等效子网络构建的理论与方法[①]

乞建勋, 李星梅, 王 强
(华北电力大学工商管理学院, 北京 102206)

摘要: 关键路线法 (critical path method, CPM)网络计划是项目管理最得力的工具之一. 通过研究 CPM 网络图自身的规律性, 给出了从源点到任意节点, 以及从任意节点到汇点最长路线的路长计算公式, 进而推导出反映总时差与路长关系的定理——总时差定理, 并在其基础上, 设计出构造等效子网络的简单方法, 分析了方法的正确性, 且得出该方法的计算复杂度为 $O(n)$. 实证表明, 该方法简单易行, 便于应用. 对于时间 - 费用优化问题, 可以用少数几条路线组成的子网络代替由几十条、几百条路线组成的原始网络, 使计算工作量得到简化.

关键词: 项目管理; 时差; 等效子网络; 时间 - 费用优化
中图分类号: TB114.1　　文献标识码: A　　文章编号: 1007- 9807(2010) - 01- 0040- 05

0 引 言

近十多年现代项目管理取得了飞速发展, 目前它不但形成一门新的学科, 而且已经成为一种职业. 美国项目管理协会 (Project Management Institute, PMI)编制的项目管理知识体系 (project management body of knowledge, PMBOK) 把项目管理划分为九大领域, 其中“时间管理”和“成本管理”[1]是其核心的两大领域. 而“时间 - 费用”问题是这两大领域的交叉, 应用极其普遍.

但是目前“时间 - 费用”问题的优化方法计算工作量太大, 如经典的“工期一定, 求费用最低”, “费用一定, 求工期最短”等问题, 通常用线性规划法求最优解, 先把计划网络化为一个线性规划模型, 把费用最低或工期最短作为目标函数, 利用单纯形法求解. 但是因为计划网络中的每个工序都对应一个变量和两个约束条件, 因此, 化成的线性规划模型中变量和约束条件很多, 计算工作量十分巨大. 事实上, 线性规划方法没有考虑网络计划自身的特点, 对每个工序不管其重要程度如何, 都是同等看待. 如果考虑到网络图自身的特点, 就会发现工序之间的轻重份量是不同的, 有些工序必须重点考虑, 有些则可以不予考虑. 如把 100d的总工期压缩到 90d, 只要把网络中路长大于 90d的路线全部压缩到 90d就可以了, 至于路长小于等于 90d的路线, 无论压缩与否, 对总工期的缩短都不会产生任何影响, 因此无需考虑. 在一般情况下, 小于等于 90d的路线占多数, 去掉这些路线后可以大大减少计算工作量. 这种想法充分利用了网络计划自身的特点, 但是长期以来不能实现, 因为寻找所有路长小于等于 90d的路线是十分困难的. 国内外已有学者考虑用简单网络去代替原始网络, 即等效子网络 (辅助网络), 但在该网络的构造上, 要么方法比较复杂[2], 要么没有理论依据[3].

运用 CPM 网络计划最大优点是可以计算出每个工序的时差[4-5], 从而判断每个工序在全局中的地位. 但是目前对时差的研究还很缺乏. 1956年杜邦公司提出 CPM 网络计划[6-7]后, Battersby和 Thomas分别于 1967和 1969年给出四个时差概念: 总时差, 安全时差, 自由时差和干扰时差; Elmaghraby 于 1977 年给出节点时差概

① 收稿日期: 2007- 01 - 16; 修订日期: 2009- 09 - 26.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70671040); 教育部博士点基金资助项目 (20050079008).
作者简介: 乞建勋(1946—), 男, 河北邢台人, 教授, 博士生导师. Email: xingmeil@ 163. com

念[5], 并给出这些时差的分析和陈述[5]. 针对网络本身的复杂性, 这五个时差还不足以反映时差的特性以及工序之间时差的内在联系. 为使 CPM 网络计划中, 紧前和紧后工序的时差关系变得清楚, 乞建勋教授于 1997年给出前共用时差和后共用时差概念, 把安全时差更名为前单时差, 自由时差更名为后单时差[8], 并于 2006年又给出两个新时差概念: 前共后单时差, 前单后共时差, 为了有利于概念统一, 把干扰时差细分为双单和双共时差[9], 且在 2007年初步研究了时差的规律性, 分析了工序时差传递性问题, 提出基于双代号网络计划的标值算法, 量化了任意工序使用时差时对整个网络计划的影响[10-12]. 但是对于时差的其它类似的规律性研究还很少, 尤其是时差与路长关系几乎无人研究. 在 CPM 网络计划中, 路线的最大路长代表总工期, 研究时差与路长的关系实际上是研究时差与项目总工期的关系, 它有助于简化"时间 - 费用"优化问题的计算工作量.

