期望未来损失约束下的最优投资问题①

郭福华[1], 邓飞其[2]
(1. 浙江师范大学工商管理学院, 金华 321004;
2. 华南理工大学系统工程研究所, 广州 510640)

摘要: 在标准的 Black-Scholes型金融市场下,建立了期望未来损失(expected future loss, EFL)约束下基于终端财富效用最大化的投资组合选择模型.运用鞅和优化方法,得到了一般效用投资者在投资计划期内任意时刻的最优财富和最优投资组合选择策略.在对数效用函数下,得到了投资者在投资计划期内任意时刻的最优财富和最优投资组合选择策略的显式表达式.

关键词: 期望未来损失; 效用函数; 最优财富; 最优投资
中图分类号: F830.9　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2009)02-0054-06

0 引 言

近十多年来,国内外许多学者都致力于 VaR (value-at-risk)的研究, VaR 即投资组合在给定的置信水平下及特定的投资计划期内可能遭受的最大损失[1,2]. 一段时期以来,金融文献里似乎有个共同的信念,那就是 VaR 是管理和控制风险的有效方法.正如文献[2]指出的那样, VaR 方法已被基金经理广泛运用.而且,巴塞尔银行监管委员会要求银行运用 VaR 方法来决定源于市场风险暴露的资本充足性要求.然而,文献[3]出现之后,显然认识到 VaR 方法并非度量和控制风险的可靠方法,因为 VaR 方法不是一致性风险度量方法. Szego[4]指出,一般说来, VaR 甚至不是弱一致性风险度量方法,其严重缺陷是不满足次可加性.也就是说,分散投资反而会招致更大的风险,这显然有悖于 Markowitz的分散投资原理.当然,如果投资组合中所有风险资产回报率的联合分布是椭球的, VaR满足次可加性,即

$$\mathrm{VaR}_\alpha(P_1+P_2)\leqslant \mathrm{VaR}_\alpha(P_1)+\mathrm{VaR}_\alpha(P_2)$$

这里, P_1和 P_2指两个投资组合的回报率, α 指置信水平.

因为 VaR 方法的缺陷, Artzner等[3]提出了“一致风险度量”这一概念. 认为风险是一个映射 $\rho: R^n\to R$, 如果一个风险计量方法在数理逻辑和经济逻辑上是合理的,则它应该满足下面的几条公理[5]:

1) 转移不变性公理. 设 $X\in R^n$, α 是常数,则 $\rho(X+\alpha)=\rho(X)-\alpha$, 其经济意义是如果将常数单位的参考金融工具加入到资产组合中去,则只需要有相同数量的风险补偿.其直接结果是通常所谓的无风险资产也是存在风险的.

2) 正齐次性公理. 对任意的 $k\geqslant 0$, $X\in R^n$, 有 $\rho(kX)=k\rho(X)$, 其经济意义是如果持有资产头寸的规模直接影响到风险测度(例如由于持有资产头寸太大以至于资产流动性严重依赖于资产规模), 则应该考虑由于资产缺乏流动性带来的后果, 因为此时风险已不仅仅依赖于未来财富净值. 该公理也表明这里的风险是线性依赖于持有资产头寸, 并且应该避免风险叠加的规模效应.

3) 次可加性公理. 对 $\forall X, Y\in R^n$, $\rho(X+Y)\leqslant\rho(X)+\rho(Y)$, 其经济意义是投资组合可以分散投资风险, 因为左边可以推广为投资组合的风险, 而右边表示单独投资的风险总和.

4) 单调性公理. 如果 $X\leqslant Y$, 则 $\rho(X)\geqslant$

① 收稿日期: 2005-08-16; 修订日期: 2007-12-21.
作者简介: 郭福华(1969—), 男, 湖南益阳人, 博士, 讲师. Email: scutgfh@163.com

$\rho(Y)$, 其经济意义是如果一个资产组合好于另一个资产组合, 则其投资风险也应该小一些, 传统的均值 – 方差决策方法不满足该条件. 稍作变形可知当 $X < 0$时, $\rho(X) > 0$, 即此处是用正值表示风险.

