半参数计量经济联立模型的变窗宽估计理论①

叶阿忠, 吴相波, 黄志刚
(福州大学管理学院, 福州 350002)

摘要: 联立方程模型在经济政策制定、经济结构分析和经济预测方面起重要作用. 文章将半参数单方程计量经济模型的局部线性估计方法与传统联立方程计量经济模型的工具变量估计方法相结合, 在随机设计(模型中所有变量为随机变量)下, 提出了半参数联立方程计量经济模型的局部线性工具变量变窗宽估计方法, 并利用极限理论研究了估计的大样本性质. 结果表明: 参数分量的估计具有一致性和渐近正态性且收敛速度为 $n^{-1/2}$; 非参数分量估计在内点处具有一致性和渐近正态性, 其收敛速度达到了非参数函数估计的最优收敛速度.

关键词: 半参数模型; 局部线性估计; 工具变量估计; 变窗宽估计; 渐近正态性
中图分类号: F224　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2009)02-0060-07

0 引　言

计量经济联立模型在经济政策制定、经济结构分析和经济预测方面起重要作用[1,2]. 传统的线性或非线性计量经济联立模型[1~3]容易造成单方程的设定误差, 致使联立方程的累积误差较大, 不能很好地反映现实中的经济现象. 目前非参数计量经济联立模型的估计理论已取得较大进展[4~8], 但已有的研究存在两方面的共同局限性, 一是假定经济变量的关系是未知的, 而现实中的经济变量的关系是部分已知的; 二是模型非参数回归函数估计趋于实际量的收敛速度慢. 变窗宽估计的窗宽可随着观察点的不同而不同, 这样有的附近数据多的点的窗宽可取小一些, 附近数据少的点的窗宽可取大一些, 从而改进估计效率[8~10]. 本文将非参数计量经济联立模型的变窗宽估计理论[8]进行扩展, 提出半参数计量经济联立模型的局部线性工具变量变窗宽估计, 并证明了参数分量估计的渐近正态性和一致性, 且其收敛速度为 $n^{-1/2}$ (与经典线性回归模型参数的收敛速度一致[3,11]), 还证明了非参数分量估计(在内点处)的渐近正态性和一致性, 它的收敛速度达到了非参数函数估计的最优收敛速度. 本文的研究表明: 由于半参数模型中的部分解释变量与被解释变量的关系已知, 所以, 其参数分量和非参数分量估计的收敛速度快于非参数模型回归函数估计的收敛速度, 这与经典的半参数单方程回归模型的结论一致[12,13]. 从而, 本文建立的半参数计量经济联立模型的工具变量变窗宽估计理论有效地克服和弥补了已有的非参数计量经济联立模型估计理论的缺陷, 使得联立模型的估计理论更具有实用价值.

1 局部线性工具变量变窗宽估计

设半参数计量经济联立模型的某结构式方程为

$$Y_i = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B} + m(\boldsymbol{P}_i) + u_i \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (1)$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是未知参数向量, $m(\cdot)$ 是未知函数, $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{P}_1, Y_1), \cdots, (\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{P}_n, Y_n)$ 是在 $R^{d+1}(d = d_x + d_p)$

① 收稿日期: 2007-01-26; 修订日期: 2007-11-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70371025); 教育部人文社会科学研究资助项目(02JA790014).
作者简介: 叶阿忠(1963—), 男, 福建沙县人, 博士, 教授. Email: ye2004@fzu.edu.cn

上取值的独立同分布的随机变量向量序列, u_i 是均值为零且相互独立的随机变量. 假定解释变量向量 $\boldsymbol{X}_i = (X_{1i}, \cdots, X_{d_x i})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{P}_i = (P_{1i}, \cdots, P_{d_p i})^{\mathrm{T}}$ 中某些变量是内生变量与随机误差项 u_i 相关, 即