本文首先通过研究网络计划自身规律性, 给出从源点到任意节点, 以及从任意节点到汇点最长路线的路长计算公式, 进而研究时差与路长关系, 推导出总时差定理, 在此定理基础上, 给出"时间 - 费用"优化时构造等效子网络的方法, 用几条路线组成的子网络代替由几十条、几百条路线组成的原始网络, 在该子网络基础上进行计算, 结果不受影响.

1 概念和定理

1.1 基本概念

总时差 一个工序在不影响整个工程按期完工条件下拥有可利用机动时间的最大值, 即

$$TF_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij}$$

其中 TF_{ij}, LF_{ij}, EF_{ij}, LS_{ij}, ES_{ij} 分别表示工序 (i, j) 的总时差, 最迟结束时间, 最早结束时间, 最迟开始时间和最早开始时间.

节点时差 节点 (i) 的时差是紧前工序 (r, i) 和紧后工序 (i, j) 的共用时差, 记为 TF_i, 即

$$TF_i = LF_i - ES_i = LF_{ri} - ES_{ij}$$

其中 LF_i, ES_i 分别表示节点 (i) 的最迟结束时间和最早开始时间.

1.2 基本定理

在 CPM 网络图中, 为了给出时差与路长的关系, 即总时差定理, 本文先给出源点 (1) 与任意节点 (i) 之间, 以及任意节点 (j) 与汇点 (w) 之间最大路长的计算公式, 如以下引理所述:

引理 1 源点 (1) 与任意节点 (i) 之间的最大路长 μ_i^* 等于节点 (i) 的紧后工序 (i, j) 的最早开始时间 ES_{ij}, 即

$$\mu_i^* = ES_{ij} \tag{1}$$

证明 在双代号网络图中, 任意工序最早开始时间都等于其紧前工序最早结束时间最大值, 即

$$ES_{ij} = \max\{EF_{k_1 i}, EF_{k_2 i}, \cdots, EF_{k_n i}\} \tag{2}$$

不妨设

$$ES_{ij} = EF_{ki} \tag{3}$$

即任意工序 (i, j) 的紧前工序中至少存在一个工序 (k, i), 它的最早结束时间与工序 (i, j) 的最早开始时间相等.

设工序 (i, j) 的开始节点 (i) 与源点 (1) 之间的任意一条路线为 $1 \to a \to b \to c \to \cdots \to e \to f \to g \to i$, 因为工序 (i, j) 的工期 $T_{ij} = EF_{ij} - ES_{ij}$, 故路线 $1 \to a \to b \to c \to \cdots \to e \to f \to g \to i$ 的长度 μ_{1i} 为

$$\begin{aligned}\mu_{1i} &= T_{1a} + T_{ab} + T_{bc} + \cdots + T_{ef} + T_{fg} + T_{gi} \\ &= (EF_{1a} - ES_{1a}) + (EF_{ab} - ES_{ab}) + (EF_{bc} - ES_{bc}) + \\ &\quad \cdots + (EF_{ef} - ES_{ef}) + (EF_{fg} - ES_{fg}) + (EF_{gi} - ES_{gi}) \\ &= (EF_{1a} - ES_{ab}) + (EF_{ab} - ES_{bc}) + (EF_{bc} - ES_{cd}) + \cdots \\ &\quad + (EF_{fg} - ES_{gi}) + (EF_{gi} - ES_{ij}) + (ES_{ij} - ES_{1a})\end{aligned} \tag{4}$$

由式 (2) 推知

$$EF_{1a} - ES_{ab} \leqslant 0, EF_{ab} - ES_{bc} \leqslant 0, \cdots,$$
$$EF_{fg} - ES_{gi} \leqslant 0, EF_{gi} - ES_{ij} \leqslant 0$$

