第 13卷第 1期
2010年 1月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 13 No. 1
Jan. 2010

金融泡沫与企业投资[①]

张利兵[1,2], 吴冲锋[2], 应益荣[3]
(1. 上海立信会计学院金融学院, 上海 201620; 2. 上海交通大学安泰经济管理学院, 上海 200052;
3. 上海大学国际工商与管理学院金融系, 上海 200444)

摘要: 研究了金融泡沫对企业投资策略影响的微观机理. 在投资项目市场价值中引入金融泡沫因子,建立起企业的投资决策模型,研究了泡沫对投资概率的影响,并对泡沫持续期、决策者视窗和融资规模和方式与金融泡沫对投资的共同影响进行了分析. 结果表明:正泡沫对投资具有推动作用,负泡沫具有抑制作用;正泡沫期间进行的投资长期具有折价趋势,负泡沫期间进行的投资价值有上升趋势;正泡沫持续期越长,投资的可能性越小;负泡沫的持续期越长,投资可能性越大;在正泡沫期,若决策者越短视,立即投资的动机越强,企业偏向于出售股权进行投资;在负泡沫期,若决策者越短视,投资将会推迟,企业偏向于以其他融资方式进行投资.

关键词: 投资; 泡沫; 马尔科夫链; 美式期权
中图分类号: F830. 91　　文献标识码: A　　文章编号: 1007 - 9807(2010)01 - 0060 - 10

0 引　言

企业投资是一种扩大再生产行为. 在许多情况下,企业投资既可以通过实物投资、也可通过并购得以实现,但是,对经济中出现的新兴行业,则常常无现成的企业可以并购,这时候,实物投资就不可替代. 从长期来看,合理的企业研发—实物投资[②]因为改变企业的产出能力进而改变了总供给,是经济增长的一种基本动力;从短期来看,企业投资扩大了总需求也会是经济波动的原因,因此,对企业投资行为的研究是经济学的重要研究领域.

传统企业投资分析框架是由 Jorgenson[1]等人发展起来的以技术等纯实际经济因素决定的新古典投资理论,成为现代企业投资理论的基础. 在这种理论中,企业的产出能力、产品价格和资本成本决定了合意的资本规模(过程),而资本存量的调整是渐进的,投资方程反映了当前资本存量向合意资本规模的调整. 将金融市场和企业投资行为结合起来的则是托宾的 Q理论,由于能从跨时期选择理论中推导出来[2-3],所以托宾 Q理论和 Jorgenson等人的新古典投资理论具有相似性. 但是,这两种基本理论毕竟是基于确定性分析的. 如果投资具有不可逆性和可延迟性,那么未来收益的不确定性对投资的影响很大[4-5]. Dixit和 Pindyck[6]等在不确定性经济中将企业拥有的投资机会看作一个期权,采用结构化模型方法进行研究,这种方法能够分析企业投资的相机决策问题:企业可以选择合适的时机进行投资.

沿着不确定性经济中投资机会可看作一个美式期权(实物期权)的思路,许多学者对此进行了进一步的研究,包括引入不完全信息[7]. 国内的众多学者也通过实物期权的方法研究了与企业投资相关的各方面问题,如不对称信息[8],具有专

① 收稿日期: 2007 - 05 - 18; 修订日期: 2009 - 09 - 26.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70701023); 中国博士后基金资助项目(20060390628); 上海市教育委员会科研创新资助项目(10ZS129).
作者简介: 张利兵(1974 —), 男, 四川人, 博士(后), 副教授. Email: zlb_zhang@126.com
② 企业的研发本身也可看作一种投资行为.

利情况下研发决策[9],具有竞争对手时的企业投资[10-11],甚至在实物期权中引入模糊性[12]等. 总体上来说,在不确定性条件下,采用实物期权及其扩展研究企业的投资时机,无论在理论和应用方面都获得了较大成功.

尽管如此,这些研究分析中仍存在着一个基本问题:未考虑融资限制,即假设企业可以很方便地获得所需资金. 实际上,企业进行投资时必然需要资金的投入,没有用于投入的资金,企业投资行为就不可能实现. 对上市公司而言,企业的外部融资方式主要可以为权益性融资和债权性融资两类,这两类融资方式均可以通过金融市场(发行证券)来实现. 这样,金融市场既可对企业投资提供支持,也可以成为企业投资的融资限制. 以 Dixit 和 Pindyck[6]等研究不考虑融资方式的选择的一个主要原因是他们均是基于金融市场完美的假设:金融市场完全有效,各种融资方式可以完全相互替代,由此,融资是可以看作无摩擦的,企业可以很方便地获得投资所需的资金.

然而,金融市场并不像经典金融理论所称的那样理想,金融资产的价格并非时时真实地反映基本价值,这样无疑会扭曲金融市场基于无摩擦情况下的具有的资源配置功能. 金融资产价格常常会表现出高估或低估、并在高估 - 真实价格 - 低估之间转换的现象,这种价格与基本价值之间的偏离被称为"泡沫". 金融泡沫对实体经济的影响很早就受到关注,如 Keynes[13]认为,短期的投资者情绪至少在某些时期是投资的重要影响力量. Malkiel[14]和 Richardson[15]分别总结了美国股票市场上被看作泡沫的时期,这些时期包括 1959—1962年的电子化, 1967—1968的增长股票,上世纪 70年代早期的"nifty fifty",上世纪 80年代的自然资源、高新技术和生物技术类股票,上世纪 90年代的网络股票等.

迄今为止,关于金融泡沫与企业投资之间关系的研究主要以实证为主. 早期的实证研究关注企业投资是否对股票价格敏感,这类研究获得的结论比较模糊,如 Barro[16]认为企业投资与股票价格之间具有很强的相关性,而 Morck, Shleifer 和 Vishny[17]、Blanchard, Rhee, Summers[18]则发现这种相关性较弱. 近年来的研究则研究股票价格中错误定价成分(泡沫成分)与企业投资之间的相关性,发现这种相关性很强,如 Chirinko 和 Schaller[19-20], Panageas[21], Polk 和 Sapienza[22]等. Baker, Stein 和 Wurgler[23]发现股票融资依赖度越高的企业,其投资对股票价格越敏感. 总的来说,这些实证研究的结果表明,金融资产价格中的泡沫成分对企业投资决策有影响.