$$E(\boldsymbol{X}_i u_i) \neq 0, \quad E(\boldsymbol{P}_i u_i) \neq 0 \tag{2}$$

经典的半参数回归模型假定解释变量与随机误差项不相关[12,13], 但在联立模型中该假定被破坏[1~3], 或是与被解释变量关系已知的解释变量 $\boldsymbol{X}_i = (X_{1i}, \cdots, X_{d_x i})^{\mathrm{T}}$ 中有些变量与随机误差项相关, 或是与被解释变量关系未知的解释变量 $\boldsymbol{P}_i = (P_{1i}, \cdots, P_{d_p i})^{\mathrm{T}}$ 中有些变量与随机误差项相关. 假定 $d_p \leqslant 3$, 设非参数函数 m 及其一阶、二阶导数有界连续, 则其估计的最优收敛速度为 $n^{-\frac{n}{d_p+4}}$[14,15] (d_p 过大将会降低 m 估计的收敛速度). 设 $\boldsymbol{Z}_1, \cdots, \boldsymbol{Z}_n$ 是 $\boldsymbol{R}^{d+1}$ 上独立同分布的随机变量向量, 其中 $\boldsymbol{Z}_i = (Z_{1i}, \cdots, Z_{d+1i})^{\mathrm{T}}$. 假设

$$E(\boldsymbol{Z}_i u_i) = 0, \quad E(\boldsymbol{Z}_i u_i \mid \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{P}_i) = 0$$

称 $\boldsymbol{Z}_i$ 为工具变量向量.

设 $f_{\boldsymbol{P}}(\cdot)$ 是 $\boldsymbol{P}_i = (P_{1i}, \cdots, P_{d_p i})^{\mathrm{T}}$ 的密度函数, $f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}) > 0$ 有凸支撑 $\mathrm{supp}(f_{\boldsymbol{P}}) \subset R^{d_p}$, $f_{\boldsymbol{P}}$ 是有界连续函数, 其一阶导数连续; $E(Z_{ji} \mid \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{p})$、$E((Z_{ji})^2 \mid \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{p})$ 和 $E(Z_{ji}Z_{ki}(u_i)^2 \mid \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{p})$ 有界连续; 设 $K(\cdot)$ 是 d_p 维密度函数, 令

$$K_{h_n}(\boldsymbol{p}) = h_n^{-d_p} K(h_n^{-1}\boldsymbol{p})$$

称 K 为核函数, $K_{h_n/\alpha(\boldsymbol{P}_i)}(\cdot)$ 为核权函数, h_n 为不变窗宽, $\alpha(\boldsymbol{P}_i)$ 为变窗宽. 若掌握解释变量 $\boldsymbol{P}_i$ 分布的一些信息, 对密度大的点取较小的窗宽, 对密度小的点取较大的窗宽, 这样采用与掌握的信息有关的变窗宽估计将会提高估计的效率[8~10]. 假定核函数 K 有紧支撑

$$\mathrm{supp}(K) \subset \prod_{i=1}^{d_p} [-1, 1] \subset R^{d_p}$$

且

$$K(\boldsymbol{p}) \geqslant 0, \quad \int K(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = 1,$$

$$\int K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0, \quad \int K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mu_2(K)\boldsymbol{I}$$

其中 $\mu_2(K) \neq 0$, $\boldsymbol{I}$ 为单位阵.

定义 1 给定 $\boldsymbol{p} \in \mathrm{supp}(f_P) \subset R^{d_p}$ 和窗宽 h, 记

$$\Theta_{\boldsymbol{p},h,\alpha} = \{\boldsymbol{z}: (\boldsymbol{p} + h(\alpha(\boldsymbol{p}))^{-1}\boldsymbol{z}) \in \mathrm{supp}(f_P)\} \cap \mathrm{supp}(K)$$

若存在 $h_0 > 0$, 使得当 $h \leqslant h_0$ 时

$$\Theta_{p,h,\alpha} = \mathrm{supp}(K)$$

则称 $\boldsymbol{p}$ 为 $\mathrm{supp}(f_P)$ 的内点, 否则称之为边界点.

约定 $\boldsymbol{i}$ 分别是元素全为 1的矩阵或列向量或行向量.