然而, 目前使用得最多的几种风险测度方法如方差、VaR都不是一致风险测度, 主要是不满足次可加性. 也就是说当 Markowitz提出利用投资组合可以降低投资风险的原理时, 他们使用的风险测度指标却导致错误的投资组合结果. 目前人们提出了一些一致风险测度指标, 其中使用得最多的是条件风险价值 CvaR (conditional value-at-risk)[6~8]、WCE (worst conditional expectation)[9,10]、ES(expected shortfall)[11] 等.

最近, 文献 [12] 运用 "受限期望损失" 风险测度法来控制投资组合的风险, 建立了受限期望损失约束下的效用最大化投资组合选择模型. 受限期望损失风险测度法满足次可加性、正齐次性及单调性公理 (但不满足转移不变性公理). 因此, 受限期望损失方法克服了 VaR方法不满足次可加性的缺陷. 文献 [12] 的研究表明, 与非风险管理者相比, VaR风险管理者总是最优地选择风险资产的更大暴露, 其结果是当损失发生时, 会招致更大的损失; VaR 风险管理方法下的期望损失是受限期望损失风险管理方法下的 2~10倍. 然而, 本文考虑的是期望未来损失 (EFL) 约束下的最优投资问题. 与受限期望损失相比, 期望未来损失不考虑损失的贴现.

1　EFL约束下的投资组合选择模型

1.1　金融市场描述

考虑标准的 Black-Scholes型金融市场, 假设市场上存在 $n+1$种资产, 所有的资产都在投资计划期 $[0, T]$ 内连续交易. 其中一种资产为无风险债券, 其价格过程 $p_0(t)$ 满足常微分方程

$$\begin{cases} dp_0(t) = rp_0(t)\,dt \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

式中, $r(>0)$ 是无风险债券的利率. 其余 n 种资产为股票, 其价格过程 $p_i(t)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足随机微分方程

$$\begin{cases} dp_i(t) = p_i(t)\left[b_i\,dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\,dB_j(t)\right] \\ p_i(0) = p_i \end{cases} \tag{2}$$

这里, $\boldsymbol{B}(\cdot) = (B_1(\cdot), \cdots, B_n(\cdot))^{\mathrm{T}}$ 是定义在带流概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}, P)$ 上的 n 维标准布朗运动, 系数 $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是股票期望回报率向量和波动率矩阵, 它们满足如下假设:

H1　$b_i > r$, $i = 1, \cdots, n$;

H2　$\sigma\sigma^{\mathrm{T}} > 0$(非退化条件)

注意, 尽管 $\boldsymbol{b}$和 σ是时变的, 但本文假定它们均为常数.

动态投资组合由 $\sum_{i=0}^{n} N_i(t)p_i(t)$ 构成, 这里 $N_i(t)$ 是指投资在第 i种股票 p_i上的股数. 假设初始财富为 $w(0) \equiv w_0 > 0$, 任意时刻 $t \in [0, T]$ 投资者的总财富记为 $w(t)$. 容易证明, $w(t)$ 满足随机微分方程

$$dw(t) = w(t)\left\{\left[r\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i\pi_i(t)\right]dt + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ij}\,dB_j(t)\right\} \tag{3}$$

式中, $\pi_i(t)$ 表示时刻 t投资在第 i种股票上的财富比例, 即

$$\pi_i(t)w(t) = N_i(t)S_i(t), \quad i = 1, \cdots, n$$

于是

$$w(t) = \sum_{i=0}^{n}\pi_i(t)w(t)$$

其中, $\pi_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)$ 是时刻 t投资在无风险债券中的财富比例. 称资产组合过程

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \cdots, \pi_n(t))^{\mathrm{T}} \in R^n$$

为一个投资组合选择策略.