由此可以看出,如果将完全有效的金融市场(无泡沫成分)下的企业投资行为看作理性的最优行为,则金融市场中的泡沫会对这种最优行为产生扭曲,当然,这中扭曲的行为在企业自身来看仍然是最优的,因为企业只是对不太理性的金融市场产生了理性的反应. 由于企业在这种情况下的行为被金融泡沫扭曲,势必对总体经济的运行也产生某种程度的影响. 因此,企业在泡沫条件下的行为值得深入研究. 问题的关键在于:企业在存在金融泡沫的条件下,究竟该如何决策呢? 本文试图对此进行回答.

首先,假设企业的决策者——管理人(如经理)是最大化现有股东最大利益的,并且,管理人因为拥有比外部投资者更多关于企业的信息(如净现金流及其分布),因而对金融市场中是否存在泡沫能够合理判断,这样,管理人与金融市场中的外部投资者相比是理性的. 这种假设使得企业对有限理性的金融市场产生理性的反应.

其次,假设管理人具有一定的时间视窗,需要在企业的短期市场表现(价格)和长期价值之间平衡. 从本文中可以看出,如果金融市场完全有效,价格时时反映的都是真实价值,那么管理人的时间视窗对投资是无影响的.

第三,本文将金融市场中的泡沫成分分为三个基本状态:无泡沫、正泡沫(价格高估)和负泡沫(价格低估),并且忽略三个基本状态之间的变化过程③,即假设这三个状态之间的转移是一步完成的.

第四,假设投资时的初始投入(固定成本)给定,在整个决策过程中保持不变. 也就是说,企业

③ 在许多关于金融市场泡沫的模型中,常常假设(正)泡沫有一个积累过程,即出现连续的(正)超额收益率,泡沫积累到一定程度后保持一段时间,然后再破裂,价格发生类似跳跃的急跌,为了简化,本文不考虑此积累过程.

先决定投资规模,然后根据投资规模评估该项目的现金流,选择投资时机.资金来源的一部分是对外发售股权,这样,通过外部融资就可以将企业投资行为和金融市场联系起来.

在这几个基本假设条件下,本文将企业持有的投资机会看作一个无限期的美式期权,并研究企业的投资行为,分析泡沫的属性等因素对企业行为的影响.本质上,本文研究的是金融市场中的泡沫对企业行为的"扭曲"行为.本文的研究逻辑上与 Dixit和 Pindyck[6]等的实物期权分析方法是一致的,但也有较大的区别:考虑金融泡沫的影响,必然将金融市场联系起来,也就是在企业的实物资产基本价值和其金融市场上的价格联系起来,从这个角度上说,本文的研究与托宾 Q理论的思路也具有一致性.

1 投资项目的价值

1.1 投资项目基本价值

假设企业面临着一个投资机会,该投资项目的净现金流入速率为 v,且满足如下过程

$$dv/v = (\mu - \eta)\,dt + \sigma\,dw \tag{1}$$

其中 $\eta > 0$表示的"漏出"比率(实际上即该项目投资机会的持有成本率),标准布朗运动 w描述经济中的风险源,则该投资项目的基本价值 s为其未来净现金流入的折现

$$s \equiv E^Q \int_t^{\infty} e^{-r(s-t)}\,ds = \frac{v}{\eta} \tag{2}$$

式(2)的推导见 Pindyck[5]、或 Dixit和 Pindyck[6],其中折现因子 r假设为常数,Q为风险中型概率.由式(2)可得

$$ds/s = (\mu - \eta)\,dt + \sigma\,dw$$

因此,该项目的价值为 s,而 $v = \eta s$为"漏出"速率,在企业进行投资前不能获得,而一旦完成了投资,$v = \eta s$部分就成为企业所得(直接的现金流入),因此 $v = \eta s$是该投资项目的持有成本.

1.2 金融泡沫

假设金融市场总体上是有限理性的,投资者的情绪和市场交易制度共同作用,导致金融市场中存在或正或负的泡沫.设投资项目在金融市场上的价格 S具有如下形式

$$S = sy \tag{3}$$

其中变量 $y > 0$描述金融市场有限理性的程度,$y > 1$表示金融市场存在正的泡沫,即高估;$y < 1$表示金融市场存在负的泡沫,即低估;$y = 1$则表示金融市场正确地估价.

假设 y为一个不定期变化的随机过程,在任意时刻,y既可能保持不变,也可能产生一个随机的变化,也就是说,金融市场错误定价的程度在不定期地发生改变.为了简化,假设 y具有三个状态:y_H,y_O和 y_L,且 $y_L < y_O = 1 < y_H$.y将在三个状态之间转移,在任意状态发生状态转移的强度分别为 λ_H,λ_O和 λ_L.由于 y具有三个状态,故在任意状态一旦发生状态转移时,均存在两种状态转移可能,设这种条件状态转移概率为 q_{ij},且 $\sum_{j \neq i} q_{ij} = 1$.因此,$y$实际上是一个具有三个状态的马尔可夫过程.

由式(2)和(3)可得

$$dS/S = (\mu - \eta)\,dt + \sigma\,dw + \frac{z}{y}\,dJ \tag{4}$$

式(4)中,若 $dJ = 1$表示 y的状态发生了改变,即金融市场中的投资者的情绪发生了变化,引起了泡沫或泡沫破裂;若 $dJ = 0$则表示 y维持原状,即金融市场中的投资者情绪无重大改变.z表示 y的状态改变的增量,由初状态和末状态确定(比如 z可以等于 $y_H - y_L$,表示 y由 L状态转移到 H状态,也即市场中外部投资者的情绪发生变化,使金融市场从低估变为高估).显然,式(4)是一个跳跃-扩散过程,且跳跃变量 y状态有限.

本文关于金融泡沫的简化假设能抓住泡沫的基本特征:首先,泡沫可正可负;其次,泡沫在三个基本状态之间转移;第三,当泡沫保持在某个状态时,因 $z = 0$,金融资产的价格仍然满足理想的几何布朗运动规律,泡沫成分 $(y - 1)s$也能够获得均衡收益,并随资产的基本价值的变化而变化,也就是说,泡沫成分并不是恒定的;当泡沫状态发生转移时,$z \neq 0$,此时会有或正或负的超额收益.