条件 1 $h_n = c \cdot n^{-1/(d_p+4)}$ (c 为某常数), $\alpha(\cdot)$ 有界且 $\min_z \alpha(\boldsymbol{z}) > 0$

条件 2 $(\boldsymbol{Z}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_{p,\alpha} \Phi_p)^{-1}$ 存在, 其中

$$\boldsymbol{Z}_* = (\boldsymbol{Z}_{*1}, \cdots, \boldsymbol{Z}_{*n})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Z}_{*i} = (Z_{d_x+1i}, \cdots, Z_{d+1i})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{W}_{p,\alpha} = \mathrm{diag}\{K_{\frac{h_n}{\alpha(\boldsymbol{P}_1)}}(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{p}), \cdots, K_{\frac{h_n}{\alpha(\boldsymbol{P}_n)}}(\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{p})\}$$

$$\Phi_p = (\boldsymbol{P}_{p1}, \cdots, \boldsymbol{P}_{pn})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{pi} = (1, (\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{p})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

条件 3

$$E[\boldsymbol{Z}_{\#i}(m(\boldsymbol{P}_i) - E[m(\boldsymbol{P}_i) \mid \boldsymbol{Z}_{*i}])] = 0$$

其中 $\boldsymbol{Z}_{\#i} = (Z_{1i}, \cdots, Z_{r_x i})^{\mathrm{T}}$.

定义 2 在条件 1- 2下, 模型 (1) 中参数 $\boldsymbol{B}$ 的局部线性工具变量变窗宽估计 $\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha)$ 是下列线性方程组的解

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - m_1(\boldsymbol{P}_i, \alpha) - (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{P}_i, \alpha))\boldsymbol{B}] Z_{ji} = 0$$

$$j = 1, \cdots, d_x \tag{3}$$

其中

$$m_1(\boldsymbol{p}, \alpha) = \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Z}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_{p,\alpha} \Phi_p)^{-1} \boldsymbol{Z}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_{p,\alpha} \boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p}, \alpha) = \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Z}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_{p,\alpha} \Phi_p)^{-1} \boldsymbol{Z}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_{p,\alpha} \boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

定义 3 在条件 1- 2下, 模型 (1) 中非参数函数 $m(\cdot)$ 的局部线性工具变量变窗宽估计为

$$\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p}, \alpha) = m_1(\boldsymbol{p}, \alpha) - \boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p}, \alpha)\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha) \tag{4}$$

2 局部线性工具变量变窗宽估计的性质

引理 1 在条件 1- 2下, $m_1(\boldsymbol{p}, \alpha)$ 和 $\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p},$

$\alpha)$分别是$E(Y|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p})$和$E(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p})$的一致估计且收敛速度都是$n^{-\frac{2}{d_p+4}}(\frac{2}{d_p+4}>\frac{1}{4})$.

证明 由文献[8]中定理1的推论2可推得.

引理 2 (Chebychev不等式) 设X为随机变量, 则对于任意$\varepsilon>0$

$$P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathrm{var}(X)}{\varepsilon^2}$$

定理 1 在条件1–3下

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha)-\boldsymbol{B})\xrightarrow{L} N(0,(\Gamma^{\mathrm{T}}\Gamma)^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\Gamma(\Gamma^{\mathrm{T}}\Gamma)^{-1}) \qquad (5)$$

其中

$$\boldsymbol{V}=E[\boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]$$

$$\boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{Z}_{\#i}[Y_i-E(Y_i|\boldsymbol{Z}_{*i})-(\boldsymbol{X}_i-E(\boldsymbol{X}_i|\boldsymbol{Z}_{*i}))\boldsymbol{B}]$$

$$\Gamma=E[\boldsymbol{Z}_{\#i}(\boldsymbol{X}_i-E(\boldsymbol{X}_i|\boldsymbol{Z}_{*i}))^{\mathrm{T}}]$$

证明 由引理1知, $m_1(\boldsymbol{p},\alpha)$和$m_2(\boldsymbol{p},\alpha)$是一致估计. 再应用文献[16]中定理3或文献[17]的定理1可得到本定理的结论.

