基于 Choquet延拓 n人模糊对策的 Shapley值①

谭春桥, 陈晓红
(中南大学商学院, 长沙 410083)

摘要: 由于 n人对策任意联盟可由它的特征向量来等价地表示, 利用 Choquet积分, 将 n人对策从集合 $\{0, 1\}^n$ 延拓到 $[0, 1]^n$ 上, 通过建立公理化体系, 对具有 Choquet延拓形式 n人模糊对策的 Shapley值进行深入研究, 证明了这类 n人模糊对策 Shapley值存在性与惟一性, 并给出了此模糊对策 Shapley值的解释表达式. 最后将此模糊对策的 Shapley值作为收益分配方案应用到供应链协作企业收益分配的实例中.

关键词: n人对策; 模糊联盟; Choquet积分; Shapley值
中图分类号: N945 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2010)02-0024-09

0 引 言

自从著名对策论专家 Shapley对 n人对策进行开创性研究以来, 合作对策已成为对策论中重要的研究领域. 由于现实问题的需要, 不确定环境下 n人对策理论研究已成为当前对策论研究领域的热点问题, n人模糊对策理论研究是其中重要的研究内容之一, 它的研究重点在两个方面: 一是对具有模糊联盟的 n人对策的研究, 二是对具有模糊支付值的 n人对策的研究. 最初开展 n人模糊对策的理论研究可追溯到 20世纪 70年代初, 著名对策论专家 Aumann和 Shapley[1]在研究缺原子对策问题时, 隐含地使用了模糊联盟和 n人模糊对策的概念, 在那里它们被称为“理想集”和“理想集函数”. Owen[2]在论文“对策的线性延拓”中将所有联盟构成的集合 $\{0, 1\}^n$ 推广到 $[0, 1]^n$上, 也隐含地使用了模糊联盟的概念. Aubin[3]提出了模糊联盟和模糊对策的概念, 随后对模糊对策理论展开了深入研究[4, 5]. Butnariu[6]提出了与 Aubin大致相同的模糊对策及解的概念, 并且研究了具有模糊联盟的 n人对策的 Shapley值[7], Butnariu和 Klement[8]进一步深入研究了一类具有特殊模糊联盟结构的 n人对策. Sakawa和 Nishizaki[9]将经典合作对策的字典解概念推广到具有模糊联盟的 n人对策之中, 从数学规划角度研究了这类 n人模糊对策的 Shapley值及其他形式的解[10, 11]. 由于 Butnariu定义的具有模糊联盟的 n人对策的 Shapley值与经典的 Shapley值相比, 既不单调非减又不连续, 不能很好适应现实应用的需要, 为了克服此不足, Tsurumi[12]在 Butnariu的基础上构造了一个基于 Choquet积分的 n人模糊对策, 并对此模糊对策的 Shapley值进行了研究. 但是 Tsurumi研究的这类模糊对策的 Shapley值只针对于满足超可加的模糊对策而言, 且他只证明了此模糊对策 Shapley值的存在性, 具有一定的局限性. Branzei和 Tijs[13, 14]等学者用凸分析方法详细研究了具有模糊联盟 n人对策的各种解及相互关系等理论问题. Mares[15]给出了新的模糊联盟结构, 并且对具有模糊联盟值的 n人对策的 Shapley值等解的结构展开了研究[16], 然而他定义的模糊 Shapley值很难满足类似于 Shapley[17]提出的 3条公理, 最终仅是求得 Shapley值的模糊

① 收稿日期: 2007-06-20; 修订日期: 2008-01-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70801064, 70631004); 教育部博士点基金新教师资助项目(200805331059); 湖南省哲学社会科学基金资助项目(08YBA021).
作者简介: 谭春桥(1975—), 男, 湖南祁阳人, 博士, 讲师. Email: chunqiao@sina.com

隶属函数,而没有给出具体的联盟收益分配方案.为克服 Mares定义的模糊 Shapley值存在的不足,我国学者张强教授[20]利用模糊数学分解与表现定理及区间套理论,对 Shapley提出的 3条公理进行拓广,从公理化的角度,研究了具有模糊联盟值的 n 人对策的模糊 Shapley.

