第 12卷第 4期 管 理 科 学 学 报 Vol 12 No. 4
2009年 8月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Aug. 2009

可赎回可转换贴现债券完全拆解定价法①

周其源[1,2], 吴冲锋[1], 刘海龙[1]
(1. 上海交通大学安泰经济与管理学院金融工程研究中心, 上海 200052;
2. 太平洋资产管理有限公司, 上海 200120)

摘要: 在 Black-Scholes期权模型假设框架下, 依据风险中性定价原理, 采用完全拆解法, 将可赎回可转换贴现债券完全拆解为以下 5种简单证券的组合: 一种与之对应的普通贴现债券, 两种立即支付型规则美式二值买权、一种规则上敲出买权和一种延迟支付型规则美式二值买权, 并据之推导出定价解析式. 不仅为认知其价值组成提供了全新视角, 而且相对现有数值定价法, 该解析式大大提高定价效率.

关键词: 可赎回可转换贴现债券; 完全拆解法; 上敲出买权; 美式二值买权; 衍生证券定价
中图分类号: F224; C931 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2009)04-0135-10

0 引 言

根据交易所统计数据, 自 2003年以来, 发行可转换债券 (转债) 已经成为中国上市公司再融资的主要渠道之一. 由于转债是一种同时涉及债券、股票和期权的复杂混合衍生证券, 为其定价十分复杂: 1)转债在本质上是在债券基础上内含多种股票期权, 本身既具债性, 又具股性, 而且随着标的股价变化而此消彼长; 2)转债所内含的多种股票期权之间相互作用, 并不能独立开来, 不能直接应用 Black-Scholes期权定价公式.

尽管如此, 可转换债券定价问题, 在本质上仍然属于无套利定价理论的应用范畴. 1977年, Ingersoll[1]最早将无套利定价理论应用到相对简单的非赎回可转换债券和可赎回可转换贴现债券的定价问题, 提出了在理论上较为合理的基于公司价值的单因子无套利定价模型. 在该基础上的后续研究, 或者放宽其前提假设, 或者考虑更多转债条款, 或者考虑更多风险因子. 例如, Brennan 和 Schwartz[2]最早允许存在离散股利、离散债息、赎回硬约束条件以及转换价格变化, 然而, 由于边界条件过于复杂, 他们不得不采用有限差分法求解. Nyborg[3]最早允许债息率浮动和存在高级债券. 事实上, 利率本身也是时变的, 为此, Brennan 和 Schwartz[4]通过引入 Vasicek利率模型[5], 最早提出了在理论上更加合理的基于公司价值和利率的两因子无套利定价模型. 随后, 更多学者采用了更为合理的利率模型来代替 Vasicek利率模型, 如 Carayannopoulos[6]采用 CIR利率模型[7], Lvov 等[8]采用 HW 利率模型[9].

上述基于公司价值的无套利定价模型, 尽管在理论上满足自身一致性, 很是合理. 然而, 在实践中, 这些模型的可操作性很差, 这是因为: 并非公司所有资产都是可交易的, 以致很难估计公司价值及其波动率等相关参数. 为此, McConnell和 Schwartz[10]提出了更具实用性的基于标的股价的单因子无套利定价模型. 然而, 当以标的股票作为标的资产时, 由于股价不可能为负, 这就排除了未到期破产和到期违约的可能性. 为了弥补这一缺陷, 他们不得不采用在理论上并不能满足自身一致性的信用利差法. 随后, Tsiveriotis和 Fernandes[11]

① 收稿日期: 2005-09-28; 修订日期: 2007-03-20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70671068).
作者简介: 周其源 (1975—), 男, 山东菏泽人, 博士. Email: qiyuanzhousun@263.net

利用价值分解法大大降低了信用利差法所导致的自身不一致性. 同样地, 为了兼顾利率的时变性, Yigitbasioglu[12]采用 CIR 利率模型提出了基于标的股价和利率的两因子无套利定价模型. 随后, Davis和 Lischka[13], Barone-Adesi等[14]则采用了更为合理的 HW 利率模型.

实证表明, 如 Kang和 Lee[15]以及 Hamilton等[16], 在为可转换债券定价时, 也必须同时考虑其信用风险. 尽管采用 Tsiveriotis和 Fernandes[11]所提出的价值分解法可以显著降低信用利差法所导致的自身不一致性, 然而, 信用利差本身只是在实际市场中直接观察到的一个数值, 以之调整贴现率, 在理论上并无合理解释; 此外, 信用利差本身也是时变的, 难以估计. 为此, Davis 和 Lischka[13], 以及 Ayache等[17], 采用更为合理的简式方法 (reduced-form approach) 考虑其信用风险, 在理论上给出了更为合理的基于股价的单因子无套利定价模型. 在其基础上, Yigitbasioglu和 Alexander[18]通过引入 CIR 利率模型, 又将之扩展为基于股价和利率的两因子无套利定价模型.

综上, 转债定价模型已经发展得相当完善, 其平均定价误差已经可以被控制在 5% 以下 (Barone-Adesi等[14]). 然而, 为了求解上述模型, 必须用到有限差分法、Monte Carlo模拟法或有限元法等较为复杂的数值方法. 在瞬息万变的当前时代, 这些方法的定价效率尚有待提高. 此外, 这些定价模型未能给出可赎回可转换贴现债券的基本价值组成.

为此, 本文认为, 就中国投资者群体对转债价值的认知现状而言, 最好能够将转债这一复杂混合衍生证券完全拆解为易于理解的多种相对简单证券的组合, 同时, 最好能够获得易于操作的定价解析式, 就像 Black-Scholes期权定价公式. 在这一思路下, 本文以相对基础的可赎回可转换贴现债券 (CCDB, callable convertible discount bonds) 作为研究对象, 针对以往拆解方法不够完全, 以致误差较大的缺点, 转变拆解思路, 不再以普通期权, 而是以奇异期权 (exotic options) 来拆解. 最终, 将 CCDB完全拆解为 5种相对简单证券的组合. 这完全拆解不仅为认知其价值组成提供了全新视角, 而且据此可以推导出其定价解析式.