注 1 由定理1可知, 参数分量估计的收敛速度为$n^{-1/2}$, 与经典线性回归模型参数的收敛速度一致[3,11].

推论 1 在条件1–3下, $\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha)\xrightarrow{P}\boldsymbol{B}$.

证明 由定理1和引理2容易推得.

从文献[8]的引理3可知

$$\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(n^{-1}\boldsymbol{Z}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{p,\alpha}\Phi_p)^{-1}=\Psi(\boldsymbol{p},\alpha)+o_p(\boldsymbol{1}) \qquad (6)$$

其中

$$\Psi(\boldsymbol{p},\alpha)=\Psi_1(\boldsymbol{p},\alpha),\Psi_2(\boldsymbol{p},\alpha)$$

$$\Psi_1(\boldsymbol{p},\alpha)=[\boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{p})-\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{p},\alpha)(\boldsymbol{A}_{22}(\boldsymbol{p},\alpha))^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(\boldsymbol{p})]^{-1}$$

$$\Psi_2(\boldsymbol{p},\alpha)=-\frac{\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{p},\alpha)}{\boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{p})}\times\frac{1}{\boldsymbol{A}_{22}(\boldsymbol{p},\alpha)-\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{p},\alpha)\frac{\boldsymbol{A}_{21}(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{p})}}$$

$$\boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{p})=f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})g_0(\boldsymbol{p})$$

$$\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{p},\alpha)=\alpha(\boldsymbol{p})^{-3}\{f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})g_0(\boldsymbol{p})\times\int_{\mathrm{supp}(K)}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_K(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}+\mu_2(K)\times[d_pf_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})g_0(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})+\alpha(\boldsymbol{p})(g_0(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_{f_P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})+f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_{g_0}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}))]\}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}(\boldsymbol{p})=f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{p})$$

$$\boldsymbol{A}_{22}(\boldsymbol{p},\alpha)=\alpha(\boldsymbol{p})^{-3}\{f_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{p})\times\int_{\mathrm{supp}(K)}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_K(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}+\mu_2(K)\times[d_pf_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})g_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})+\alpha(\boldsymbol{p})(g_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_{f_P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})+f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_{g_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}))]\}$$

$$[g_0(\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{p}))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})=E(\boldsymbol{Z}_{*i}|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p})$$

记$\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p},\alpha,\boldsymbol{B})=m_1(\boldsymbol{p},\alpha)-\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p},\alpha)\boldsymbol{B}$.

定理 2 在条件1–2下, 设

$$\boldsymbol{p}\in\mathrm{supp}(f_P)\subset R^{d_p}$$

为内点, 则

$$n^{\frac{2}{d_p+4}}[\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p},\alpha,\boldsymbol{B})-m(\boldsymbol{p})]\xrightarrow{L}N(\frac{c^2}{2}\mu_2(K)a(\boldsymbol{p},\alpha),c^{-d_p}R(K)b(\boldsymbol{p},\alpha)) \qquad (7)$$

其中

$$a(\boldsymbol{p},\alpha)=\frac{f_P(\boldsymbol{p})s\{\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{p})\}\Psi(\boldsymbol{p},\alpha)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})}{\alpha(\boldsymbol{p})^2}$$

$$b(\boldsymbol{p})=(\alpha(\boldsymbol{p}))^{d_p}f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})\Psi(\boldsymbol{p},\alpha)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\Psi(\boldsymbol{p},\alpha)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=E(u_i^2\boldsymbol{Z}_{*i}\boldsymbol{Z}_{*i}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{p})$$

$s\{\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{p})\}$为矩阵$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{p})=[\frac{\partial^2m(\boldsymbol{p})}{\partial p_i\partial p_j}]_{d_p\times d_p}$的对角元素之和.

证明 即文献[8]中定理1.

引理 3 设$\{X_n\}$是一个随机变量序列且$X_n\xrightarrow{p}c$, 设$\{Y_n\}$是另一个随机变量序列且$Y_n\xrightarrow{L}Y$, 则

$$X_n+Y_n\xrightarrow{L}c+Y,\quad X_nY_n\xrightarrow{L}cY$$

证明 该引理的结论是文献[3]Proposition 7.3(b)的特例.