Shapley值作为经典 n 人对策解的概念,由于其始终存在且惟一,而且在一定的条件下必处于核心之中,这些好的性质使其成为 n 人对策的重要解. 对于 n 人模糊对策理论研究,模糊的 Shapley值也是人们研究的主要对象. 由于经典 n 人对策任意的联盟可由它的特征向量来等价的表示,本文首先根据实值函数 Choquet积分的定义[18,19],将 n 人对策从集合 $\{0,1\}^n$ 延拓到 $[0,1]^n$ 上,给出了基于 Choquet延拓 n 人模糊对策的定义,关于这种模糊延拓的性质及与经典 n 人对策 Shapley值之间的相互关系,本文作者已在另文中作了详细的讨论和研究. 然后,针对文献[12]的局限,对具有 Choque延拓形式的模糊联盟的 n 人对策,通过建立公理化体系,从另一个角度研究这类模糊对策 Shapley值的存在性与惟一性,并给出其具体的解释表达式. 值得注意的是,本文提出的具有 Choquet延拓形式的 n 人模糊对策具有广泛的适应性,不仅仅局限于只满足超可加性的 n 人模糊对策,而且文中提出的 3条公理及证明过程,不同于文献[12].

1 基本概念

设 N 是一个局中人集合, N 的幂集 P 表示可行联盟集合,如果没作明确说明, N 的任意子集 A, $A\in P$,可认为是一个联盟或集合.

定义 1 对策 v 是定义在 P 上的一实值集函数 $v: P\to R$,且满足 $v(\varnothing)=0$

1) 如果 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,则称 v 是一个 n 人对策;

2) 如果对所有的 $A\in P$,有
$$v(A)\geqslant 0$$
则称 v 是正的;

3) 如果对任意的 $A,B\in P$, $A\supset B$,有
$$v(A)\geqslant v(B)$$
则称 v 是单调的;

4) 如果对任意的 $A,B\in P$, $A\cap B=\varnothing$ 有
$$v(A\cup B)\geqslant v(A)+v(B)$$
则称 v 是超可加的;

5) 如果对任意的 $A,B\in P$,有
$$v(A\cup B)+v(A\cap B)\geqslant v(A)+v(B)$$
则称 v 是凸的(或超模的).

对于任意集合 A 而言,都可用它的特征函数 e_A 来等价地表示. 那么,对于 n 人对策,任意的联盟 $S\in P$,都可用其特征向量 $\boldsymbol{e}_S=[e_S(1),e_S(2),\cdots,e_S(n)]$ 来表示,其中第 i 个分量 $e_S(i)$ 为 1,当且仅当 $i\in S$,否则为 0,于是有 $\boldsymbol{e}_S\in\{0,1\}^n$. 从几何意义上讲,所有可行联盟集合就是 n 维单位方体 $Q^n=[0,1]^n$ 的所有顶点形成的集合. 于是,在 n 人对策中,借助于联盟的特征函数,可行联盟集合 P 可由集合 $\{0,1\}^n$ 来等价地表示: $S\in P\to\boldsymbol{e}_S\in\{0,1\}^n$,即 $\{0,1\}^n$ 与可行联盟集合 P 之间存在一一对应关系. 于是,对于定义 1中 n 人对策的集函数定义可等价地定义为 $v:\{0,1\}^n\to R$, $v(\boldsymbol{O})=0$,其中 $\boldsymbol{O}=(0,0,\cdots,0)$ 表示为一个 n 维的零向量. 根据 Zadeh定义模糊集的思想,可将联盟从集合 $\{0,1\}^n$ 推广到集合 $[0,1]^n$ 上.