当然, 系统 (3) 能写成向量形式

$$dw(t) = w(t)\{[r + (\boldsymbol{b} - r\bar{\mathbf{1}})^{\mathrm{T}}\pi(t)]\,dt + \pi^{\mathrm{T}}(t)\sigma\,d\boldsymbol{B}(t)\} \tag{4}$$

式中, $\bar{\mathbf{1}}$是 n维列向量, 其每个元素为 1.

动态市场的完全性意味着存在惟一的状态价格密度过程 $\eta(t)$, 满足随机微分方程

$$d\eta(t) = -\eta(t)[r\,dt + \theta^{\mathrm{T}}d\boldsymbol{B}(t)] \tag{5}$$

式中, $\eta(0) \equiv \eta_0$; $\theta \equiv \sigma^{-1}(\boldsymbol{b} - r\bar{\mathbf{1}})$ 是风险市场价

格过程.

最后,假定效用函数 $u(x)$ 是两次连续可微,严格递增,严格凹函数,且满足

$$\lim_{x\to 0} u'(x) = \infty,\quad \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$$

同时,严格递增,连续的边际效用函数 $u':(0,\infty)\to(0,\infty)$ 有严格递减,连续的逆函数 $I:(0,\infty)\to(0,\infty)$.

1.2 EFL约束下的投资组合选择模型

正如引言中所指出的 VaR 方法的缺陷,本文采用 EFL方法来控制投资组合风险(与文献[12]的受限期望损失相比,EFL不考虑损失的贴现),其数学表达式为

$$E[(w_0 - w(T))1_{\{w_0-w(T)\geqslant \underline{w}\}}] \leqslant c \tag{6}$$

式中,阈值 $\underline{w}$ 外生给定;c是常数;w_0 是投资者的初始财富;$w(T)$ 是终端财富;$w_0 - w(T)$ 表示投资者的未来损失.式(6)的经济含义是一旦损失发生(超过阈值 $\underline{w}$),要求平均未来损失不超过给定的某常数 c.由于

$$\begin{aligned}E[(w_0 - w(T))1_{\{w_0-w(T)\geqslant \underline{w}\}}] = \\ E[(w_0 - w(T))\mid w(T)\leqslant w_0 - \underline{w}]\times \\ P(w(T)\leqslant w_0-\underline{w})\end{aligned}$$

因此约束(6)既“惩罚”了未来损失发生的高概率,又“惩罚”了一旦损失发生时的高平均未来损失[12].

运用鞅方法,建立如下 EFL约束下的投资组合选择模型

$$\begin{aligned}&\max_{w(T)} E[u(w(T))]\\ &\text{s.t. } E[\eta(T)w(T)] = \eta_0 w_0\\ &\qquad E[(w_0 - w(T))1_{\{w_0-w(T)\geqslant \underline{w}\}}] \leqslant c\end{aligned} \tag{7}$$

其中,第 1个约束为预算约束,第 2个约束为 EFL约束.

2 模型求解

求解 EFL约束下的优化问题(7),定理 1与定理 2分别描述了一般效用投资者在投资计划期 $[0,T]$ 内任意时刻 t的最优财富和最优投资组合选择策略.

定理 1　一般效用投资者在投资计划期 $[0,T]$ 内任意时刻 t的最优财富 $F(\eta(t),t)$ 为

$$\frac{1}{\eta(t)}E[\eta(T)\{I[\lambda_1\eta(T)]\Phi(d) + I[\min(\lambda_1\eta(T), u'(w_0-c))]\}[1-\Phi(d)]\mid \mathscr{F}_t]$$

其中,λ_1 是非负常数,由式(14)确定;$\Phi(d)$ 是标准正态累计分布函数

$$d = \frac{\ln\frac{\underline{\eta}}{\eta_0} + \left(r + \frac{\|\theta\|^2}{2}\right)T}{\|\theta\|\sqrt{T}};\quad \underline{\eta} = \frac{u'(w_0-\underline{w})}{\lambda_1}.$$