定理 3 在条件1–3下, 设$\boldsymbol{p}\in\mathrm{supp}(f_P)\subset R^{d_p}$为内点, 则

$$n^{\frac{2}{d_p+4}}[\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p},\alpha)-m(\boldsymbol{p})]\xrightarrow{L}N(\frac{c^2}{2}\mu_2(K)a(\boldsymbol{p},\alpha),c^{-d_p}R(K)b(\boldsymbol{p},\alpha)) \qquad (8)$$

证明 因为

$$n^{\frac{2}{d_p+4}}[\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p},\alpha)-\boldsymbol{m}(\boldsymbol{p})]=n^{\frac{2}{d_p+4}}[\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p},\alpha,\boldsymbol{B})-\boldsymbol{m}(\boldsymbol{p})]-n^{\frac{2}{d_p+4}}\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p},\alpha)[\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha)-\boldsymbol{B}]$$

由引理 1

$$\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p},\alpha)\longrightarrow E(\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p})$$

所以, 应用引理 3可推出

$$\sqrt{n}\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p},\alpha)[\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha)-\boldsymbol{B}]\xrightarrow{L}N(0,(E(\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}))^2(\Gamma^{T}\Gamma)^{-1}\Gamma^{T}\boldsymbol{V}\Gamma(\Gamma^{T}\Gamma)^{-1})$$

再由 Chebychev不等式 (引理 2) 可知

$$n^{\frac{2}{d_p+4}}\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p},\alpha)(\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha)-\boldsymbol{B})=n^{\frac{2}{d_p+4}-\frac{1}{2}}\times n^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{p},\alpha)(\hat{\boldsymbol{B}}_{IV}(\alpha)-\boldsymbol{B})\xrightarrow{P}0$$

结合定理 2再次应用引理 3可知定理 3成立.

注 **2**　由定理 2可知, 非参数分量估计的收敛速度为 $n^{-\frac{2}{d_p+4}}$ (达到了估计非参数函数 m 的最优收敛速度[14,15]), 快于非参数模型回归函数估计的收敛速度 $n^{-\frac{2}{d_p+d_x+4}}$. 另外, 参数分量估计的收敛速度为 $n^{-1/2}$. 所以, 半参数模型的参数分量和非参数分量估计的收敛速度都快于非参数模型估计的收敛速度. 从而, 半参数模型可有效地提高模型估计的收敛速度.

推论 **2**　在定理 3的条件下

$$\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p},\alpha)\xrightarrow{P}m(\boldsymbol{p})$$

证明　由定理 3和引理 2容易推得.

由定理 3可推得 $\hat{m}_{IV}(\boldsymbol{p},\alpha)$ 的渐近均方误差为

$$AMSE(\boldsymbol{p},\alpha,c)=\frac{1}{n^{\frac{4}{d_p+4}}}\times\left\{\left[\frac{c^2}{2}\mu_2(K)a(\boldsymbol{p},\alpha)\right]^2+c^{-d_p}R(K)b(\boldsymbol{p},\alpha)\right\}\tag{9}$$

进而得到 $\hat{m}_{IV}(\cdot,\alpha)$ 的渐近均方积分误差

$$AMSE(\alpha,c)=\int AMSE(\boldsymbol{p},\alpha,c)w(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p}\tag{10}$$

其中 $w(\cdot)$ 为某权重函数.

定理 **4**　在条件 1– 3下, 使得 $\hat{m}_{IV}(\cdot,\alpha)$ 的渐近均方积分误差达最小的最优不变窗宽为

$$h_{opt}(\alpha)=\left[\frac{d_pR(K)B(\alpha)}{(\mu_2(K))^2A(\alpha)}\right]^{\frac{1}{d_p+4}}\cdot n^{-\frac{1}{d_p+4}}$$

其中

$$A(\alpha)=\int a(\boldsymbol{p},\alpha)^2w(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

$$B(\alpha)=\int b(\boldsymbol{p},\alpha)w(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

证明　由式 (9)和 (10)及文献 [8] 中引理 2和 3的证明容易获证本定理.