故由式 (4) 推知

$$\mu_{1i} \leqslant ES_{ij} - ES_{1a}$$

在双代号 CPM 网络中, $ES_{1a} = 0$, 故

$$\mu_{1i} \leqslant ES_{ij} \tag{5}$$

由式 (3) 和 (4) 可推知, 一定能找到一条路线, 其长度为 ES_{ij}, 由式 (5) 可推知, 这条路线就是节点 (i) 和源点 (1) 之间最长的路线, 记作 μ_i^*, 故 $\mu_i^* = ES_{ij}$.

引理 2 任意节点 (j) 与汇点 (w) 之间的最大路长 $\mu_j^{\oplus}$ 等于关键路线路长 μ^{∇} 减去节点 (j) 的紧前工序 (i, j) 的最迟结束时间, 即

$$\mu_j^{\oplus} = \mu^{\nabla} - LF_{ij} \quad (6)$$

证明 同引理 1.

在上述引理基础上, 给出时差与路长关系定理如下:

总时差定理 通过任意工序 (i, j) 的最长路线的路长 μ_{ij}^{∇} 等于关键路线的路长 μ^{∇} 减去该工序的总时差 TF_{ij}, 即

$$\mu_{ij}^{\nabla} = \mu^{\nabla} - TF_{ij} \quad (7)$$

证明 由引理 1和引理 2可知, 过工序 (i, j) 的最长路线的路长 μ_{ij}^{∇} 为

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^{\nabla} &= \mu_i^{*} + T_{ij} + \mu_j^{\oplus} \\ &= ES_{ij} + T_{ij} + (\mu^{\nabla} - LF_{ij}) \\ &= EF_{ij} + \mu^{\nabla} - LF_{ij} \\ &= \mu^{\nabla} - (LF_{ij} - EF_{ij})\end{aligned}$$

根据总时差定理, 则

$$\mu_{ij}^{\nabla} = \mu^{\nabla} - TF_{ij}$$

对于时间 – 费用优化问题, 为了简化计算工作量, 可以用少数几条路线组成的子网络代替由几十条、几百条路线组成的原始网络, 下面在总时差定理基础上, 给出构造等效子网络的方法.

2 构造等效子网络的方法

2.1 方法描述

在以最低成本把总工期 $T(T > T_0)$ 压缩到 T_0 的优化过程中, 构造等效子网络的步骤如下:

1) 在 CPM 网络图中, 计算任意一个工序 (i, j) 的总时差 TF_{ij};

2) 把总时差 $TF_{ij} \geqslant T - T_0$ 的工序 (i, j) 去掉;

3) 把节点时差 $TF_i \geqslant T - T_0$ 的节点 (i) 去掉.

通过步骤 1)、2)、3) 得到的网络是与原网络等效的子网络.

2.2 算法正确性分析

步骤 1 在 CPM 网络图中, 先把任意一个工序的总时差求出来.

步骤 2 在 CPM 网络图中, 总工期等于最大路长, 要把总工期由 $T(T > T_0)$ 压缩为 T_0, 只需要把网络图中路长大于 T_0 的所有路线的长度都压缩为 T_0 即可. 因此, 在把总工期 $T(T > T_0)$ 压缩为 T_0 的过程中, 可把路长小于等于 T_0 的路线去掉, 且压缩效果不变. 当 $TF_{ij} \geqslant T - T_0$ 时, 由总时差定理

$$\mu_{ij}^{\nabla} = \mu^{\nabla} - TF_{ij} \leqslant \mu^{\nabla} - (T - T_0)$$

由于总工期 T 等于关键路线路长 μ^{∇}, 故 $\mu_{ij}^{\nabla} \leqslant T_0$. 由 μ_{ij}^{∇} 定义, $\mu_{ij} \leqslant \mu_{ij}^{\nabla}$, 其中 μ_{ij} 表示过工序 (i, j) 的任意一条路线的路长, 可得 $\mu_{ij} \leqslant T_0$, 则过工序 (i, j) 的所有路线的长都小于等于 T_0. 因此, 把 $TF_{ij} \geqslant T - T_0$ 的工序 (i, j) 去掉后, 减少的路线都是小于等于 T_0 的路线, 因此, 所得子网络与原始网络在把 T 压缩为 T_0 的过程中等效.