1 定价解析式研究现状

可以把关于转债定价解析式的主要文献归为两类. 一类是直接求解所建无套利定价模型. Ingersoll[1]最早依据基于公司价值的单因子无套利模型, 获得不支付股利情况下非赎回可转换贴现债券和 CCDB 的定价解析式. 在其基础上, Nyborg[3]通过假定公司价值由无风险资产和风险资产两部分组成, 分别获得支付债息或存在股利时非赎回可转换债券的定价解析式. 然而, 他们都是以公司价值作为标的资产, 由于难以估计公司价值波动率等参数, 这些解析式难以实际应用.

另一类是, 通过近似拆解法获取近似定价解析式. 早期, 如 Baumol等[19]直接将非赎回可转换债券简单地近似拆解为纯债券和以该纯债券价值为执行价格的欧式买权, 或者拆解为所能够转换的相应数量的股票和以对应纯债券价值为执行价格的欧式卖权. 林义相等[20]将可赎回可转换债券近似拆解为 3种证券: 纯债券, 投资者拥有的以转换价格为执行价格的转换权 (美式买权) 和发行者拥有的以赎回触发价格为执行价格的赎回权 (美式买权). 然而, 他们把转换权与赎回权看作相互独立的普通股票期权, 在理论上, 忽略了它们之间的相互作用. 利用二叉树定价法, Ho和 Pfeffer[21]实证表明, 在某些情况下, 这种忽略将导致较大定价偏差, 是不可取的.

2 完全拆解法

2.1 可赎回可转换贴现债券

在国内外实际转债市场中, 有着多种多样的可转换债券. 本文选择相对基础的非回售可赎回可转换贴现债券作为研究对象. 由于其条款本身也可以稍有变化, 为了简化问题, 揭示其基本价值组成, 本文将其具体条款限定为以下情况. (D1) 关于转换条款: ①在其期限内, 持有者有权在任意时刻按照预先设定的转换价格执行转换权. ②其转换价格恒定. (D2) 关于赎回条款: ①只有当标的股价上涨到预先设定的赎回触发价格以上时, 发行者才有权按照预先约定的赎回价格执行赎回权, 即存在相对简单的软赎回约束条件. ②其赎回

价格恒定. ③无赎回通知期, Ingersoll[1]等也进行了如此限定. 尽管在实际市场中可赎回可转换贴现债券一般都有着赎回通知期, 然而, 赎回通知期对可赎回可转换贴现债券理论价值的影响较小, 如此限定是基本合理的. 例如: 当标的股价达到或超过转换价格 130%时, 发行者有权按照转债面值的 105%执行赎回权. 假定其转换价格为 10元, 其面值为 100元, 那么只有当标的股价达到或超过 10×130% = 13元时, 发行者才有权宣告按照 105元的转债赎回价格执行赎回权. (D3)关于其他条款: 没有锁定期条款、回售条款、重置条款以及其它非标准条款.

2.2　基本符号

考虑一份上述可赎回可转换贴现债券. 以 B_F、P_1和 T分别表示其面值、转换价格和剩余期限; 以 P_2表示满足赎回软约束条件时标的股价所必须达到的赎回触发价格, 显然有 $P_2 > P_1$. 如此, 其转换比率(将一份可赎回可转换贴现债券转换成普通股票所能获得的普通股票的数量)可以表示为 (B_F/P_1). 同时, 以 $CCDB(S_0, T)$表示该转债的当前理论价值, 以 $DB(S_0, T)$表示与之对应的贴现债券(discount bond, 有着同样本金和剩余期限)的当前理论价值. 此外, 为表达简洁, 将当前时刻作为零时刻, 并以 S_0、S_τ和 S_T分别表示在当前时刻、τ时刻和到期时刻的标的股价, 其中 $0 < \tau < T$.

2.3　完全拆解

事实上, 可以将 CCDB看作对应贴现债券附加了执行时刻不确定而且执行价格不确定的收益封顶的路径依赖奇异期权. 为此, 不再以普通期权, 而是以奇异期权进行拆解. 最终, 将 CCDB“完全拆解”为下述 5种相对简单证券的组合, 其拆解过程如下.

第 1步, 将 CCDB完全拆解为两种证券: 投资者拥有的、份数为 (B_F/P_1)、障碍水平为 P_2、固定支付额为 $(P_2 - P_1)$的立即支付型规则美式二值买权 $ABC^i(S_0, T; P_2 - P_1)$(American binary calls)和一种非规则奇异期权. 第 2步, 从所得非规则奇异期权中拆解出: 投资者拥有的、份数为 (B_F/P_1)、执行价格为 P_1、障碍水平为 P_2的规则上敲出买权 $UOC(S_0, T; P_1)$(up-and-out calls). 第 3步, 将剩余部分的非规则奇异期权完全拆解为: 发行者拥有的、障碍水平为 P_2、固定支付额为 B_F的延迟支付型规则美式二值买权 $ABC^d(S_0, T; B_F)$, 投资者拥有的、障碍水平为 P_2、固定支付额为 B_F的立即支付型规则美式二值买权 $ABC^i(S_0, T; B_F)$和投资者拥有的对应贴现债券 $DB(S_0, T)$.