3　实　例

影响被解释变量 y 的因素可分为两个部分, 即 x 和 p. 根据经验或历史资料可以认为: 因素 x 是主要的, 且 y 同 x 是具有明确关系的; 而 p 则是某种干扰因素 (或者看作协变量), 它同 y 的关系是完全未知的, 但是又没有理由将其归入误差项. 此时如果用非参数回归模型加以处理, 则会失去太多的信息, 不能揭示 y 同 x 的关系; 若仅采用参数回归模型, 一般拟合效果较差. 半参数回归模型的方法融合了参数回归模型方法和非参数回归模型方法, 但并非这两类方法的简单叠加. 在不少实际问题中, 它可能是一个更接近真实、更能充分利用数据中所提供的信息的方法. 由于解释变量可能出现内生变量, 它与随机误差项相关, 采用本文提出的局部线性工具变量变窗宽估计可以有效改变模型估计的有偏性, 并提高估计的精度.

本节对中国宏观经济建立如下简单的半参数计量经济联立模型并进行局部线性工具变量变窗宽估计

$$\begin{aligned}C_t&=\beta_1Y_t+\beta_2C_{t-1}+m(C_{t-2})+u_t\\I_t&=\gamma_1Y_{t-1}+\gamma_2I_{t-1}+\phi(Y_t)+v_t\\Y_t&=C_t+I_t+G_t\ (t=1980,1981,\cdots,2005)\end{aligned}\tag{11}$$

其中: 国内生产总值 Y, 居民消费总额 C 和投资总额 I 为内生变量, 政府消费 (为了实现数据的平衡, 将净出口也包含其中)G 为外生变量. 数据见表 1(来自《中国统计年鉴 2006》中支出法国内生产总值的统计表).

表 1 中国宏观经济数据 单位: 亿元

Table 1 The macroeconomic data in China Unit: 100 million

年份	Y	C	I	年份	Y	C	I
1978	3 605.6	1 759.1	1 377.9	1992	27 565.2	13 000.1	10 086.3
1979	4 092.6	2 011.5	1 478.9	1993	36 938.1	16 412.1	15 717.7
1980	4 592.9	2 331.2	1 599.7	1994	50 217.4	21 844.2	20 341.1
1981	5 008.8	2 627.9	1 630.2	1995	63 216.9	28 369.7	25 470.1
1982	5 590.0	2 902.9	1 784.2	1996	74 163.6	33 955.9	28 784.9
1983	6 216.2	3 231.1	2 039.0	1997	81 658.5	36 921.5	29 968.0
1984	7 362.7	3 742.0	2 515.1	1998	86 531.6	39 229.3	31 314.2
1985	9 076.7	4 687.4	3 457.5	1999	90 964.1	41 920.4	32 951.5
1986	10 508.5	5 302.1	3 941.9	2000	98 749.0	45 854.6	34 842.8
1987	12 277.4	6 126.1	4 462.0	2001	108 972.4	49 213.2	39 769.4
1988	15 388.6	7 868.1	5 700.2	2002	120 350.3	52 571.3	45 565.0
1989	17 311.3	8 812.6	6 332.7	2003	136 398.8	56 834.4	55 963.0
1990	19 347.8	9 450.9	6 747.0	2004	160 280.4	63 833.5	69 168.4
1991	22 577.4	10 730.6	7 868.0	2005	186 700.9	70 906.0	79 559.8

利用线性联立方程计量经济学模型的识别理论, 容易判断: 消费方程和投资方程都是过度识别的方程, 因而模型是可以识别的. 因为投资方程的估计与消费方程的估计是类似的, 下面仅对消费方程进行局部线性工具变量变窗宽估计, 取 G_t, C_{t-1}, C_{t-2}, I_{t-1} 为工具变量, 窗宽为 $\frac{4000+4000\frac{i}{n}}{\sqrt[5]{n}}\ (i=1, \cdots, n, n=26)$, 则参数 β_1 和 β_2 的局部线性工具变量变窗宽估计为

$$\hat{\beta}_{1IV} = 0.223\,7,\quad \hat{\beta}_{2IV} = 0.484\,7$$

非参数函数 $m(\cdot)$ 的局部线性工具变量变窗宽估计见表 2, 平均拟合误差为 66. 图 1是 m 的估计除以其自变量. 估计结果表明: 收入、消费滞后 1期和消费滞后 2期对消费当期的影响为正; 收入增加 1元消费增加 0.223 7元, 消费滞后 1期增加 1元, 消费当期增加 0.484 7元; m 不是其自变量的线性函数, 消费滞后 2期与消费当期的关系是非线性的关系.