此外,还假设 y具有如下性质:y与资产基础价值无关,且 $Ey = \sum_i p_i y_i = y_O = 1$.假设 y与金融资产的基础价值无关是因为 y是由投资者总体情绪引起的;$Ey = 1$的假设根据是从长期来看,金融资产价格有向其基本价值回归的趋势.p_i表示 y处于 i状态的无条件概率.这样,由式(3)可知

$ES(t) = Es(t)$. 状态 i的无条件概率 p_i由柯莫哥洛夫前进方程决定

$$\sum_{i \neq j} p_i \lambda_i q_{ij} = p_j \lambda_j \tag{5}$$

由于假设 y具有三个状态,因此式 (5) 实际上是由三个方程构成的方程组, 加上隐含的条件 $\sum_i p_i = 1$,就可以获得状态的无条件概率.

对拥有投资机会的企业来说,投资项目的现金流 v可以评估,根据式 (2) 可由 v获得 s,因而 s是可观测的;另一方面,假设管理者比外部投资者拥有更强的理性,能够判断市场处于高估还是低估,故 y也可以假设为可观测的. 因此,对企业管理者来说,总可以假设 S是可观测的. 这样,投资项目的边际托宾比率为

$$Q_{Tobin} = \frac{S}{K} = \frac{vy}{\eta_v K} \tag{6}$$

这里之所以称上式为边际托宾比率,是因为对企业来说,进行投资时付出资本增量 K和得到企业的市场价值增量 S.

2　投资期权

拥有投资机会的企业既可以投资,也可以不投资,还可以选择投资的时间,因此,拥有该投资机会就相当于拥有一个期权. 假设企业的决策者(如经理,或所有老股东)在长期和短期收益之间做出权衡,对短期赋予的权重为 λ,则对长期赋予的权重相应为 $1-\lambda$,其中 $\lambda \in [0,1]$描述决策者的短视程度. 此外,企业还决定将投资项目的部分所有权对外出售,其比例为 θ,则原股东持有的投资项目的股权比例为 $1-\theta$. 这样,通过投资,企业可以获得的收益为

$$\lambda(S - I) + (1-\lambda)[(1-\theta)s + \theta S - I] = \frac{(y-1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}{y} S - I \tag{7}$$

其中, $S - I$表示决策者完全短视情况下所认可的短视收益; $(1-\theta)s + \theta S - I$表示决策者完全非短视情况下认可的收益,而 θS表示出售股权所得, $(1-\theta)s$则表示原股东继续持有的投资股份的真实价值(长期); I为投资的固定成本. 这样企业投资的目标为最大化投资的市场收益

$$\max\left\{\frac{(y-1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}{y} S - I, 0\right\} \tag{8}$$

设无限期投资期权的价值为 $O(S)$, 则具有如下结论:

命题 1　当金融市场存在泡沫时,若 O_i表示 i状态下的投资期权, $O_{i,S}$ 和 $O_{i,SS}$ 分别表示投资期权关于 S的一、二阶导数,则无限期的投资期权价值在金融市场高估、正常估价和低估情况下分别满足微分方程

$$rO_H = (r-\eta) SO_{H,S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{H,SS} + \lambda_H \times \left(O_H\left(S\frac{y_O}{y_H}\right) q_{HO} + O_H\left(S\frac{y_L}{y_H}\right) q_{HL} - O_H\right) \tag{9}$$

$$rO_O = (r-\eta) SO_{O,S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{O,SS} + \lambda_O \times \left(O_O\left(S\frac{y_H}{y_O}\right) q_{OH} + O_O\left(S\frac{y_L}{y_O}\right) q_{OL} - O_O\right) \tag{10}$$

$$rO_L = (r-\eta) SO_{L,S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{L,SS} + \lambda_L \times \left(O_L\left(S\frac{y_H}{y_L}\right) q_{LH} + O_L\left(S\frac{y_O}{y_L}\right) q_{LO} - O_L\right) \tag{11}$$

且投资期权的价值为

$$O_i = A_i S_i^{\alpha_i} = A_i (sy_i)^{\alpha_i},\ i = H, O, L \tag{12}$$

参数 α_H、α_O 和 α_L 分别为

$$F_H(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r + \lambda_H \times \left(q_{HO}\left(\frac{y_O}{y_H}\right)^x + q_{HL}\left(\frac{y_L}{y_H}\right)^x - 1\right) = 0 \tag{13}$$

$$F_O(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r + \lambda_O \times \left(q_{OH}\left(\frac{y_H}{y_O}\right)^x + q_{OL}\left(\frac{y_L}{y_O}\right)^x - 1\right) = 0 \tag{14}$$

$$F_L(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r + \lambda_L \times \left(q_{LH}\left(\frac{y_H}{y_L}\right)^x + q_{LO}\left(\frac{y_O}{y_L}\right)^x - 1\right) = 0 \tag{15}$$

的正解. 系数 A_i待定.

命题 1的证明过程见附录.

为了与无泡沫金融市场条件下的企业投资行为相比较,假设无金融泡沫条件下企业的投资期权为 $O = As^{\alpha}$,其中 α为 $F(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r = 0$的正根,并且 $\alpha > 1$,则在这种条

件下对应的投资执行条件为 $S^* = \frac{\alpha I}{\alpha - 1}$ (Dixit和 Pindyck[6]). 需要注意的是,无泡沫金融市场条件下的投资时机与有泡沫金融市场中当泡沫为 0时的投资时机是不同的. 命题 2是 α_i 之间的关系和有关属性.

