命题 3在标准的动态规划模型中同样适用.

应当指出, 文献 [4] 也研究了动态规划模型的比较静态特征. 但是, 文献 [4] 是在确定性环境下考察特定的经济变量对经济决策的影响. 由于文献 [4] 研究的是确定性环境下的比较静态问题, 因而条件 1没有出现在其论文中. 如果删除所有与不确定性相关的假设, 并且固定 $T(d_0)$ 和 $\tau(d_0)$, 则本文的结论与文献 [4] 一致.

5 结束语

本文将经典柔性决策模型的决策选择与观察到的外生状态 (信息) 之间的比较静态关系进行了统一的考察, 并且将相应的结果应用于经典的实物期权投资模型和动态规划模型. 这一比较静态关系表明, 在一定的技术假定下, 决策者利益函数的上模性 (决策选择与外生状态之间的互补特性) 对应于二者之间的同向变化, 而决策者利益函数的子模性 (决策选择与外生状态之间的替代特性) 对应于二者之间的反向变化. 这一结果将现有文献中关于决策选择与观察到的外生状态之间的比较静态关系统一起来, 从而扩展了这些结果. 应当指出, 本文的研究结论仅限于经典的柔性决策模型, 不能直接推广到模型 (1) 代表的一般情形. 对于一般模型 (1) 下的比较静态问题, 仍然需要进一步研究.

参 考 文 献:

[1]倪得兵. 柔性的价值及其对企业决策的影响[D]. 成都: 电子科技大学, 2006
NiDe-bing. The Value of Flexibility and Its Impacts on Firm's Decision-making[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2006. (in Chinese)

[2]Dixit A K, Pindyck R S. Investment under Uncertainty[M]. Princeton: Princeton University Press, 1994.

[3]Schmutzler A. Flexibility and Adjustment to Information in Sequential Decision Problems: A Systematic Approach[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[4]Amir R. Sensitivity of multisector optimal economic dynamics[J]. Journal of Mathematical Economics, 1996, 25(1): 123—141.

[5]Jensen M K. Monotone Dynamic Programming[R]. Providence: Working Paper, Brown University, 2003.

[6]Hopenhayn H A, Prescott E C. Stochastic monotonicity and stationary distributions for dynamic economies[J]. Econometrica, 1992, 60(6): 1387—1406.

[7]Friedman E, Johnson S. Dynamic monotonicity and comparative for real options[J]. Journal of Economic Theory, 75(1): 104—121.

[8]黄小原, 庄新田. 非对称信息条件下实物期权最优投资问题研究[J]. 管理科学学报, 2003, 6(6): 28—33.
Huang Xiao-yuan, Zhuang Xin-tian. Research of real options optimization investment under asymmetric information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(6): 28—33. (in Chinese)

[9]简志宏, 李楚霖. 柔性产品组合最优切换的实物期权方法研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(1): 14—19.
Jian Zhi-hong, Li Chu-lin. Real option approach to optimal switching of flexible product-mix[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(1): 14—19. (in Chinese)

[10]倪得兵, 唐小我. 代理人努力决策柔性的分成制委托代理模型研究[J]. 管理科学学报, 2005, 8(3): 15—23.
NiDe-bing, Tang Xiao-wo. A study on the sharecropping principle-agent model with agent's flexible effort decision[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(3): 15—23. (in Chinese)

[11]倪得兵, 唐小我. 网络外部性、柔性与市场进入决策[J]. 管理科学学报, 2006, 9(1): 1—7.
NiDe-bing, Tang Xiao-wo. Network externality, flexibility and market-entry decision[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(1): 1—7. (in Chinese)

[12]Jones R A, Ostroy J M. Flexibility and uncertainty[J]. Review of Economic Studies, 1984, 51(164): 13—32.

[13]Topkis D M. Minimizing a submodular function on a lattice[J]. Operations Research, 1978, 26(3): 35—45.

[14]Topkis D M. Supermodularity and Complementarity[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1998.

[15]Stokey N L, Lucas R E, Prescott E C. Recurssive Method in Economic Dynamics[M]. Cambridge: Harvard University Press, 1989.

Exogenous states information and classical flexible choices

NI De-bing, TANG Xiao-wo
School of Management, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China

Abstract: This paper investigates the comparative statics of decision makers' flexible choices derived according to classical models of flexible decision-making with respect to observed exogenous states (or information) and applies this statics to real-option model and dynamic programming. The results show that under some technical assumptions, the supermodularity of a decision maker's benefit function (which exhibits the complementarity feature between the levels of flexibility of optimal choices and the ranking of information in observed exogenous states) implies that the higher the observed exogenous state is ranked, the more flexible the alternative that the decision maker chooses, and that the submodularity of a benefit function (which exhibits the property of substitution between the levels of flexibility of optimal choices and the ranking of the information in observed exogenous states) implies a negative link. This paper compiles related comparative-statics results which separately exist in the literature and then extends them.

Key words: uncertainty; flexibility; flexible decision-making; comparative statics