在上述拆解过程中, 由于采用将简单证券从 CCDB中逐个剥离的方法, 从而在收益特性上, 不仅这 5种简单证券之间没有任何重叠, 而且从 CCDB中逐个剥离这 5种简单证券之后, 也没有任何剩余, 因此该拆解是对 CCDB的“完全拆解”. 也就是说, 可以利用上述 4种奇异期权和对应贴现债券的组合“完全复制”CCDB. 综上可知, 可赎回可转换贴现债券理论价值可以表达为

$$CCDB(S_0, T) = (B_F/P_1)ABC^i(S_0, T; P_2 - P_1) + (B_F/P_1)UOC(S_0, T; P_1) + ABC^i(S_0, T; B_F) - ABC^d(S_0, T; B_F) + DB(S_0, T) \tag{1}$$

显然, 该表达式清晰地展示了 CCDB的价值组成. 据之, 不仅可以完全复制 CCDB, 而且可以有针对性地对冲各组成部分的特有风险.

3　论　证

命题　可赎回可转换贴现债券可以被完全拆解为以下 5种简单证券的组合: 两种固定支付额不同的立即支付型规则美式二值买权、一种规则上敲出买权、一种延迟支付型规则美式二值买权和一种对应贴现债券, 即式(1)成立.

3.1　基本假设

假设 1　关于资本市场, 采用 Black-Scholes期权模型假设框架[22]. 尽管该假设框架相对苛刻, 尽管越来越多文献在定价普通期权时从各方面尝试放宽该假设框架, 但是在为复杂的衍生证券进行定价, 尤其要获得解析式时, 现有文献一般仍然采用该假设框架. 简要来说, 该框架主要包括 4个方面: ①资本市场是无摩擦市场; ②存在连续无风险利率 r, 而且其期限结构曲线是水平的; ③不存在无风险套利机会; ④股价服从如下扩散过程

$$dS = \mu S d\tau + \sigma S dW^P \tag{2}$$

其中, W^P是一个定义在完备概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的服从标准维纳过程的随机变量; μ和 σ分别

表示标的股价的期望收益率和波动率. 一般地, σ被假定为固定常数.

本文采用 Black-Scholes期权模型假设框架, 意味着所建定价模型为基于股价的单因子无套利模型. 由文献 [4] 和 [6] 可知, 在为可转换债券定价时, 如果利率在合理范围内取值, 那么单因子无套利模型与两因子无套利模型相比, 两者定价结果差异很小. 因此, 假设无风险利率期限结构曲线是水平的, 是基本合理的.

假设 2 可转换债券发行者 (发行公司管理层) 和投资者 (包括持有者以及打算持有的投资者) 都是完全理性的, 而且总是偏好更多财富. 对于持有者, 总是寻求可转换债券价值的最大化. 对于发行者, 作为股东权益的代理人, 总是寻求股东财富的最大化, 即股价最大化. McConnell和Schwartz[10] 以及 Barone-Adesi等[14] 诸多文献都进行了同样假设.

假设 3 发行者和投资者 (包括持有者以及打算持有的投资者) 都具有对称市场理性 (symmetric market rationality). 也就是说, 他们能够理性预期到彼此的最优决策. 例如, 对于可赎回可转换债券而言, 发行者能够预期到持有者将采取的最优转换策略, 同时投资者 (包括持有者以及打算持有的投资者) 也能够预期到发行者将采取的最优赎回策略. Ingersoll[1] 也进行了同样假设.

假设 4 潜在"稀释效应 (dilution effect)"已经反映在当前标的股价之中. 也就是说, 在持有者将可转换债券转换为普通股票时, 并不会导致标的股价的骤然下降. 由于投资者都是完全理性的, 能够理性预期到可转换债券在将来被转换为普通股票的可能性大小, 因此如此假设是基本合理的, 如 Connolly[23] 所述.

3.2 最优转换策略和最优赎回策略

在上述假设基础上, 由文献 [10] 可知: (1) 投资者最优转换策略为: 在到期前, 不应该主动执行转换权, 除非发行者宣告执行赎回权; 在到期时, 若转换价值大于 CCDB的面值, 则主动执行转换权, 否则投资者应该要求发行者以现金赎回CCDB, 其数额为 CCDB的面值. (2) 发行者最优赎回策略是在剩余期限内, 只要标的股价上涨到赎回触发价格, 发行者应该即刻宣告执行赎回权.

由于不存在赎回通知期, 当发行者宣告执行赎回权时, 投资者将拥有如下两种选择: 或者接受发行者的赎回现金 (其大小为转债赎回价格), 或者立即执行转换权, 获取当时的转换价值. 在实际转债市场中, 尤其在中国转债市场中, 发行者都希望投资者选择执行转换权, 因此在设计转债条款时, 赎回现金额一般被设定为小于满足赎回软约束条件时的转换价值, 从而发行者可以通过宣告赎回来迫使投资者选择执行转换权. 例如, 当股票价格达到或超过转换价格的 130% 时, 发行者有权按照转债面值的 105% 执行赎回权. 假定其转换价格为 10元, 其面值为 100元. 当标的股价达到 13元时, 将满足赎回软约束条件, 在理论上发行者应该立即宣告执行赎回权. 此时赎回现金额只有 105元, 而立即执行转换权所得转换价值为 $100 \div 10 \times 13 = 130$元. 显然, 在这种情况下, 持有者将被迫选择执行转换权. 正因如此, 带有赎回软约束条件的赎回条款又被称为"强制转换条款".

3.3 风险中性世界

由文献 [24] 可知, 在上述基本假设下, 令 $\mathrm{d}W^{P} = \mathrm{d}W^{\bar{P}} - \frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}\tau$, 其中, $W^{\bar{P}}$ 是一个定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \bar{P})$ 下的服从标准维纳过程的随机变量. 然后, 将之代入式 (2), 可得在风险中性世界里标的股价将服从如下扩散过程

$$\mathrm{d}S = rS\,\mathrm{d}\tau + \sigma S\,\mathrm{d}W^{\bar{P}} \tag{3}$$

可见, 原来的 μ已被连续无风险利率 r取代, 不过, 原来的波动率 σ并未受到概率测度转换的影响. 由于式 (3) 中再无其它参数与风险偏好有关, 因此, 在如此概率测度转换之后, 可转换债券定价问题就可以从有着风险偏好的现实世界转移到风险中性世界. 也正如此, $\bar{P}$ 被称之为风险中性概率测度. 由风险中性定价理论可知, 在风险中性世界, 所有资产的期望收益率都是连续无风险利率; 而且, 某一证券的期初价值都是期终价值的现值, 其贴现率为连续无风险利率.