步骤 3 在 CPM 网络图中, 节点 (i) 的时差为 $TF_i = LF_i - ES_i$, 由式 (2), $EF_{k_n i} \leqslant ES_i$, 故

$$TF_i = LF_i - ES_i \leqslant LF_i - EF_{k_n i}$$

由定义, $LF_i = LF_{k_n i}$, 因此

$$TF_i \leqslant LF_{k_n i} - EF_{k_n i} = TF_{k_n i}$$

同理可得

$$TF_i \leqslant TF_{ij_m}$$

因此当 $T - T_0 \leqslant TF_i$ 时

$$T - T_0 \leqslant TF_{k_n i}, \quad T - T_0 \leqslant TF_{ij_m}$$

所以当把节点 (i) 去掉后, 其所有的紧前工序 (k_n, i), 紧后工序 (i, j_m) 都跟着被去掉. 当 $TF_i \geqslant T - T_0$ 时, (k_n, i) 和 (i, j_m) 总时差都大于等于 $T - T_0$, 由步骤 1, 所得的子网络与原始网络等效.

值得注意的是, 因为节点时差较易计算, 且其紧前紧后工序可以同时去掉, 所以在构造等效子网络的过程中, 可以先去节点, 再去工序.

2.3 算法复杂性分析

假设网络中共有 n 个工序, 该构造等效子网络方法的计算复杂性分析如下:

步骤 1 需要计算工序总时差, 最多计算 n 次, 并将非零值找出, 复杂度为 $O(n)$.

步骤 2 找出总时差 $TF_{ij} \geqslant T - T_0$ 的工序 (i, j), 最多找 n 次, 复杂度为 $O(n)$.

步骤 3 找出节点时差 $TF_i \geqslant T - T_0$ 的节点 (i), 最多找 n 次, 复杂度为 $O(n)$.

所以运行步骤 1) ~ 3) 的复杂度为 $O(n)$.

可见, 该算法的计算复杂度为 $O(n)$.

3 应用举例

如图 1, 要把项目总工期 149d压缩为 140d, 求其等效子网络.

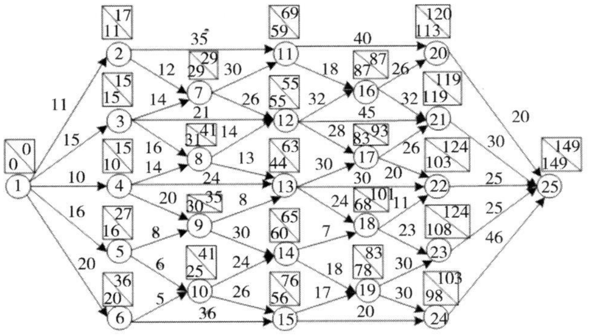

图 1　网络计划图

Fig 1 Network planning graph

解　首先 $TF_i \geqslant 149-140=9$d的节点 (5), (6), (8), (10), (11), (13), (15), (17), (18), (20), (22), (23) 去掉; 再把 $TF_{ij} \geqslant 9$的工序 (3, 12), (12, 21), 去掉, 得到等效子网络 (如图 2).

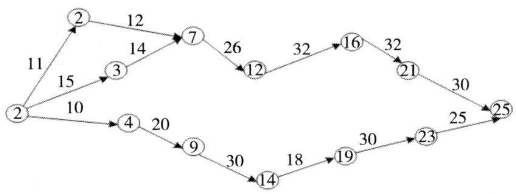

图 2　等效子网络

Fig 2 Equivalent sub-network

显然, 图 2比图 1简单的多.

如果在图 1中, 给出每个工序的费用率, 并且知道每缩短一天奖励 m 元, 问最佳压缩工期是多少. 求解此问题也可以通过构造等效子网络来减少计算工作量.