定义 2 对于 n 人对策,如果 $S\in[0,1]^n$, $S: i\in N\to S(i)\in[0,1]$,则称 S 为 N 的模糊联盟(即 S 是 N 的模糊子集), $S(i)$ 表示局中人 i 对于模糊联盟 S 的隶属度,它描述了局中人 i 在模糊联盟 S 中的参与程度或参与率. 若 $S(i)=1$,说明局中人 i 完全参与到模糊联盟 S 中;若 $S(i)=0$,说明局中人 i 没有参与模糊联盟 S 中;若 $S(i)\in(0,1)$,说明局中人 i 部分参与(以模糊的方式参与)模糊联盟 S 中. 在模糊联盟中,空联盟用零向量来表示,即 $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{e}_\varnothing=(0,0,\cdots,0)$. 局中人 N 的全体模糊子集构成的集合记为 $\mathscr{F}(N)$,那么, $\mathscr{F}(N)$ 与集合 $[0,1]^n$ 是等价的.

对于任意的模糊联盟 S,其水平集表示为
$$[S]_r=\{i\in N\mid S(i)\geqslant r\},\ r\in[0,1]$$
其支撑集表示为
$$\mathrm{Supp}\,S=\{i\in N\mid S(i)>0\}$$

定义 3 设局中人集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, $[0,1]^n=[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]$,对于定义在 $[0,1]^n$ 上的有界实函数 $v:[0,1]^n\to R$,若满足 $v(\boldsymbol{O})=0$ (其中 $\boldsymbol{O}=(0,0,\cdots,0)$),则

称 v 是具有模糊联盟的 n 人对策, 在此简称为 n 人模糊对策.

定义 4 对于非空集 N 上的所有有界非负可测函数 $f: N \to R^{+}$, 函数 f 关于 v 的 Choquet 积分定义为

$$(C)\int f \mathrm{d}v = \int_0^{\infty} v(F_\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,$$

其中 $F_\alpha = \{x \mid f(x) \geqslant \alpha\}\ (\alpha \in [0, \infty))$ 为函数 f 的 α 截集[19].

若非空集合 $N = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 则函数 f 可以表示成离散形式 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$, 将 $\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$ 按照单调非减的次序排列为

$$f(x_0^*) \leqslant f(x_1^*) \leqslant f(x_2^*) \leqslant \cdots \leqslant f(x_n^*)$$

其中 $\{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ 为非空集合 N 中的元素 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 依据上述单调非减序列地重排, 则 Choquet 积分可表示为

$$(C)\int f \mathrm{d}v = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] \times v(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \cdots, x_n^*\})$$

其中 $f(x_0^*) = 0$

2 基于 Choquet 积分 n 人对策的模糊延拓

由于 n 人对策 v 可表示为 $v: \{0, 1\}^n \to R$, $v(\emptyset) = 0$ 下面将借助 Choquet 积分将 n 人对策从集合 $\{0, 1\}^n$ 拓展到集合 $[0, 1]^n$ 上.

定义 5 对于 n 人对策 v, 任意的模糊联盟 $A \in \mathscr{F}(N) = [0, 1]^n$, 其隶属函数: $f_A(i): N \to [0, 1]$, 那么 n 人对策 v 的模糊延拓: $\bar{v}: [0, 1]^n \to R$ 可定义为

$$\bar{v}(A) = \int f_A \mathrm{d}v$$

显然, 对所有的经典联盟 $S \subseteq N$

$$\bar{v}(S) = \int e^S \mathrm{d}v = v(S)$$

即函数 $\bar{v}$ 是 v 从 $\{0, 1\}^n$ 到 $[0, 1]^n$ 的延拓, 称 $\bar{v}$ 为 v 的 Choquet 延拓. 在不引起混淆的情况下, 下面将 A 简记为 A, 即 $A \in \mathscr{F}(N) = [0, 1]^n$.