3.4 股价路径归类

在上述风险中性世界, 可以将未来可能发生的标的股价路径归为下述 3类, 如图 1所示.

路径 1 在剩余期限内, 标的股价一度上涨到赎回触发价格. 不妨以 τ^{*} 表示从当前时刻到标的股价首次上涨到赎回触发价格时的时间段长度, 那么该类股价路径可以表示为 $\exists\, \tau^{*} \leqslant T$.

路径 2　标的股价一直未能上涨到赎回触发价格, 但是到期时该转债的转换价值大于其面值, 即标的股价大于转换价格, 那么该类股价路径可以表示为 $\tau^* > T$ 且 $S_T > P_1$.

路径 3　标的股价一直未能上涨到赎回触发价格, 而且到期时标的股价不大于转换价格, 即 $\tau^* > T$ 且 $S_T \leqslant P_1$.

为表述方便, 设定两个事件: A 事件 —— 在剩余期限内, 标的股价一度上涨到赎回触发价格; B事件 —— 到期时标的股价大于转换价格. 如此, 可以设定一个与路径 1相对应的示性函数 (indicator function) I_A: 若 A 事件发生, 其值为 1, 若不发生, 其值为 0 类似地, 与路径 2和路径 3对应的示性函数可以分别设定为 $I_{\bar{A}B}$ 和 $I_{\bar{A}\bar{B}}$.

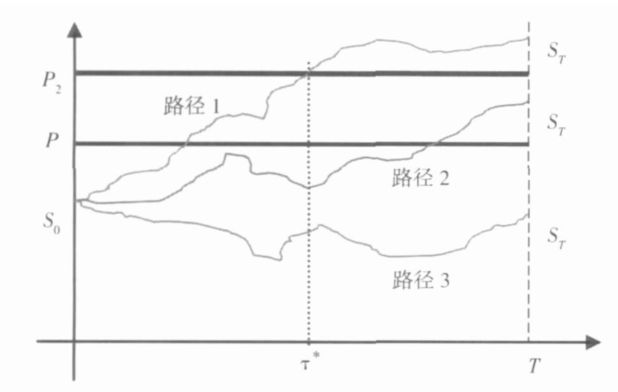

图 1　未来可能发生的标的股价路径归类示意图

Fig. 1 Demonstration the classification of paths of stock prices in the future

3.5　相关奇异期权理论价值

依据风险中性定价原理, 由立即支付型规则美式二值买权、规则上敲出买权和延迟支付型规则美式二值买权的各自收益特性可得, 上述 4种奇异期权理论价值可以分别表达为

$$ABC^{i}(S_0, T; P_2 - P_1) = (P_2 - P_1) \times E^{\bar{P}}[e^{-r\tau^*} I_A] \tag{4}$$

$$ABC^{i}(S_0, T; B_F) = B_F E^{\bar{P}}[e^{-r\tau^*} I_A] \tag{5}$$

$$UOC(S_0, T; P_1) = e^{-rT} E^{\bar{P}}[(S_T - P_1) I_{\bar{A}B}] \tag{6}$$

$$ABC^{d}(S_0, T; B_F) = B_F e^{-rT} E^{\bar{P}}[I_A] \tag{7}$$

其中, $E^{\bar{P}}[x]$ 表示在风险中性概率测度 $\bar{P}$ 下对变量 x 求数学期望.

事实上, 由于 $ABC^{i}(S_0, T; P_2 - P_1)$ 和 $ABC^{i}(S_0, T; B_F)$ 都是以 P_2 为障碍水平的立即支付型美式二值买权, 唯一不同的只有固定支付额, 因此可以将 (B_F / P_1) 单位的 $ABC^{i}(S_0, T; P_2 - P_1)$ 和 $ABC^{i}(S_0, T; B_F)$ 合并为以 P_2 为障碍水平、以 $(B_F / P_1) P_2$ 为固定支付额的立即支付型规则美式二值买权 $ABC^{i}(S_0, T; (B_F / P_1) P_2)$. 为了与以往拆解方法进行详细比较, 本文暂未合并.

3.6　证明

证明　在风险中性世界, 依据投资者最优转换策略和发行者最优赎回策略可知: 当 Paths1发生时, 发行者将在标的股价首次达到赎回触发价格的时候, 立即宣告执行赎回权, 此时投资者将被迫选择执行转换权, 此时转债现值为 $e^{-r\tau^*}(B_F / P_1) P_2$; 当路径 2发生时, 投资者将在到期时主动执行转换权, 此时转债现值为 $e^{-rT}(B_F / P_1) S_T$; 当路径 3发生时, 投资者将在到期时要求发行者以数额为转债面值的现金赎回 CCDB, 此时转债现值为 $e^{-rT} B_F$. 综上, 在风险中性世界, 可赎回可转换贴现债券的理论价值可以表示为

$$CCDB(S_0, T) = \begin{cases} e^{-r\tau^*}(B_F / P_1) P_2 & \tau^* \leqslant T \\ e^{-rT}(B_F / P_1) S_T & \tau^* > T, S_T > P_1 \\ e^{-rT} B_F & \tau^* > T, S_T \leqslant P_1 \end{cases}$$

$$= (B_F / P_1) P_2 E^{\bar{P}}[e^{-r\tau^*} I_A] + (B_F / P_1) e^{-rT} E^{\bar{P}}[S_T I_{\bar{A}B}] + B_F e^{-rT} E^{\bar{P}}[I_{\bar{A}\bar{B}}] \tag{8}$$