命题 2 设 α 为 $F(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r = 0$ 的正根,若命题 1中的 $\alpha_i > 1$,则它们具有如下关系:

$$\alpha_L < \alpha < \alpha_H$$

并且

$$\frac{\partial \alpha_H}{\partial \lambda_H} > 0, \frac{\partial \alpha_L}{\partial \lambda_L} < 0$$

命题 2的证明并不复杂,附录给出了说明,其结论有助于本文第 3节中投资概率分析. 参数 α_O 与 α 的大小关系可由下面的结论确定:

命题 3 如果 $q_{OH} y_H + q_{OL} y_L > y_O$,则 $\alpha_O < \alpha$;若 $q_{OH} y_H + q_{OL} y_L < y_O$,则 $\alpha_O > \alpha$;若 $q_{OH} y_H + q_{OL} y_L = y_O$;则 $\alpha_O = \alpha$

命题 3可由式 (14) 及命题 2附录中的说明很方便地得出.

由式 (8) 可知投资期权价值的下限 (边界) 为 $\lim_{S \to \infty} O_i(S) = \infty$,再根据投资期权的解的形式 (12),可知命题 2中的假设 $\alpha_i > 1$是必需的. 结合命题 2可知,须有 $\alpha_L > 1$,由式 (15) 可知,只需要

$$\lambda_L \left(q_{LH} \frac{y_H}{y_L} + q_{LO} \frac{y_O}{y_L} - 1 \right) < \eta$$

即可. 如果此条件不满足,那么 $\alpha_L \le 1$,则从第 3节中可以看出,因为不能满足美式期权的平滑条件,则理性的企业决策者不会执行该投资期权,故本文不考虑 $\alpha_L \le 1$的情况.

3 企业投资决策

3.1 投资时机

美式期权的执行需要满足如下两个基本条件

$$O_i = \frac{(y_i - 1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}{y_i} S - I, \quad i = H, O, L \tag{16}$$

$$O_{i,S} = \frac{\partial O_i}{\partial S} = \frac{(y_i - 1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}{y_i}, \quad i = H, O, L \tag{17}$$

其中式 (16) 称为值条件,表示执行期权时,期权的价值等于立即执行的所得 (即等待价值为 0);式 (17) 称为平滑条件,作为期权价值的一阶条件,保证执行时投资期权取极值. 根据式 (12)、(16) 和 (17),很容易得到描述最优投资时机的临界条件④

$$S_i^* = \frac{\alpha_i I}{\alpha_i - 1} \frac{y_i}{(y_i - 1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}, \quad i = H, O, L \tag{18}$$

当 $S \ge S_i^*$ 时,期权可以执行. 此外还可以获得系数 A_i:$A_i = \frac{I}{\alpha_i - 1} \frac{1}{S_i^{*\alpha_i}}$, $i = H, O, L$. 从式 (18) 可以看出,直接影响投资时机的因素为 α_i和 y_i,并且 α_i 和 y_i 越大, S_i^* 越小,因而投资的可能性增大⑤.

由此,投资期权的价值为

$$O_i = \begin{cases} O_i = A_i S_i^{\alpha_i}, & S_i \le S_i^* \\ \frac{(y_i - 1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}{y_i} S_i - I, & S_i > S_i^* \end{cases} \tag{19}$$

当 $y = y_H$,此时金融市场处于具有正泡沫状态,由命题 2可得 $\alpha_H > \alpha$ 由式 (18) 可知,金融市场存在正泡沫时投资的临界条件较小,即

$$S_H^* / y_H < S^* \tag{20}$$

因为可投资区间的概率为 $P\{s \ge S_H^* / y_H\}$,由式 (20) 可知正泡沫对投资具有推动作用. 这有助于解释 Chirinko和 Schaller[19] 对日本金融泡沫和固定投资之间正相关关系的研究结论. 此外, Chirinko和 Schaller[20] 发现,至少对某些企业来说,市价的高估导致它们过度的投资; Polk和 Sapienza[22] 也发现企业投资和错误定价 (价值高估) 之间具有较显著的正相关关系. 这些实证研究支持本文模型的结论.

当 $y = y_L$,此时金融市场处于具有负泡沫状态,由命题 2, $\alpha_L < \alpha$,由式 (18) 可知,金融市场

④ 临界条件虽然为投资项目的市场价格,但由第 1节的分析可知,市场价格可以转化为投资项目的现金流速率,因为投资项目的现金流速率是可以观察的,所以市场价格也相当于可观察的.

⑤ 由命题 1容易看出, α_i 本身也与 y_i 有关,并且是 y_i 的增函数,这样,只需 y 越大,则投资的可能性就越大.

存在负泡沫时投资的临界条件值较大,即

$$S_L^* / y_L > S^* \tag{21}$$

因此,负泡沫对投资具有抑制作用.

当 $y = y_O$,此时金融市场中不存在泡沫,由命题 3可知,α_O 与 α之间的大小关系存在三种可能: $\alpha_O \geq \alpha$,则对投资具有推动作用;若 $\alpha_O < \alpha$,则对投资具有抑制作用;若 $\alpha_O = \alpha$,则对投资不具有实质性影响.

容易知道,投资时的临界边际托宾比率 $Q^*_{Tobin,\ i}$为

$$Q^*_{Tobin,\ i} = \frac{S_i^*}{K} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1} \times \frac{y_i}{(y_i - 1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}\frac{I}{K},$$

$$i = H, O, L \tag{22}$$

由前面的结论和式 (22)不难看出,当 $\lambda < 1$时,y_i越大,$Q^*_{Tobin,\ i}$越小. 因此,在金融市场存在正泡沫期间,具有较小的边际托宾比率时企业就可以进行投资,这也说明金融市场中的正泡沫对投资的促进作用.

3.2 投资概率

在任意时刻,企业的投资可能进行,也可能不进行,这依赖于当时的状态 S_i是否大于投资的临界条件 S_i^*. 对给定的泡沫状态,对企业投资能够进行的概率,将其称为条件投资概率;对任意状态下的投资可能性,称其为无条件投资概率.