于是, 在离散状态下 n 人对策 v 的 Choquet 延拓具有如下形式:

对于给定的 $S \in \mathscr{F}(N)$, 设 $Q(S) = \{S(i) \mid S(i) > 0, i \in N\}$, $q(S)$ 是集合 $Q(S)$ 的基数, 将集合 $Q(S)$ 中的元素按递增的序列排列, 即 $h_1 < h_2 < \cdots < h_{q(S)}$, 那么, 对任意的 $S \in \mathscr{F}(N)$, n 人对策 v 的 Choquet 延拓可表示为

$$\bar{v}(S) = \sum_{k=1}^{q(S)} (h_k - h_{k-1}) v([S]_{h_k}) \tag{1}$$

其中 $h_0 = 0$ 将所有具有此 Choquet 延拓形式的 n 人模糊对策的全体形成的集合记为 $C(N)$.

命题 1 对任意的 $A \in \mathscr{F}(N)$, v 的 Choquet 延拓 $\bar{v}$ 具有下列性质.

1) 对所有的 $\lambda \geqslant 0$, 有 $\bar{v}(\lambda A) = \lambda \bar{v}(A)$, 即 $\bar{v}$ 是正齐次的;

2) 如果 v 是单调的, 那么对任意 $A, B \in \mathscr{F}(N)$, $A \leqslant B$, 有 $\bar{v}(A) \leqslant \bar{v}(B)$, 即 $\bar{v}$ 关于局中人的参与程度是单调的;

3) $\overline{(v_1 + v_2)} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$;

4) $(\overline{\lambda v}) = \lambda \bar{v}$, $\lambda \in R$.

证明 由 v 的 Chouqet 延拓定义及 Chouqet 积分的性质直接可证.

3 基于 Choquet 延拓的 n 人模糊对策的 Shapley 值

在不引起混淆的情况下, 下面将 $\bar{v}$ 简记为 v. 设 π 是 N 的任一置换, 对于任意的 $v \in C(N)$, $A \in \mathscr{F}(N)$, 记 $\pi A = A \circ \pi^{-1}$, $\pi v(A) = v(\pi^{-1} A)$, 显然, $\pi v \in C(N)$.

定义 6 设 $v \in C(N)$, $A \in \mathscr{F}(N)$, 如果 $S \in \mathscr{F}(A)$ 满足

$$v(S \cap T) = v(T), \quad \forall T \in \mathscr{F}(A),$$

则称 S 是 A 的 v - 承载.

命题 2 设 $v \in C(N)$, $S, T \in \mathscr{F}(N)$ 且 $S \subseteq T$, 那么 $v(S) = v(T)$ 当且仅当对任意的 $r \in [0, 1]$, $v([S]_r) = v([T]_r)$[12].

推论 1 设 $v \in C(N)$, $A \in \mathscr{F}(N)$, 如果 S 是 A 的 v - 承载, 那么对任意的 $r \in [0, 1]$, 有 $[S]_r \subseteq [A]_r$, 且对任意的模糊联盟 $B \in \mathscr{F}(N)$, $[B]_r \subseteq [A]_r$, 有[12]

$$v([S]_r \cap [B]_r) = v([B]_r).$$

定义 7 设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, 对于任意的 $v\in C(N)$, $A\in\mathscr{F}(N)$, 基于 Chouqet延拓形式 n人模糊对策的 Shapley值是满足下述公设体系的线性函数 $\Phi: C(N)\to(R^N)^{\mathscr{F}(N)}$, 其中 $\Phi=(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$,

A1 对于任意的 $B\in\mathscr{F}(N)$, 如果 B 是 A 的 v - 承载, 有

$$\sum_{i\in\mathrm{Supp}(B)}\Phi_i(v)(A)=v(B)\tag{2}$$

A2 如果 $j\notin\mathrm{Supp}(A)$, 即 $A(j)=0$, 那么 $\Phi_j(v)(A)=0$;