表 2 消费方程的非参数函数在 **1980—2005**年观察点的估计结果

Table 2 Results of the estimator of the nonparametric function for consumption equation in 1980—2005

年份	m 的估计	年份	m 的估计	年份	m 的估计
1980	0.171 7	1989	0.419 6	1998	1.816 2
1981	0.176 4	1990	0.540 4	1999	1.975 2
1982	0.185 1	1991	0.611 1	2000	2.111 5
1983	0.195 3	1992	0.644 2	2001	2.218 2
1984	0.207 5	1993	0.809 2	2002	2.428 4
1985	0.221 6	1994	1.107 5	2003	2.652 1
1986	0.256 8	1995	1.568 5	2004	2.924 0
1987	0.328 0	1996	1.765 0	2005	3.186 2
1988	0.373 3	1997	1.716 0		

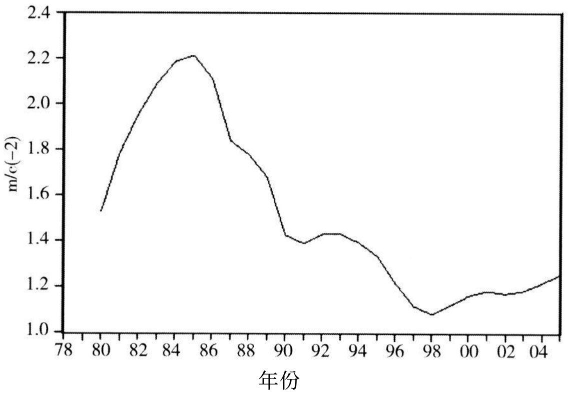

图 1 m 的估计除以其自变量

Fig. 1 The values of $\hat{m}(C_{t-2})/C_{t-2}$

对消费方程的参数模型进行两阶段最小二乘估计如下

$$\hat{C}_t = \underset{(1.723\ 820)}{489.917\ 8} + \underset{(2.029\ 5)}{0.059\ 228}Y_t + \underset{(8.585\ 308)}{1.541\ 205}C_{t-1} - \underset{(-4.610\ 582)}{0.666\ 848}C_{t-2} \quad (12)$$

其中: 参数估计的下方为 t统计量. 平均拟合误差为 1 432 显然, 参数模型的参数估计结果与经济意义不符. 可见, 非参数联立方程模型的局部线性工具变量变窗宽估计的拟合程度大大好于参数联立方程模型的两阶段最小二乘估计的拟合程度, 从图 1消费函数显然不是线性函数也可得到此结论. 因而, 消费方程采用线性形式将造成不必要的人为设定误差.

4 结束语

本文的学术贡献在于将非参数计量经济联立模型的局部线性工具变量变窗宽估计理论推广到半参数的情形. 提出半参数计量经济联立模型的局部线性工具变量变窗宽估计, 证明了参数分量和非参数分量估计 (在内点处) 的渐近正态性和一致性, 并得到它们的收敛速度. 由于半参数模型参数分量和非参数分量估计的收敛速度都快于非参数模型估计的收敛速度, 从而, 半参数模型有效地提高模型估计的收敛速度. 由于现实中的经济变量的关系是部分已知的, 所以, 本文建立的半参数计量经济联立模型的工具变量变窗宽估计理论不仅有效地克服和弥补了非参数计量经济联立模型估计收敛速度慢的缺陷, 而且还使得联立模型的估计理论更具有实用价值.