将式 (4)—(7) 代入, 可得

$$\begin{aligned} CCDB(S_0, T) &= \{(B_F / P_1)(P_2 - P_1) + B_F\} \times E^{\bar{P}}[e^{-r\tau^*} I_A] + (B_F / P_1) e^{-rT} \times \\ &\quad E^{\bar{P}}\{[(S_T - P_1) + P_1] I_{\bar{A}B}\} + B_F e^{-rT} E^{\bar{P}}[I_{\bar{A}\bar{B}}] \\ &= (B_F / P_1)(P_2 - P_1) E^{\bar{P}}[e^{-r\tau^*} I_A] + \\ &\quad B_F E^{\bar{P}}[e^{-r\tau^*} I_A] + (B_F / P_1) e^{-rT} \times \\ &\quad E^{\bar{P}}[(S_T - P_1) I_{\bar{A}B}] + B_F e^{-rT} E^{\bar{P}}[I_{\bar{A}B}] + \\ &\quad B_F e^{-rT} E^{\bar{P}}[I_{\bar{A}\bar{B}}] \\ &= (B_F / P_1) ABC^{i}(S_1, T; P_2 - P_1) + \\ &\quad ABC^{i}(S_0, T; B_F) - B_F e^{-rT} E^{\bar{P}}[I_A] + \\ &\quad (B_F / P_1) UOC(S_0, T; P_1) + B_F e^{-rT} \times \\ &\quad E^{\bar{P}}[I_A + I_{\bar{A}B} + I_{\bar{A}\bar{B}}] \\ &= (B_F / P_1) ABC^{i}(S_0, T; P_2 - P_1) + \\ &\quad (B_F / P_1) UOC(S_0, T; P_1) + \\ &\quad ABC^{i}(S_0, T; B_F) - ABC^{d}(S_0, T; B_F) + \\ &\quad DB(S_0, T) \end{aligned} \tag{9}$$

故命题成立. 这一证明过程虽然是在风

险中性世界进行的, 然而由风险中性定价原理可知, 同样适用于现实世界.

4 定价解析式

尽管上述 4种奇异期权都是奇异的, 但是也都是相对规则的. 依据文献[25]和[26]可知, 上述 4种奇异期权和贴现债券的价值解析式可以表示为

$$ABC^{i}(S_0, T;\ P_2-P_1) = (P_2-P_1)\exp[y(u-\tilde{u})]\times [N(-a_2)+\exp(2y\tilde{u})N(-a_1)] \quad (10)$$

$$UOC(S_0, T; P_1) = c(S_0, T) - S_0N(x) + P_1e^{-rT}N(x-\sigma\sqrt{T}) + S_0(P_2/S_0)^{2\hat{u}}\times [N(-z)-N(-z_1)] - P_1e^{-rT}(P_2/S_0)^{2\hat{u}-2}\times [N(-z+\sigma\sqrt{T})-N(-z_1+\sigma\sqrt{T})] \quad (11)$$

$$ABC^{d}(S_0, T;\ B_F) = B_Fe^{-rT}\times [N(-a_4)+(P_2/S)^{(2r-\sigma^2)/\sigma^2}N(-a_3)] \quad (12)$$

$$ABC^{i}(S_0, T; B_F) = B_F\exp[y(u-\tilde{u})]\times [N(-a_2)+\exp(2y\tilde{u})N(-a_1)] \quad (13)$$

$$DB(S_0, T) = B_Fe^{-rT} \quad (14)$$

其中:

$$a_1 = \frac{y+\tilde{u}T}{\sqrt{T}},\quad a_2 = \frac{y-\tilde{u}T}{\sqrt{T}}$$

$$\tilde{u} = \sqrt{u^2+2r},\quad u = \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$$

$$y = \frac{\ln\frac{P_2}{S_0}}{\sigma}$$

$$x = \frac{\ln\frac{S_0}{P_2}}{\sigma\sqrt{T}} + \hat{u}\sigma\sqrt{T}$$

$$z = \frac{\ln\frac{P_2}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}} + \hat{u}\sigma\sqrt{T}$$

$$z_1 = \frac{\ln\frac{p_2^2}{S_0P_1}}{\sigma\sqrt{T}} + \hat{u}\sigma\sqrt{T}$$

$$a_3 = \frac{y+uT}{\sqrt{T}},\quad a_4 = \frac{y-uT}{\sqrt{T}}$$

$$c(S_0, T) = S_0N(d_1) - P_1e^{-rT}N(d_1-\sigma\sqrt{T})$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{P_1}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\hat{u} = \frac{r+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}$$

将式(10)—(14)代入式(1), 就可以获得可赎回可转换贴现债券的定价解析式. 尽管所得定价解析式看上去十分复杂, 然而从参数估计方面来看, 只需估计 σ, 这与定价普通股票期权是一样的. 此外, 推导该解析式所需的市场假设条件, 与 Black-Scholes期权定价模型也是一样的. 因此, 该解析式有着较好适用性.

同时, 所得定价解析式不仅可以为 CCDB进行估值, 而且可以直接用来计算各种避险参数, 如 Delta, Gamma和 Vega等, 从而可以有针对性地对冲风险, 还可以直接用来计算 CCDB价值对于主要参数的敏感系数, 如转换价格和赎回触发价格等, 从而可以针对发行公司特定情况优化转债条款. 此外, 还可以藉之进行无风险套利等等.