A3 设 π 是 N 的任一置换, 对于 $i\in N$, 有

$$\Phi_{\pi i}(\pi v)(\pi A)=\Phi_i(v)(A)\tag{3}$$

定理 1 存在一个惟一的 Shapley值映射 $\Phi: C(N)\to(R^N)^{\mathscr{F}(N)}$, 满足上面 3条公理, 并且有如下的表达式

$$\Phi_i(v)(A)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})\times\\ \quad\sum\limits_{S\in P_i([A]_{h_k})}\dfrac{(|S|-1)!(|[A]_{h_k}|-|S|)!}{|[A]_h|}\times\\ \quad[v(S)-v(S\backslash i)],\ i\in\mathrm{SUPP}(A)\\ 0,\ 其它\end{cases}\tag{4}$$

其中 $P_i([A_{h_k}])=\{S\subseteq N\mid i\in S, S\in[A]_{h_k}\}$, $|\cdot|$ 表示集合的基数.

定理 1的证明分以下几个步骤进行.

命题 3 对于任意的联盟 S, $S\subseteq N$, $S\neq\varnothing$, S 上的简单对策 $\mu_S: P(N)\to\{0,1\}$ 定义为[17]

$$\mu_S(A)=\begin{cases}1, A\supseteq S\\ 0, 其他\end{cases}\tag{5}$$

那么, $\{\mu_T\}_{T\in\Sigma\backslash\varnothing}$ 是所有经典 n人对策 v形成的集合上的一个线性基, 每一个对策 v 可用简单对策 μ_S的线性组合来表示

$$v=\sum_{S\in P, S\neq\varnothing}c_S(v)\mu_S\tag{6}$$

其中, c_S 与 N 无关, 且可表示为

$$\begin{aligned}c_S(v)&=\sum_{B\in P, B\subseteq S}(-1)^{|S|-|B|}v(B)\\&=\sum_{B\in P, B\subseteq S}(-1)^{s-b}v(B)\end{aligned}\tag{7}$$

其中 s, b 分别表示集合 S, B 的基数.

引理 1 如果 $v\in C(N)$, 那么

$$v=\sum_{S\in P, S\neq\varnothing}c_S(v)\mu_S^C\tag{8}$$

其中

$$\mu_S^C(A)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1}), S\subseteq[A]_{h_k},\\ \quad h_k\in(0,1]\\ 0, 其他\end{cases}\tag{9}$$

证明 设 $v\in C(N)$, $A\in\mathscr{F}(N)$, 根据式 (1) 和式 (6) 可知

$$\begin{aligned}v(A)&=\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})v([A]_{h_k})\\&=\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})\sum_{S\in P, S\neq\varnothing}C_S(v)\mu_S([A]_{h_k})\\&=\sum_{S\in P, S\neq\varnothing}C_S(v)\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})\mu_S([A]_{h_k})\\&=\sum_{S\in P, S\neq\varnothing}C_S(v)\mu_S^C(A)\end{aligned}$$

其中

$$\mu_S^C(A)=\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})\mu_S([A]_{h_k})$$

根据式 (5) 可得

$$\mu_S^C(A)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1}), S\subseteq[A]_{h_k},\\ \quad h_k\in(0,1]\\ 0, 其他\end{cases}$$

如果记 $C_0(N)=\{\mu_S^C\mid S\in P, S\neq\varnothing\}$, 由引理 1可知, $C_0(N)$ 是 $C(N)$ 的一个基.

引理 2 定义函数 $\Phi: C_0(N)\to(R^N)^{\mathscr{F}(N)}$

$$\Phi_i(\mu_S^C)(A)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})}{|S|},\\ \quad i\in S\subseteq[A]_{h_k}, h_k\in(0,1]\\ 0, 其他\end{cases}\tag{10}$$

那么, 函数 Φ满足定义 1中的 A1—A3三条公设.