当 y处于 i状态时,其条件投资概率为 $P\{S_i \geq S_i^* \mid y = y_i\} = P\{q_i \geq q_i^* \mid y = y_i\}$,不难算出

$$P\{S_i \geq S_i^* \mid y = y_i\} = 1 - N(\delta_i) \tag{23}$$

其中 $N(\cdot)$是标准正态分布累积函数,且

$$\delta_i = \frac{\ln\dfrac{S_i^*}{s_0 y_i} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma} \tag{24}$$

式 (24)中,$s_0 = s(0)$表示投资项目基本价值的初始值,假设 s_0已知. 将式 (18)代入式 (24)可得

$$\delta_i = \frac{\ln\left(\dfrac{\alpha_i I}{s_0(\alpha_i - 1)}\dfrac{1}{(y_i - 1)[(1-\theta)\lambda + \theta] + 1}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma} \tag{25}$$

这样,企业的无条件投资概率为

$$P_I^B = \sum_i P\{S_i \geq S_i^* \mid y = y_i\}P\{y = y_i\} = \sum_i [1 - N(\delta_i)]p_i > 0 = 1 - \sum_i p_i N(\delta_i) \tag{26}$$

若给定金融泡沫状态的无条件概率 p_i(由式 (7)构成的方程组决定),则企业的无条件投资概率由 δ_i决定. 由式 (26)可知,$\frac{\partial P_I}{\partial \delta_i} = -p_i\phi(\delta_i) < 0$,其中 $\phi(\cdot)$表示标准正态分布密度函数,故在一定的范围内,δ_i越大,企业的无条件投资概率会越小;因 $\lim\limits_{\delta_i \to \pm\infty}\phi(\delta_i) = 0$,故当 $\delta_i \to \infty$或 $\delta_i \to -\infty$时,投资概率对 δ_i的变化不敏感. 从式 (25)中还可以看出这样的关系:$\delta_L > \delta_H$,这也反映了正泡沫对投资起推动作用,而负泡沫对投资起抑制作用的事实.

如果金融市场是完全有效的,不存在泡沫现象 (即 $p_H = p_L = 0$),则不难获得企业的投资概率 P_I为

$$P_I = 1 - N(\delta) \tag{27}$$

其中 $\delta = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\alpha I}{s_0(\alpha - 1)}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma}$. 比较式 (26)和 (27),不难发现,两个无条件投资概率与诸多参数有关,因而其大小关系较难确定. 但容易看出,若 $P_I^B - P_I > 0$,说明 (总体)金融泡沫在总体上对企业投资具有推动作用;反之,若 $P_I^B - P_I < 0$,说明金融泡沫对企业投资起抑制作用,这样具有如下结论:

当 $N(\delta) - \sum_i p_i N(\delta_i) > 0$,金融泡沫总体上对企业投资具有推动作用;

当 $N(\delta) - \sum_i p_i N(\delta_i) < 0$,金融泡沫总体上对企业投资具有抑制作用;

当 $N(\delta) - \sum_i p_i N(\delta_i) = 0$,金融泡沫总体上对企业投资没有影响.

特别地,当 $N(\delta) - \sum_i p_i N(\delta_i) = 0$时,虽然企业投资行为与完全有效金融市场条件的投资行为无统计差异,但金融市场中仍然可能存在着泡沫.

3.3 投资的长期绩效

本节考虑企业投资的长期绩效. 当企业进行投资时,必然有 $S \geq S_i^*$,投资收益为 $W = S - I$事实上,

投资时真实的获益为 $\overline{W} = s - I = \frac{S}{y_i} - I$

从长期来看,因为假设金融泡沫的期望为 $Ey = 1$,因此,企业投资时,投资项目的真实价值与投资价值之间存在的差异为

$$\overline{W} - W = (1 - y_i)s \tag{28}$$

这就是说,如果企业投资发生在正泡沫期间(即 $y_i = y_H$),则 $\overline{W} - W > 0$,那么从长期来看,该项目的市场价格将有一个折价趋势.本文的结论同近年来的实证研究结果具有一致性:Baker, Stein和 Wurgler[23]的实证结果表明,对股权融资依赖性强的企业,其投资时通常具有较高的 Q值(他们认为至少 Q值最高的企业,其股价具有被高估的可能性),通过股权融资进行投资后,其长期收益为负. Chirinko 和 Schaller[20]的研究结论也如此.

另一方面,若企业投资发生在负泡沫期间(即 $y_i = y_L$),$\overline{W} - W < 0$,则从长期来看,该项目的市场价格会有一个升值趋势.由于当处于负泡沫期时,通常企业将趋向于采用其他融资方式(见本文第 4.3节的结论),故现有的实证研究无法通过新发行股票的收益率检验这一点(因为这种情况下要么采用其他融资方式,要么不投资).

由于投资项目价值将体现在企业总价值中,因此企业市场价值也具有类似的趋势.

4 讨 论

4.1 泡沫持续期

所谓泡沫的持续期,是指泡沫某个状态持续的平均时间.泡沫变量 y的状态变化由参数 λ_i决定,λ_i越大,i状态越不稳定.设 τ_i表示 i状态的持续时间长度,则因为 $P\{\tau_i - t\} = e^{-\lambda_i t}$,这样,$i$状态的平均持续期为

$$\bar{\tau}_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

那么,由式(18)可知

$$\frac{\partial S_i^*}{\partial \bar{\tau}_i} = \frac{\partial S_i^*}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{\tau}_i} =$$

$$\frac{I}{(\alpha_i - 1)^2}\frac{y_i}{(y_i - 1)[(1 - \theta)\lambda + \theta] + 1}\lambda_i^2\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i},$$

$$i = H, O, L \tag{29}$$

当金融市场处于正泡沫期时,由命题 2可知,$\frac{\partial \alpha_H}{\partial \lambda_H} > 0$,因此$\frac{\partial S_H^*}{\partial \bar{\tau}_H} > 0$,这说明正泡沫的持续期越长,投资的临界条件越大,因为企业愿意等待更长的时间获得更好的机会.

当金融市场处于负泡沫期时,由命题 2可知,$\frac{\partial \alpha_L}{\partial \lambda_L} < 0$,故$\frac{\partial S_L^*}{\partial \bar{\tau}_L} < 0$,说明负泡沫的持续期越长,企业投资的临界条件反而越小,这是因为若负泡沫持续期越短,企业可以等到负泡沫状态变化并支付较少的等待成本,若负泡沫持续期越长,企业等到负泡沫状态变化时所支付的等待成本越大.