5 数值验证

当前, 尽管 Monte Carlo模拟定价法计算效率不高, 但是已经成为广为接受的衍生证券定价方法之一. 因此, 以基于模拟法的定价结果作为衡量上述解析式定价效果的标准. 在应用模拟定价法时, 依据中国资本市场实际情况, 以 1年有 240个收盘价进行模拟, 模拟次数为 10 000次, 并采用对偶变量法(antithetic variable technique)减小误差. 此外, 由于上述解析式是在连续框架下获得的, 而模拟定价法是在离散框架下进行的, 因此前者相对后者, 存在连续偏差(continuity errors). 为了排除它的影响, 本文采用 Broadie等[27]所提出的调整方法. 具体来讲, 在应用上述定价解析式时, 将作为障碍水平的赎回触发价格 P_2 调整为 $P_2e^{\beta\sigma\sqrt{\Delta t}}$, 其中 $\beta\approx 0.582\ 6$

依据中国转债市场实际情况, 设定一个可赎回可转换贴现债券数值例子为: $B_F = 100$ 元, $P_1 = 10$元, $P_2 = 1.3$, $P_1 = 13$元, $r = 0.025$, $\sigma = 0.3$ 为了更具说服力, 将当前标的股价取值范围取为 $S_0\in[3, 13]$, 且以 0.2为步长, 将剩余期限

分别选定为 5年、2年和 1年.

在上述不同当前标的股价和剩余期限下, 将基于解析式(经过调整)的定价结果(以"analytic solution with correction"表示)与基于模拟法的定价结果(以"simulation solution"表示)进行比较, 如图 2所示. 比较可知, 无论在何种状态下, 两者差异都很小, 其平均相对误差只有 0.06%, 其最大相对误差也未超过 0.1%. 考虑到把连续框架调整为离散框架时有着微小误差, 又考虑到模拟定价法本身有着微小误差, 如此差异完全是正常的. 这就充分验证了本文推导过程的正确性. 也充分表明, 所提出的拆解确实是完全拆解

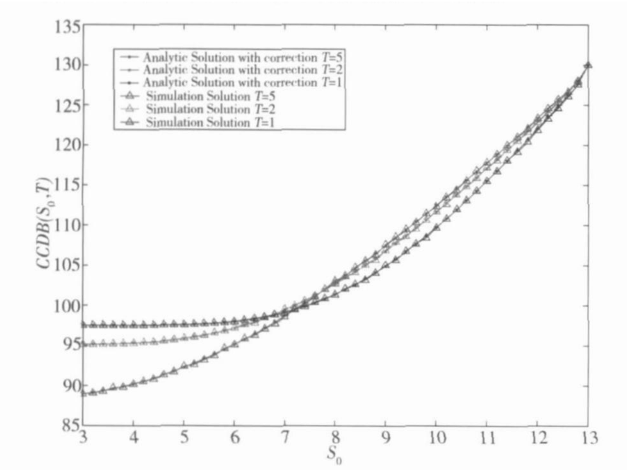

图 2 基于解析式定价结果与基于模拟定价结果之间的比较

Fig. 2 Comparisons between pricing results from analytic formula and those from simulation

6 应 用

6.1 以往拆解方法的定价偏差

6.1.1 理论偏差

既然本文所提出的拆解是完全拆解, 那么与之比较, 可得以往拆解法的定价偏差. 先来分析林义相等[20]所提出的拆解. 简单来讲, 他们将一份 CCDB近似拆解为: 一份与之对应的普通纯债券 $DB(S_0, T)$, (B_F/P_1)份持有者拥有的、以转换价格为执行价格的美式买权(与转换权相对应)$C(S_0, T; P_1)$, 和(B_F/P_1)份发行者拥有的、以赎回价格为执行价格的美式买权(与赎回权相对应)$C(S_0, T; S_c)$, 不妨将之简称为"两权拆解法". 可以将该近似拆解表达为

$$CCDB(S_0, T)_{\text{Lin}} \approx B(S_0, T) + (B_F/P_1) \times C(S_0, T; P_1) - (B_F/P_1) C(S_0, T; S_c) \quad (15)$$

比较式(1)与式(15)可得, 林义相等[20]所提出的上述近似拆解的理论总偏差为

$$Error_{\text{Lin}}(S_0, T) = CCDB(S_0, T) - CCDB(S_0, T)_{\text{Lin}} \quad (16)$$

为了进行对比, 继续分析另一种更简单的拆解法的定价偏差. 该拆解法对赎回权不予考虑, 简单地将一份 CCDB近似拆解为一份与之对应的普通纯债券和(B_F/P_1)份持有者拥有的、以转换价格为执行价格的欧式买权(与转换权相对应), 不妨将之简称为"一权拆解法". 可以将该近似拆解表达为

$$CCDB(S_0, T)_{\text{sim}} \approx DB(S_0, T) + (B_F/P_1) C(S_0, T; P_1) \quad (17)$$

比较式(1)与式(17)可得, 如此拆解的理论偏差为

$$Error_{\text{sim}}(S_0, T) = CCDB(S_0, T) - CCDB(S_0, T)_{\text{sim}} \quad (18)$$

6.1.2 数值例子

仍然采用上述 CCDB数值例子, 分别绘制了 $Error_{\text{Lin}}$和 $Error_{\text{sim}}$与两状态变量之间的 3维变动关系图, 分别如图 3和图 4所示, 其中当前标的股价取值范围设定为 $S_0 \in [3, 13]$, 以 0.2为步长; 剩余期限取值范围设定为$T \in [0, 5]$, 以 0.1为步长. 相对本文所提出的完全拆解法, 由图 3可知, 林义相等[7]所提出的两权拆解法总是定价偏低, 而且, 当前标的股价愈高, 剩余期限愈长, 其偏低幅度愈大; 由图 4可知, 上述一权拆解法总是定价偏高(Z轴坐标为负), 而且, 当前标的股价愈高, 剩余期限愈长, 其偏高幅度愈大. 值得注意的是, 在对应状态下, 直接比较 $Error_{\text{Lin}}$和 $Error_{\text{sim}}$的绝对值可知, $Error_{\text{Lin}}$总是大于 $Error_{\text{sim}}$. 说明, 基于上述两权拆解法的定价偏差实际上还大于基于上述一权拆解法的定价偏差.