证明　设非负常数 λ_1、λ_2 为拉格朗日乘子,记拉格朗日函数 $L(w(T);\lambda_1,\lambda_2)$ 为

$$\begin{aligned}L(w(T);\lambda_1,\lambda_2) = Eu(w(T)) - \\ \lambda_1\{E[\eta(T)w(T)] - \eta_0 w_0\} - \\ \lambda_2\{E[(w_0-w(T))1_{\{w_0-w(T)\geqslant\underline{w}\}}] - c\}\end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial L}{\partial w} = E[u'(w(T)) - \lambda_1\eta(T) + \lambda_2 1_{\{w_0-w(T)\geqslant\underline{w}\}}]$$

令 $\frac{\partial L}{\partial w} = 0$,得

$$u'(w^*(T)) = \lambda_1\eta(T) - \lambda_2 1_{\{w_0-w^*(T)\geqslant\underline{w}\}} \tag{8}$$

(1)如果 $w_0 - w^*(T) < \underline{w}$,则 EFL约束不起作用,由式(8)知

$$u'(w^*(T)) = \lambda_1\eta(T)$$

因此最优终端财富为

$$w_1^*(T) = I(\lambda_1\eta(T))$$

(2)如果 $w_0 - w^*(T) \geqslant \underline{w}$,则由式(8)知

$$u'(w^*(T)) = \lambda_1\eta(T) - \lambda_2 \tag{9}$$

根据 $\lambda_2\{E[w_0 - w^*(T) - c]\} = 0$,知道

①当 $E[w_0 - w^*(T) - c] > 0$时,$\lambda_2 = 0$;

②当 $E[w_0 - w^*(T) - c] = 0$时,$\lambda_2 > 0$,且

$$w^*(T) = w_0 - c \tag{10}$$

将式(10)代入式(9)得

$$u'(w_0 - c) = \lambda_1\eta(T) - \lambda_2$$

即

$$\lambda_2 = \lambda_1\eta(T) - u'(w_0 - c)$$

因此

$$\lambda_2 = \max(0,\lambda_1\eta(T) - u'(w_0 - c)) \tag{11}$$

最后,将式(11)代入式(9)得

$$u'(w^*(T)) = \min(\lambda_1\eta(T) - u'(w_0 - c))$$

即

$$w_2^*(T) = I(\min(\lambda_1\eta(T), u'(w_0 - c)))$$

因此, 最优终端财富为

$$w^*(T) = P\{w_0 - w^*(T) < \underline{w}\} w_1^*(T) + [1 - P\{w_0 - w^*(T) < \underline{w}\}] w_2^*(T) \tag{12}$$

下面计算 $P\{w_0 - w^*(T) < \underline{w}\}$. 记 $\underline{\eta} = \dfrac{u'(w_0 - \underline{w})}{\lambda_1}$, 于是

$$\begin{aligned} P\{w_0 - w^*(T) < \underline{w}\} &= P\{I(\lambda_1 \eta(T)) > I(\lambda_1 \underline{\eta})\} \\ &= P\{\ln\eta(T) < \ln\underline{\eta}\} \end{aligned}$$

由式(5)及 Itô微分公式知

$$\ln\eta(T) = \ln\eta_0 - \left(r + \frac{\|\theta\|^2}{2}\right) T - \theta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}(T)$$

$$E[\ln\eta(T)] = \ln\eta_0 - \left(r + \frac{\|\theta\|^2}{2}\right) T$$

因此

$$\begin{aligned} P\{\ln\eta(T) < \ln\underline{\eta}\} &= P\left\{\frac{\ln\eta(T) - E\ln\eta(T)}{\sqrt{Var(\ln\eta(T))}} < \frac{\ln\underline{\eta} - E\ln\eta(T)}{\sqrt{Var(\ln\eta(T))}}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\dfrac{\underline{\eta}}{\eta_0} + \left(r + \dfrac{\|\theta\|^2}{2}\right) T}{\|\theta\| \sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