4.2 决策者时间视窗

由前面的模型可知,$\lambda \in [0, 1]$描述企业决策者的时间视窗,λ越大,说明企业决策者越短视.由式(18)可得

$$\frac{\partial S_i^*}{\partial \lambda} = \frac{\alpha_i I}{\alpha_i - 1}\frac{y_i(1 - y_i)(1 - \theta)}{\{(y_i - 1)[(1 - \theta)\lambda + \theta] + 1\}^2},$$

$$i = H, O, L \tag{30}$$

这样,若市场处于高估时期,$\frac{\partial S_H^*}{\partial \lambda} < 0$,说明若决策者越短视,投资进行的临界条件就越小;若市场处于低估期,$\frac{\partial S_L^*}{\partial \lambda} > 0$,说明若决策者越短视,投资进行的临界条件就越大;而当金融市场处于正常估价时,$\frac{\partial S_O^*}{\partial \lambda} = 0$,决策者短视与否对投资进行的临界条件没有影响.

实际上,如果决策者极端短视,即决策者完全关注投资项目的当前市场价格,那么 $\lambda = 1$,由式(7)可知其对应的目标为

$$\max\{S - I, 0\} \tag{31}$$

投资时机为

$$S_i^* = \frac{\alpha_i I}{\alpha_i - 1}, \quad i = H, O, L \tag{32}$$

这种情况与 Dixit和 Pindyck[6]等的结果具有相同的形式,不同的只是 α_i的值而已.

相反,如果决策者完全关注投资项目的长期价值而非当前市场价格,那么 $\lambda = 0$,由式(7)可知,期权执行时,其对应的目标为

$$\max\{\frac{(y - 1)\theta + 1}{y}S - I, 0\} \tag{33}$$

投资时机为

$$S_i^* = \frac{\alpha_i I}{\alpha_i - 1}\frac{y_i}{(y_i - 1)\theta + 1},\quad i = H, O, L \tag{34}$$

当 $\theta = 1$时, $S_i^* = \frac{\alpha_i I}{\alpha_i - 1}$,也就是说,当企业考虑全部出售其投资部分的股权时,投资时机与 Dixit 和 Pindyck[6] 等的结果具有相同形式.

投资决策者的时间视窗对投资的影响可以这样理解:当金融市场具有正泡沫时,若决策者越短视,就越看重目前的高估价格,因此立即投资的动机越强;反之,当金融市场具有负泡沫时,若决策者越短视,就越"厌恶"目前的低估价格,因此就会有推迟投资的动机. 当金融市场处于正确定价期时,因为这时候的短期价格和长期价格上只存在时间价值差异 (短期价值是长期价值的折现),因此,长短期价格之间不存在本质上的差异,故企业决策者的时间视窗无影响.

4.3　股权融资规模

模型假设企业决定将投资项目的部分所有权对外出售,其比例为 θ,则原股东持有的投资项目的股权比例为 $1 - \theta$,因此 θ描述了投资的相对股权融资规模:θ越大,股权融资的相对规模越大. 由式 (18) 可得

$$\frac{\partial S_i^*}{\partial \theta} = \frac{\alpha_i I}{\alpha_i - 1} \times \frac{(1 - \lambda) y_i (1 - y_i)}{\{(y_i - 1)[(1 - \theta)\lambda + \theta] + 1\}^2},\quad i = H, O, L \tag{35}$$

从式 (35) 可以看出,当金融市场处于正泡沫期时 $(y_i = y_H > 1)$, $\frac{\partial S_H^*}{\partial \theta} < 0$,说明股权融资规模越大,投资临界条件越小,立即进行投资的可能性越大;当金融市场处于负泡沫期时 $(y_i = y_l < 1)$, $\frac{\partial S_L^*}{\partial \theta} > 0$,股权融资规模越大,投资临界条件越大,立即投资的可能性越小;当金融市场处于无泡沫期时 $(y_i = y_O = 1)$, $\frac{\partial S_O^*}{\partial \theta} = 0$,股权融资规模对投资临界条件无影响.

当 $\theta = 0$时,表明企业投资未对外出售股权,而是通过其他方式进行融资. 此时式 (18) 变为

$$S_i^* = \frac{\alpha_i I}{\alpha_i - 1}\frac{y_i}{(y_i - 1)\lambda + 1},\quad i = H, O, L \tag{36}$$

比较式 (18) 和 (36) 可以看出:当金融市场处于正泡沫期时 $(y_i = y_H > 1)$,式 (36) 大于式 (18),这说明企业以出售股权的融资方式进行投资的临界条件较小,因此企业会偏向于出售股权 (如发行新股) 进行投资;当金融市场处于负泡沫期时 $(y_i = y_L < 1)$,式 (36) 小于式 (18),说明企业以出售股权的融资方式进行投资的临界条件较大,因此企业偏向于以其他融资方式进行投资;当金融市场处于无泡沫期时,融资方式对投资时机无影响.

Baker, Stein和 Wurgler[23] 发现股票融资依赖度越高的企业, 其投资对股票价格越敏感; Chirinko和 Schaller[22] 也认为,通过发行高估的股票获得廉价的融资在企业投资中扮演了重要角色. 本文的理论研究支持他们的实证结论:则当处于负泡沫状态时, 企业的投资门槛会很高 (因为 $\frac{\partial S_L^*}{\partial \theta} > 0$),发行新股进行投资难以实现;而若处于正泡沫状态时,投资门槛则会较低 ($\frac{\partial S_H^*}{\partial \theta} < 0$). 很显然,如果企业对股权融资的依赖度非常高,则投资在正泡沫期间进行的可能性要大于在其他状态, 这样使得实证时 (如 Baker, Stein 和 Wurgler[23]) 易发现投资对股票价格很敏感:股票价格较高时 (这时候很可能高估) 投资容易进行,反之股票价格较低时 (此时很可能低估) 投资活动受限.