6.2 CCDB理论价值与两状态变量之间关系

CCDB理论价值有着两个状态变量: 当前标的股价和剩余期限. 为此, 仍然采用上述 CCDB数值例子, 绘制 3维立体图来考察 CCDB理论价值与两状态变量之间的 3维变动关系, 如图 5所示, 其中当前标的股价取值范围设定为 $S_0 \in [3, 13]$, 以 0.2为步长; 剩余期限取值范围设定为 $T \in [0, 5]$, 以 0.1为步长.

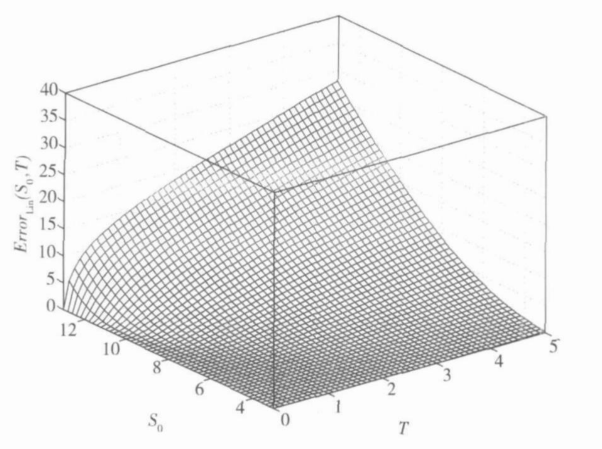

图3　$Error_{Lin}$ 与两状态变量之间变动关系

Fig. 3 Relationships between $Error_{Lin}$ and two state variables

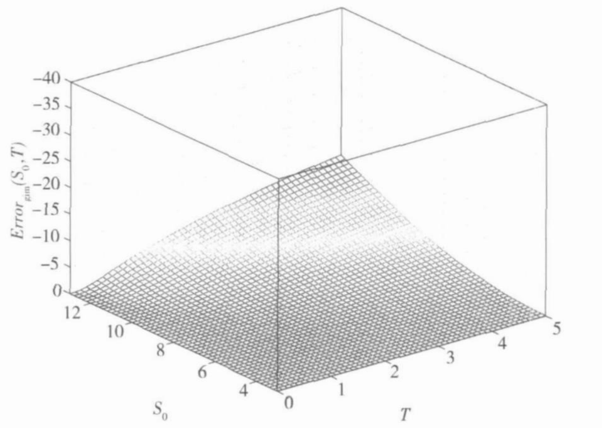

图4　$Error_{sim}$ 与两状态变量之间变动关系

Fig. 4 Relationships between $Error_{sim}$ and two state variables

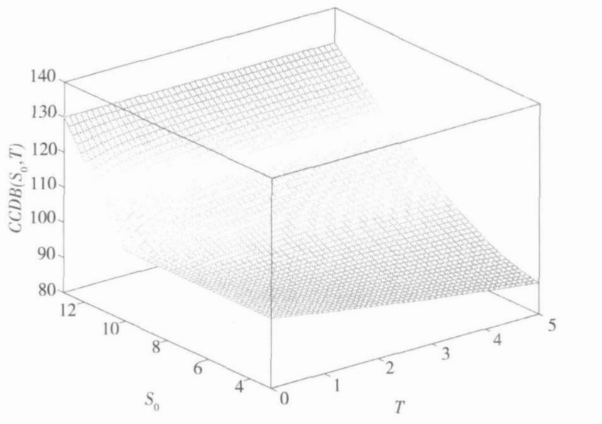

图5　CCDB 理论价值与两状态变量之间变动关系

Fig. 5 Relationships between theoretic value of CCDB and two state variables

由图 5可知, $CCDB$ 理论价值总是当前标的股价的增函数, 即避险参数 $Delta$ 总是为正, 而且其关系曲线的曲度, 随着剩余期限的减小而逐渐增大. 值得注意的是, $CCDB$ 理论价值并非总是剩余期限的增函数, 在深度虚值状态下, 反而是剩余期限的减函数. 事实上, 是剩余期限的增函数, 还是减函数, 取决于其内含期权价值增长速度和贴现债券价值减小速度之间的关系. 在深度虚值状态下, 随着剩余期限的增长, 内含期权价值增长速度小于贴现债券价值减小速度, $CCDB$ 理论价值就是剩余期限的减函数, 然而, 随着当前标的股价渐渐变大, 内含期权价值增长速度渐渐提高, 而贴现债券价值减小速度并未变化, 因此, 一旦当前标的股价增大到一定程度时, 内含期权价值增长速度将大于贴现债券价值减小速度, 此时 $CCDB$ 理论价值将变为剩余期限的增函数. 也就是说, 一般地, 随着当前标的股价的从小到大, 避险参数 $Theta$ 逐渐减小, 而且有着一个从正值变为负值的过程.

7　结束语

在 Black-Scholes期权模型假设框架下, 本文针对以往拆解方法的不足, 转变思路, 不再利用普通期权, 而是利用奇异期权, 将可赎回可转换贴现债券“完全拆解”为对应贴现债券和 3种相对简单的奇异期权, 并藉之获得其定价解析式. 由于所需市场假设条件和参数估计与 Black-Scholes期权定价公式是一样的, 该解析式有着较好的适用性. 此外, 该解析式, 还可以用来计算各避险参数以及进行无风险套利, 等等. 同时, 本文剖析了以往拆解定价法的偏差, 并展示了可赎回可转换贴现债券理论价值与两状态变量之间的 3维变动关系. 这必将大大有助于我国转债投资者透彻理解转债价值组成, 并合理估计转债价值. 不足的是, 对于存在债息、锁定期和信用风险等情况, 是否依然可以完全拆解, 尚需进一步研究.