4　结　论

本文研究了 CPM 网络计划中机动时间与路长的规律, 推导出了总时差定理, 并以该定理为基础, 设计出构造等效子网络的方法. 对于如下“时间 – 费用”优化问题: 以最低成本把总工期 $T(>T_0)$ 压缩到 T_0; 考虑奖罚因素条件下, 求综合效益最大的最佳工期; 工期一定, 如何使费用最低; 以最低成本制定最佳工期等, 如果使用等效子网络代替原有网络, 可以从根本上简化该类问题的计算工作量.

此外, 本文给出的“总时差定理”反映了机动时间与路长的关系, 以及 CPM 网络计划的整体规律性, 因此, 除了时间 – 费用优化问题, 还有好多问题可以借助于该定理去研究, 使问题得到简化.

参 考 文 献:

[1]杨　劲. 建设项目进度控制 [M]. 北京: 地震出版社, 1995. 27–40.
Yang Jin. Construct Project Schedule Control[M]. Beijing: Earthquake Press, 1995: 27–40. (in Chinese)

[2]魏国华, 傅家良, 周仲良. 实用运筹学 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 1987. 116–124.
WeiGuohua, Fu Jialiang, Zhou Zhongliang. Utility Operational Research[M]. Shanghai: Fudan University Press, 1987. 116–124. (in Chinese)

[3]钟　嵬, 殷志文, 娄　娜. 赶工问题的一个新的最优算法 [J]. 复旦学报 (自然科学版), 2001, 40(4): 456–460.
ZhongWei, Yin Zhiwen, Lou Na. A new optimizing algorithm for the time-cost project network[J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 2001, 40(4): 456–460. (in Chinese)

[4] Elmaghraby S E. Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models[M]. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1977: 18–22.

[5] Elmaghraby S E. Activity nets: A guided tour through some recent developments[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 82: 383–408.

[6] Elmaghraby S E. On criticality and sensitivity in activity networks[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 127: 220–238.

[7] Kelley J E, Walker M R. Critical Path Planning and Scheduling[C] //Proceedings of the Eastern Joint Computational Conference, 1959, 16: 160–172.

[8]乞建勋. 网络计划优化新理论与技术经济决策 [M]. 北京: 科学出版社, 1997: 12–14.
Qi Jianxun. New Theory of Network Planning Optimization and Decision-Making of Technology Economy[M]. Beijing: Science Press, 1997: 12–14. (in Chinese)

[9]李星梅, 乞建勋. 基于时差分析的时标网络图探究 [J]. 运筹与管理, 2006, 15(6): 28–33.

Li Xingmei, Qi Jianxun. Study on time-scaled network diagram based on the analysis of activity floats[J]. Operations Research and Management Science, 2006, 15(6): 28-33. (in Chinese)

[10]李星梅，乞建勋，苏志雄．基于时差分析的资源均衡问题探究[J]．中国管理科学，2007，15(1)：47-54.

Li Xingmei, Qi Jianxun, Su Zhixiong. The research on resource leveling based on the analysis of activity floats[J]. Chinese Journal of Management Science, 2007, 15(1): 47-54. (in Chinese)

[11] Elmaghraby S E, Kamburowski J. On project representation and activity floats[J]. Arabian Journal of Science and Engineering, 1990, 15: 627-637.

[12]Warren T. Four floats measures for critical path scheduling[J]. Journal of Industrial Engineering, 1969, 10: 19-23.

Theories and methods of creating equivalent sub-network

QI Jian-xun, LI Xing-mei, WANG Qiang

School of Business Administration, North China Electric Power University, Beijing 102206, China

Abstract Critical path method (CPM) network is one of the most useful instruments for project management. The relationship between the activity float and the path length, which shows the fundamental laws of an activity-on-arc CPM networks, is studied in this paper. Two equations about the length of the longest path from start node to arbitrary node and from arbitrary node to end node are given. Relative theories such as "Total Float Theory" are presented and demonstrated on the basis of the research above. Then, an easy method whose complexity is $O(n)$ is designed to create the "the equivalent sub-network" which can be used to simplify the "time-cost tradeoff" problem. Furthermore, a strict theoretic proof about the new algorithm of the equivalent sub-network is provided. At last, it is proved to be feasible and easy to use through an example. Based on this method, the original network with scores of, or even hundreds of paths can be represented by an equivalent sub-network of less paths which can simplify the calculation.

Key words project management; activity float; equivalent sub-network; time-cost tradeoff