5　结　论

本文研究了金融泡沫对企业投资策略的影响. 在投资项目市场价值中引入金融泡沫因子,建立起具有一定时间视窗的投资决策者的投资决策模型,采用美式期权的分析方法,研究了不同泡沫期的投资时机和泡沫对总的投资概率的影响,并对泡沫持续期、决策者视窗和融资规模和方式与金融泡沫对投资的共同影响进行了分析,其基本结论对现有的实证研究结论具有较强的解释力. 主要结论如下:

(1) 正泡沫对投资具有推动作用,负泡沫具有抑制作用;

(2) 正泡沫期间进行的投资长期来看具有折价趋势, 负泡沫期间进行的投资价值有上升的

趋势;

(3) 正泡沫的持续期越长,投资的临界条件越大,投资的可能性越小;负泡沫的持续期越长,企业投资的临界条件反而越小,投资的可能性越大;

(4) 当金融市场具有正泡沫时,若决策者越短视,就越看重目前的高估价格,因此立即投资的动机越强;反之,当金融市场具有负泡沫时,若决策者越短视,就越"厌恶"目前的低估价格,因此就会有推迟投资的动机.

(5) 当金融市场处于正泡沫期时,企业以出售股权的融资方式进行投资的临界条件较小,因此偏向于出售股权(如发行新股)进行投资;当金融市场处于负泡沫期时企业以出售股权的融资方式进行投资的临界条件较大,偏向于以其他融资方式进行投资.

参 考 文 献:

[1] Jorgenson D W. Capital theory and investment behavior[J]. American Economic Review, 1963, (53): 47 - 56.

[2] Abel A. Investment and the Value of Capital[M]. New York: Galand, 1979.

[3] Blanchard O J, Fisher S. Consumption and investment: Basic infinite horizon models[R]. Lectures in Macroeconomics, Cambridge: MIT Press, 1989: 37 - 90.

[4] Arrow K J. Optimal capital policy with irreversible investment[M]// Sir John Hicks, J. N. Wolfe Value, Capital and Growth. Edinburgh: Edinburgh University Press, 1968: 1 - 19.

[5] Pindyck R S. Irreversibility, uncertainty, and investment[J]. Journal of Economic Literature, 1992, 29(3): 1110 - 1148.

[6] Dixit A, Pindyck R. Investment under Uncertainty[M]. Princeton: Princeton University Press, 1994.

[7] Bellalah M. On irreversibility, sunk costs and investment under incomplete information[J]. R&D Management, 2001, 31(2): 11 - 29.

[8] 周嘉南, 黄登仕. 蕴含扩张期权的投资项目决策行为研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(2): 28 - 35
Zhou Jianan, Huang Dengshi. Investment decision behavior on project with expand option[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 9(2): 28 - 35. (in Chinese)

[9] 薛明皋, 龚 朴. 具有专利的R&D项目实物期权评[J]. 管理科学学报, 2006, 9(3): 39 - 44.
Xue Minggao, Gong Pu. Real option valuation of R&D project with patent[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(3): 39 - 44. (in Chinese)

[10] 安瑛晖, 张 维. 期权博弈理论的方法模型分析与发展[J]. 管理科学学报, 2001, 4(1): 38 - 44.
An Yinghui, Zhang Wei. Analysis and development of the method and model of option-game theory[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 9(3): 39 - 44. (in Chinese)

[11] 黄学军, 吴冲锋. 不确定环境下研发投资决策的期权博弈模型[J]. 中国管理科学, 2006, 14(5): 33 - 37.
Huang Xuejun, Wu Chongfeng. Option game model on R&D investment decision under uncertainty[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(5): 33 - 37.

[12] 杜先进, 孙树栋, 司书宾, 蔡志强. 不确定条件下多目标R&D项目组合选择优化[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 98 - 104
Du Xianjin, Sun Shudong, Si Shubin, Cai Zhiqiang. Multi-objective R&D portfolio selection optimization under uncertainty[J]. System Engineering—Theory & Practice, 2008, 28(2): 98 - 104. (in Chinese)

[13] Keynes J M. The General Theory of Employment, Interest, and Money[M]. Cambridge: Macmillan Cambridge University Press, 1936.

[14] Malkiel B. A Random walk down Wall Street[M]. New York: W. W. Norton &Co. 1990.

[15] Richardson S A, Sloan R G. External Financing and Future Stock Returns[R]. University of Pensylvania Working Paper, 2003. http://finance.wharton.upenn.edu/～rlwctr/papers/0303.pdf

[16] Barro R J. The stock market and investment[J]. Review of Financial Studies, 1990, 3: 115 - 132.

[17] Morck R, Shleifer A, Vishny R W. The Stock Market and Investment: Is The Market a Sideshow? [R]. Brooking Papers on Economic Activity 2, Washington: Brooking Institute Press, 1990: 157 - 215.

[18] Blanchard R C, Summers L. The stock market, profit, and investment[J]. Quarterly Journal of Economics, 1990, 108: 115 - 136.

[19] Chirinko R S, Schaller H. Business fixed investment and bubbles: The Japanese case[J]. American Economics Review, 2001, 91: 663 - 680.

[20] Chirinko R S, Schaller H. Gamour vs value: The Real Story[R]. SSRN Working Paper. 2005. http: //papers. ssrn. com/sol3/papers. cfm? abstract_id = 683045

[21] Panageas S. Speculation, Overpricing and Investment: Theory and Empirical Evidence[R]. SSRN Working Paper. 2005. http: //papers. ssrn. com/sol3/papers. cfm? abstract_id = 601367

[22] Polk C, Sapienza P. The Real Effect of Investor Sentiment[R]. NBER Working Paper No. 10563. 2004. http: //www. nber. org/papers/10563

[23] Baker M, Stein J, Wurgler J. When does the market matter? Stock prices and the investment of equity-dependent firms [J]. Quarterly Journal of Economics, 2003, 118: 969 - 1006.

Financial bubbles and firm investment

ZHANG Li-bing[1], *WU Chong-feng*[2], *YING Yi-rong*[3]

1. School of Finance, Shanghai Lixin University of Commerce, Shanghai 201620, China;
2. Financial research center of Antai School of Economics and Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China;
3. School of International Business Administration, Shanghai University, Shanghai 201800, China

Abstract: This paper investigates the micro-mechanism of financial bubble effect on firm investment decision under uncertainty condition. By integrating a bubble factor into investment value, the paper constructs a firm investment model, thus analyzes the bubble effect on investment probability. Also, the effects of bubble duration, decision horizon and funding method on firm investment are investigated. Our study shows that positive bubbles can promote, while negative bubbles restrain firm investment. Positive bubble duration has negative relations with investment probability, while negative bubble duration, antithetical. While the bubble is positive, the shorter horizon the investment decision-maker has, the less the probability of investment, and the firm tends to stock funding; while the bubble is negative, antithetical.