参 考 文 献:

[1] Ingersoll J. A contingent claim valuation of convertible securities[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4: 289–322

[2] Brennan M J, Schwartz E S. Convertible bonds: Valuation and optimal strategies for call and conversion[J]. Journal of Fi

nance, 1977, 32(6): 1699—1715.
[3] Nyborg K G. The use and pricing of convertible bonds[J]. Applied Mathematical Finance, 1996, 3(3): 167—190.
[4] Brennan M J, Schwartz E S. Analyzing convertible bonds[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1980, 15(4): 907—929.
[5] Vasicek O A. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 177—188.
[6] Carayannopoulos P. Valuing convertible bonds under the assumption of stochastic interest rates: An empirical investigation[J]. Quarterly Journal of Business and Economics, 1996, 35(3): 17—31.
[7] Cox J, Ingersoll J E, Ross S. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385—467.
[8] Lvov D, Yigitbasioglu A B, Bachir N E. Pricing Convertible Bonds by Simulation[C]. Working Paper, ISMA Center, 2004.
[9] Hull J C, White A. Pricing interest rate derivative securities[J]. Review of Financial Studies, 1990, 3(4): 573—592.
[10] McConnell J J, Schwartz E S. LYON taming[J]. Journal of Finance, 1986, XLI(3): 561—577.
[11] Tsiveriotis K, Fernandes C. Valuing convertible bonds with default risk[J]. Journal of Fixed Income, 1998, 8(2): 95—102.
[12] Yigitbasioglu A B. Pricing Convertible Bonds with Interest Rate, Equity, Credit and FX Risk[C]. Working Paper, ISMA Center, 2001.
[13] Davis M, Lischka F R. Convertible Bonds with Market Risk and Default Risk[C]. Working Paper, Tokyo-Mitsubishi International plc, 1999.
[14] Broadie M, Glasserman P, Kou S. A continuity correction for discrete barrier option[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4): 325—348.
[15] Kang J, Lee Y. The pricing of convertible debt offerings[J]. Journal of Financial Economics, 1996, 41: 231—248.
[16] Hamilton D T, Stumpp P M, Cantor R. Default and Recovery Rates of Convertible Bond Issuers: 1970—2000[C]. Moody's Investors Service, 2001.
[17] Ayache E, Forsyth P A, Vetzal K R. The valuation of convertible bond with default risk[J]. Journal of Derivatives, 2003, 11(1): 9—29.
[18] Yigitbasioglu A B, Alexander C. An Uncertain Volatility Explanation for Delayed Calls of Convertible Bonds[C]. Working Paper, ISMA Center, 2004.
[19] Baumol W J, Malkiel B G, Quandt R E. The valuation of convertible securities[J]. Quarterly Journal of Economics, 1966, 80(Spring): 48—59.
[20] 林义相, 等. 可转换债券投资分析与运作[M]. 上海: 上海远东出版社, 1998.
Lin Yixiang, *et al*. The Investment Analysis and Management of Convertible Bonds[M]. Shanghai: Shanghai Yuandong Press, 1998. (in Chinese)
[21] Ho T S Y, Pfeffer D M. Convertible bonds: Model, value attribution and analytics[J]. Financial Analyst Journal, 1996, 52(5): 35—44.
[22] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637—654.
[23] Connolly K B. Pricing Convertible Bonds[M]. New York: John Wiley & Sons Press, 1998.
[24] Harrison M, Kreps D. Martingales and multiperiod securities markets[J]. Journal of Economic Theory, 1979, 20: 381—408.
[25] Rubinstein M, Reiner E. Breaking down the barriers[J]. RISK, 1991, (September): 28—35.
[26] Rubinstein M, Reiner E. Unscrambling the binary code[J]. RISK, 1991, (October): 75—83.
[27] Broadie M, Glasserman P, Kou S. A continuity correction for discrete barrier option[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4): 325—348.

Analytic valuation of the callable convertible discount bonds: Equivalent decomposition method

ZHOU Qi-yuan[1,2], WU Chong-feng[1], LIU Hai-long[1]

1. Antai School of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China;
2. Taipingyang Asset Management Ltd., Shanghai 200120, China

Abstract: Under the Black-Scholes framework, according to the risk-neutral valuation principal, we present an equivalent decomposition method for the Callable Convertible Discount Bonds (CCDB). Based on this method, we equivalently decompose one CCDB into the portfolio of five kinds of simple and tradable securities: two regular American Binary Calls with immediately-made fixed payments, one regular Up-and-Out Call, one regular American binary call with a fixed payment that is deferred until maturity, and one corresponding discount bond. Then, we work out the analytic valuation formula for CCDB. At the same time, we validate this valuation formula with Monte Carlo simulation. Compared with the existing numerical procedures, this method can not only give much new insight to the value composition of CCDB, but also greatly speed up the valuation of CCDB.

Key words: callable convertible discount bonds; equivalent decomposition method; up-and-out call; American binary calls; derivative pricing

---

(上接第 114页)

that the demand distribution is unknown and that there is information sharing in supply chains. since the demand information is pooled at the supplier, the supplier and the retailers will obtain different information, which may lead the supplier to think the market has expanded or shryink too much. We call this phenomenon Pooled Information Effect (PIE). To analyze conditions for PIE, two cases are discussed. In the case of fully observable demand information, we present the sufficient condition for PIE in multi-period supply chains. In the case of partially observable demand information, we present the sufficient condition for PIE in multi-period supply chains when the myopic inventory strategy is adopted and that in a three-period supply chain when optimal inventory strategy is adopted. Numerical examples and simulations show that the probability of PIE is considerably greater under certain conditions. Finally, we analyze the relationship among the bullwhip effect, information sharing and pooled information effect.

Key words: supply chain management; unknown demand; pooled information effect; information sharing