参 考 文 献:

[1]李子奈, 潘文卿. 计量经济学 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005. 176—214

Li Zi-nai, Pan Wen-qing. Econometrics (Second Edition) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2005. 176—214. (in Chinese)

[2]李子奈, 叶阿忠. 高等计量经济学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000. 104—114.

Li Zi-nai, Ye A-zhong. Advance Econometrics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000. 104—114. (in Chinese)

[3]Hamilton J D. Time Series Analysis[M]. Princeton: Princeton University Press, 1994. 233—252.

[4]Newey W K, Powell J L, Vella F. Nonparametric estimation of triangular simultaneous equations models[J]. Econometrica, 1999, 67(3): 565—603

[5]叶阿忠. 非参数计量经济学 [M]. 天津: 南开大学出版社, 2003. 207—243.

Ye A-zhong. Nonparametric Econometrics[M]. Tianjin: Nankai University Press, 2003. 207—243. (in Chinese)

[6]叶阿忠, 李子奈. 非参数计量经济联立模型的局部线性工具变量估计 [J]. 清华大学学报 (自然科学版), 2002, 42 (6): 714—717.

Ye A-zhong, Li Zi-nai. Local linear estimation with instrumental variables for nonparametric simultaneous equations econometric model[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2002, 42(6): 714—717. (in Chinese)

[7]叶阿忠. 非参数计量经济联立模型的局部线性广义矩估计 [J]. 中国管理科学, 2003, 11(2): 40—43.

Ye A-zhong. Local linear estimation by GMM for nonparametric simultaneous equation models in econometrics[J]. Chinese Journal of Management Science, 2003, 11(2): 40—43. (in Chinese)

[8]叶阿忠. 非参数计量经济联立模型的变窗宽估计理论 [J]. 管理科学学报, 2004, 7(1): 30—37.

Ye A-zhong. Theory of variable bandwidth estimation for non-parametric simultaneous equation econometric models[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(1): 30—37. (in Chinese)

[9] Jianqing F, Gijbels I. Variable bandwidth and local linear regression smoothers[J]. The Annals of Statistics, 1992, 20(4): 2008—2036.

[10] Jianqing F, Gijbels I. Local Polynomial Modelling and It's Applications[M]. London: Chapman & Hall, 1996. 57—107.

[11] White H. Asymptotic Theory for Econometricians[M]. San Diego: Academic Press, 1984. 61—105.

[12] Pagan A, Ullah A. Nonparametric Econometrics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 95—116.

[13] Horowitz J L. Semiparametric Methods in Econometrics[M]. New York: Springer-Verleg, 1998. 5—54.

[14] Charles J S. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression[J]. Annals of Statist, 1982, 10: 1040—1053.

[15] Stone C J. Optimal convergence rates for nonparametric estimators[J]. Annals of Statist, 1980, 8: 1348—1360.

[16] Pakes A, Olley S. A limit theorem for a smooth class of semiparametric estimators[J]. Journal of Econometrics, 1995, 65: 295—332.

[17] Park S. Semiparametric instrumental variables estimation[J]. Journal of Econometrics, 2003, 112: 381-399.

Theory of variable bandwidth estimation for semi-parametric simultaneous equations econometric models

YE A-zhong, WU Xiang-bo, HUANG Zhi-gang

College of Management, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China

Abstract: Econometric simultaneous equation models play an important role in making economic policies, analyzing economic structure and economic forecasting. This paper presents an estimation method for semi-parametric simultaneous equations econometric model. A local linear estimation with variable bandwidth was used with instrumental variables, when all variables were random. A local linear estimation method for semi-parametric single equation model was combined with the traditional instrumental variable method for simultaneous equations model. The properties under large sample size were studied by using the asymptotic theory. The results show that the estimators of the parameters have consistency and asymptotic normality, and their convergence rates are equal to $n^{-1/2}$. Further the estimator of the nonparametric function has the consistency and asymptotic normality in interior points and its rate of convergence is equal to the optimal convergence rate of the nonparametric function estimation.

Key words: semi-parametric models; local linear estimation; instrumental variable estimation; variable bandwidth estimation; asymptotic normality