Key words: firm investment; bubble; Markov chains; American option

附录:

命题 1证明:

根据 Ito公式可得

$$dO = [(\mu - \eta) SO_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{SS}]dt + \sigma S dw + [O(S(1+\frac{z}{y})) - O]dJ \tag{A1}$$

采用标准的期权分析方法可得

$$rO dt = \left((r-\eta) SO_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{SS}\right) dt + E\{[O(S(1+\frac{z}{y})) - O]dJ\} \tag{A2}$$

这样,当金融市场处于高估时,式 (A2) 变为

$$rO = (r-\eta) SO_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{SS} + \lambda_H \left(O(S\frac{y_O}{y_H}) q_{HO} + O(S\frac{y_L}{y_H}) q_{HL} - O\right) \tag{A3}$$

求解方程 (A3) 可得

$$O_H = A_H S_H^{\alpha_H} = A_H (sy_H)^{\alpha_H} \tag{A4}$$

其中,α_H 为方程 $\frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r + \lambda_H\left(q_{HO}(\frac{y_O}{y_H})^x + q_{HL}(\frac{y_L}{y_H})^x - 1\right) = 0$**的解;$A_H > 0$为待定常数.**

(下转第 94页)

Arrival rate of traders and influencing factors

XU Min, LIU Shan-cun

School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: The paper regards the arrival rate as the variable which relates to the market state. The paper investigates the informed and uninformed traders' arrival rate and the influencing factors in the market. It firstly measures the arrival rate of informed and uninformed traders, selecting the data on the Shanghai Security Exchange (SSE) from July 1, 2003 to December 31, 2003, and employing EKOP model (Easley, Kiefer, O'Hara and Paperman, 1996). Then, it investigates how the market characters affect the traders' arrival rate. The empirical results show that: 1) The arrival rate of uninformed traders is mainly affected by market return. 2) Bid (ask) volume and supply (demand) elasticity influences the informed traders' arrival rate. Different from uninformed traders, the informed traders observe more micro-common information.

Key words: informative trading; arrival rate; elasticity; informed trader; uninformed trader

(上接第 69页)

相似地,当金融市场分别处于低估和正常定价时,式(A3)变为

$$rO = (r - \eta)SO_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{SS} + \lambda_O\left(O\left(S\frac{y_H}{y_O}\right)q_{OH} + O\left(S\frac{y_L}{y_O}\right)q_{OL} - O\right) \qquad (A7)$$

$$rO = (r - \eta)SO_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 O_{SS} + \lambda_L\left(O\left(S\frac{y_H}{y_L}\right)q_{LH} + O\left(S\frac{y_O}{y_L}\right)q_{LO} - O\right) \qquad (A8)$$

式(A7)和(A8)的解分别为

$$O_O = A_O S_O^{\alpha_O} = A_O(sy_O)^{\alpha_O} \qquad (A9)$$

$$O_L = A_L S_L^{\alpha_L} = A_L(sy_L)^{\alpha_L} \qquad (A10)$$

其中 α_O 和 α_L 分别为 $\frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r + \lambda_O\left(q_{OH}\left(\frac{y_H}{y_O}\right)^x + q_{OL}\left(\frac{y_L}{y_O}\right)^x - 1\right) = 0$ 和 $\frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r + \lambda_L\left(q_{LH}\left(\frac{y_H}{y_L}\right)^x + q_{LO}\left(\frac{y_O}{y_L}\right)^x - 1\right) = 0$ 的解.

因为当 $S\to\infty$ 时, $O_i\to\infty$,故 $\alpha_i > 0$. 证毕.

命题 2说明:

因为 α 为 $F(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r = 0$ 的正根,很显然, $\alpha > 1$.

α_H 为方程(13)的正根. 在方程(13)中,因为 $\frac{y_O}{y_H} < 1$, $\frac{y_L}{y_H} < 1$,故可知当 $x \geq 1$ 时, $\frac{\mathrm{d}F_H(x)}{\mathrm{d}x} < \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$,因此可得 $\alpha_H > \alpha$;

α_L 为方程(15)的正根. 在方程(15)中,因为 $\frac{y_H}{y_L} > 1$, $\frac{y_O}{y_L} > 1$,故可知当 $x \geq 1$ 时, $\frac{\mathrm{d}F_L(x)}{\mathrm{d}x} > \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$,故 $\alpha_L < \alpha$;

对命题 2的第二部分,因为:

$$F_H(x,\lambda_H) = \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1) + (r-\eta)x - r + \lambda_H\left(q_{HO}\left(\frac{y_O}{y_H}\right)^x + q_{HL}\left(\frac{y_L}{y_H}\right)^x - 1\right)$$

对不同的 λ_H 对应着不同的 $F_H(x,\lambda_H)$ 曲线. 给定不同的参数 λ_{Hi} 和 λ_{Hj},即 $\lambda_{Hi} \neq \lambda_{Hj}$,假设

$$F_H(x,\lambda_{Hi}) = F_H(x,\lambda_{Hj})$$

则必有 $\lambda_{Hi} = \lambda_{Hj}$,这与 $\lambda_{Hi} \neq \lambda_{Hj}$ 的假设矛盾. 这说明不同的 λ_H 对应着不同的 $F_H(x,\lambda_H)$ 曲线不相交.

容易看出,若 $\lambda_{Hi} > \lambda_{Hj}$,必有 $F_H(x,\lambda_{Hi}) < F_H(x,\lambda_{Hj})$,这样,较大的 λ_H 使得方程 $F_H(x,\lambda_H) = 0$ 具有较大的正根,由此性质很容易获得 $\frac{\partial\alpha_H}{\partial\lambda_H} > 0$.

类似地也可以获得 $\frac{\partial\alpha_L}{\partial\lambda_L} > 0$ 的结论. 证毕.