令 $d = \dfrac{\ln\dfrac{\underline{\eta}}{\eta_0} + \left(r + \dfrac{\|\theta\|^2}{2}\right) T}{\|\theta\| \sqrt{T}}$, 即得

$$P\{w_0 - w^*(T) < \underline{w}\} = \Phi(d)$$

综上, 由式(12)可以得到

$$w^*(T) = I(\lambda_1 \eta(T)) \Phi(d) + I(\min(\lambda_1 \eta(T), u'(w_0 - c))) \times (1 - \Phi(d)) \tag{13}$$

因为任意时刻 t投资者的最优财富 $F(\eta(t), t)$为按最优增长过程 $\eta(t)$投资达到 $w^*(T)$的投资成本[13], 故有

$$\begin{aligned} \eta_0 w_0 &= E[\eta(T) w^*(T) \mid \mathscr{F}_0] \\ &= E\{\eta(T)[I(\lambda_1 \eta(T)) \Phi(d) + I(\min(\lambda_1 \eta(T), u'(w_0 - c))) \times (1 - \Phi(d))] \mid \mathscr{F}_0\} \end{aligned} \tag{14}$$

由此式便可确定 λ_1. 另外, 投资者在投资计划期$[0, T]$内任意时刻 t的最优财富为

$$\begin{aligned} F(\eta(t), t) &= E\left[\frac{\eta(T)}{\eta(t)} w^*(T) \mid \mathscr{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{\eta(t)} E[\eta(T)(I(\lambda_1 \eta(T)) \Phi(d) + I(\min(\lambda_1 \eta(T), u'(w_0 - c))) \times (1 - \Phi(d))) \mid \mathscr{F}_t] \end{aligned} \tag{15}$$

证毕.

定理 2　如果一般效用投资者在投资计划期$[0, T]$内任意时刻 t的最优财富 $F(\eta(t), t)$关于 $\eta(t)$二次连续可微, 关于 t一次可微, 且在$(\eta(t), t)$具有连续偏导数, 那么最优投资组合选择策略为

$$\pi(t) = -w(t)^{-1} \eta(t) \frac{\partial F}{\partial \eta} \sigma^{-1} \theta \tag{16}$$

证明　由多元 Itô微分公式知

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(\eta(t), t) &= \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathrm{d}\eta_t + \frac{\partial F}{\partial t} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \mathrm{d}\langle \eta, \eta \rangle(t) \\ &= \left[-\frac{\partial F}{\partial \eta} \eta(t) r + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta(t)^2 \|\theta\|\right] \mathrm{d}t - \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta(t) \theta^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{B}(t) \end{aligned}$$

另外, 由式(4)知财富过程为

$$\mathrm{d}w(t) = w(t)[(r + (\boldsymbol{b} - r\bar{\mathbf{1}})^{\mathrm{T}} \pi(t)) \mathrm{d}t + \pi^{\mathrm{T}}(t) \sigma \mathrm{d}\boldsymbol{B}(t)]$$

因为这两个过程是等价的, 比较其波动项得

$$-\frac{\partial F}{\partial \eta} \eta(t) \theta^{\mathrm{T}} = w(t) \pi^{\mathrm{T}}(t) \sigma$$

因此

$$\pi(t) = -w(t)^{-1} \eta(t) \frac{\partial F}{\partial \eta} \sigma^{-1} \theta$$

证毕.

显然, 只要知道任意时刻 t的最优财富 $w(t)$, 便可由式(16)求得该时刻的最优投资组合选择策略.

3　对数效用函数下的最优财富和投资组合选择策略

定理 3及定理 4给出了对数效用函数下投资者在投资计划期$[0, T]$内任意时刻 t的最优财富和最优投资组合选择策略的显式表达式.

定理 3　假设效用函数 $u(w) = \ln w$, 则投资者在投资计划期$[0, T]$内任意时刻 t的最优财富 $F(\eta(t), t)$可以显式地表示为

$$F(\eta(t), t) = \frac{1}{\lambda_1 \eta(t)} \Phi(\tilde{d}) + \left\{\frac{1}{\lambda_1 \eta(t)} \Phi(d) + \exp[-r(T - t)] \times\right.$$

$$(w_0-c)(1-\Phi(d))\}(1-\Phi(\tilde{d}))$$

$$\tilde{d}=\frac{\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}-\eta_0\exp\{-rT\}}{\|\theta\|\sqrt{T}}$$

式中, λ_1是非负常数, 由式(14)确定.

证明 因为 $u(w)=\ln w$, 则

$$u'(w)=\frac{1}{w},\quad I(x)=\frac{1}{x}$$

由定理 1得到

$$F(\eta(t),t)=$$
$$\frac{1}{\eta(t)}E\{\eta(T)[I(\lambda_1\eta(T))\Phi(d)+$$
$$I(\min(\lambda_1\eta(T),u'(w_0-c)))(1-\Phi(d))]\mid\mathscr{F}_t\}$$

(1)如果

$$\min(\lambda_1\eta(T),u'(w_0-c))=\lambda_1\eta(T)$$

即 $\eta(T)<\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}$, 则

$$F_1(\eta(t),t)=\frac{1}{\eta(t)}E\{\eta(T)[I(\lambda_1\eta(T))\times$$
$$\Phi(d)+I(\lambda_1\eta(T))(1-\Phi(d))]\}$$
$$=\frac{1}{\lambda_1\eta(t)}$$

(2)如果

$$\min(\lambda_1\eta(T),u'(w_0-c))=u'(w_0-c)$$

即 $\eta(T)\geqslant\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}$, 则

$$F_2(\eta(t),t)=\frac{1}{\eta(t)}E\{\eta(T)[I(\lambda_1\eta(T))\times$$
$$\Phi(d)+I(u'(w_0-c))(1-\Phi(d))]\mid\mathscr{F}_t\}$$
$$=\frac{1}{\eta(t)}E[\frac{1}{\lambda_1}\Phi(d)+$$
$$\eta(T)(w_0-c)(1-\Phi(d))\mid\mathscr{F}_t]$$

由式(5)及 ITÔ微分公式知

$$E[\eta(T)\mid\mathscr{F}_t]=\eta(t)\exp\{-r(T-t)\}$$

因此

$$F_2(\eta(t),t)=\frac{1}{\lambda_1\eta(t)}\Phi(d)+$$
$$\exp\{-r(T-t)\}(w_0-c)(1-\Phi(d))$$

同样地, 由式(5)及 ITÔ微分公式知

$$\eta(T)=\eta_0\exp\left\{-\left(r+\frac{\|\theta\|^2}{2}\right)T-\theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(T)\right\}$$

则

$$E[\eta(T)]=\eta_0\exp\{-rT\}$$
$$Var(\eta(T))=\|\theta\|^2T$$

因此

$$P\left\{\eta(T)<\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}\right\}=P\times$$
$$\left\{\frac{\eta(T)-E[\eta(T)]}{\sqrt{Var[\eta(T)]}}<\frac{\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}-E[\eta(T)]}{\sqrt{Var[\eta(T)]}}\right\}$$
$$=\Phi\left[\frac{\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}-\eta_0\exp(-rT)}{\|\theta\|\sqrt{T}}\right]$$

令

$$\tilde{d}=\frac{\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}-\eta_0\exp(-rT)}{\|\theta\|\sqrt{T}}$$

于是

$$P\left\{\eta(T)<\frac{1}{\lambda_1(w_0-c)}\right\}=\Phi(\tilde{d})$$

综上可得

$$F(\eta(t),t)$$
$$=F_1(\eta(t),t)\Phi(\tilde{d})+F_2(\eta(t),t)(1-\Phi(\tilde{d}))$$
$$=[\frac{1}{\lambda_1\eta(t)}\Phi(d)+\exp\{-r(T-t)\}]\times$$
$$(1-\Phi(\tilde{d}))+\frac{1}{\lambda_1\eta(t)}\Phi(\tilde{d})\tag{17}$$

证毕.

定理 4 假设效用函数 $u(w)=\ln w$, 则投资者在投资计划期$[0,T]$内任意时刻 t的最优投资组合选择策略可以显式地表示为

$$\pi(t)=\frac{1}{\lambda_1\eta(t)w(t)}[\Phi(\tilde{d})+$$
$$\Phi(d)(1-\Phi(\tilde{d}))]\sigma^{-1}\theta$$

证明 由式(17)知

$$\frac{\partial F}{\partial\eta}=-\frac{1}{\lambda_1\eta^2(t)}\times$$
$$[\Phi(\tilde{d})+\Phi(d)(1-\Phi(\tilde{d}))]$$

依定理 2得到

$$\pi(t)=-w(t)^{-1}\eta(t)\frac{\partial F}{\partial\eta}\sigma^{-1}\theta$$
$$=\frac{1}{\lambda_1\eta(t)w(t)}\sigma^{-1}\theta\times$$
$$[\Phi(\tilde{d})+\Phi(d)(1-\Phi(\tilde{d}))]$$

证毕.

4 结束语

本文建立了期望未来损失约束下基于终端财富效用最大化的投资组合选择模型. 运用鞅和优化方法, 得到了一般效用投资者在投资计划期内任意时刻的最优财富和最优投资组合选择策略. 特别是, 在对数效用函数下, 得到了投资者在投资计划期内任意时刻的最优财富和最优投资组合选择策略的显式表达式. 然而, 本文没有考虑市场的摩擦因素, 比如交易成本或税收对投资者最优财富和投资组合选择策略的影响. 因此, 摩擦市场基于期望未来损失的最优投资问题值得进一步研究.

参 考 文 献:

[1] Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk[M]. New York: McGrow-Hill, 1997.

[2] Hull J C. Options, Futures and Other Derivatives[M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000.

[3] Artzner P, Delbaen F, Eber J, *et al*. Coherent measures of risk[J]. Mathematical Finance, 1999, 9(3): 203—228.

[4] Szego G. Measures of risk[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7): 1253—1272.

[5] 高全胜. 金融风险计量理论前沿与应用[J]. 国际金融研究, 2004, (9): 71—78.
Gao Quan-sheng. New development of financial risk measurement and application[J]. Studies of International Finance, 2004, (9): 71—78. (in Chinese)

[6] Rockafellar R T, Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distribution[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7): 1443—1471.

[7] Anderson F, Mausser H, Rosen D, *et al*. Credit risk optimivation with CVaR criterion[J]. Mathematical Programming, 2001, 89(2): 273—291.

[8] Krokmal P, Palmquist J, Uryaserv S. Portfolio optimization with conditional VaR objectives and constraints[J]. Journal of Risk, 2002, (2): 124—129.

[9] Inoue A. On the worst conditional expectation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 286(1): 237—247.

[10] Benati S. Discrete optimization: The computation of the worst conditional expectation[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 155(2): 414—425.

[11] Acerbi D, Tasche D. On the coherence of expected shortfall[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7): 1487—1503.

[12] Basak S, Shaporo A. VaR-based risk management: Optimal policies and asset prices[J]. The Review of Financial Studies, 2001, 14(2): 371—405.

[13] Merton. Continuous-time Finance[M]. London: Blackwell, 1990.

Optimal investment problem under constraint of expected future loss

GUO Fu-hua[1], *DENG Fei-qi*[2]

1. College of Business Administration, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China;
2. Institute of Systems Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China

Abstract: In the standard Black-Scholes type of financial markets, the portfolio selection model based on utility maximization from terminal wealth under the constraint of expected future loss (EFL) is established. The general utility investor's optimal wealth and optimal portfolio selection strategies at any time over an investment planning horizon are derived by using methods of martingale and optimization. Especially, under logarithmic utility, explicit expressions for the investor's optimal wealth and optimal portfolio selection strategies at any time over an investment planning horizon are obtained.

Key words: EFL; utility function; optimal wealth; optimal investment