证明 设模糊联盟 $A\in\mathscr{F}(N)$, S是个非空联盟, 首先来证明函数 Φ满足公设 A1. 设 B 是 A的 μ_S^C - 承载, 那么存在惟一的 $h\in(0,1)$, 使得 $S\subseteq[B]_h\subseteq[A]_h$. 由式 (10) 可知, 如果 $i\notin S$, 那么

$$\Phi_i(\mu_S^C)(A)=0$$

如果 $i\in S$, 有

$$\sum_{i\in\mathrm{Supp}(B)}\Phi_i(\mu_S^C)(A)=\sum_{i\in S}\Phi_i(\mu_S^C)(A)$$

$$= \sum_{k\in S} \frac{\sum_{k=1}^{q(B)} (h_k - h_{k-1})}{|S|}$$

$$= \sum_{k=1}^{q(B)} (h_k - h_{k-1})$$

$$= \mu_S^C(B)$$

接下来证明函数 Φ 满足公设 A3. 设 π 是 N 的任一置换, 于是

$$\pi\mu_S^C(A) = \mu_S^C(\pi^{-1}A)$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^{q(\pi^{-1}A)} (h_k - h_{k-1}), & S \subseteq \pi^{-1}[A]_{h_k} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 $S \subseteq \pi^{-1}[A]_{h_k}$ 当且仅当 $\pi S \subseteq [A]_{h_k}$, 所以

$$\pi\mu_S^C(A) = \mu_{\pi S}^C(A) \tag{11}$$

如果 $i \in N$, 那么

$$\Phi_{\pi i}(\pi\mu_S^C)(\pi A) = \Phi_{\pi i}(\mu_{\pi S}^C)(\pi A)$$

由式(10)可得

$$\Phi_{\pi i}(\mu_{\pi S}^C)(\pi A) =$$

$$\begin{cases} \frac{\sum_{k=1}^{q(\pi A)} (h_k - h_{k-1})}{|\pi S|} = \frac{\sum_{k=1}^{q(A)} (h_k - h_{k-1})}{|\pi S|}, \\ \qquad \pi i \in \pi S \subseteq \pi[A]_{h_k} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

因为 $|\pi^{-1}S| = |\pi S| = |S|$, 且条件 $\pi i \in \pi S$ 和 $\pi S \subseteq \pi[A]_{h_k}$ 分别等价于 $i \in S$ 和 $S \subseteq [A]_{h_k}$, 则有

$$\Phi_{\pi i}(\pi\mu_S^C)(\pi A) = \Phi_i(\mu_S^C)(A)$$

对于一些 $j \in N$, $j \notin \mathrm{Supp}(A)$, 即 $A(j) = 0$, 根据式(10)有 $\Phi_j(\mu_S^C)(A) = 0$, 即函数 Φ 满足公设 A2.

引理 3　对于 $C_0(N)$ 中任意的对策, 由式(10)定义的满足定义 7中 3条公设的函数 $\Phi: C_0(N) \to (R^N)^{\mathscr{F}(N)}$ 具有惟一性.

证明　对于 $C_0(N)$ 中任意的对策, 假设函数 $\Phi': C_0(N) \to (R^N)^{\mathscr{F}(N)}$ 满足定义 7中 3条公设. 设模糊联盟 $A \in \mathscr{F}(N)$, S 是个非空联盟, 分以下两种情况讨论:

1) 如果 $S \subseteq [A]_{h_k}$, 定义如下的模糊联盟 B

$$B(i) = \begin{cases} A(i), & i \in S \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

那么 B 是 A 的一个 μ_S^C – 承载, 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{i\in S} \Phi'_i(\mu_S^C)(A) &= \sum_{i\in \mathrm{Supp}(B)} \Phi'_i(\mu_S^C)(A) \\ &= (\mu_S^C)(B) \\ &= \sum_{k=1}^{q(B)} (h_k - h_{k-1}) \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

固定 $i, j \in S$, $i \neq j$. 设 π 是 N 的一个置换, 使得

$$\pi k = \begin{cases} j, & k \in i \\ i, & k \in j \\ k, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $\pi S = S$, $\pi A = A$, 因此由公设 A3及式(11)可得

$$\begin{aligned} \Phi'_i(\mu_S^C)(A) &= \Phi'_j(\pi\mu_S^C)(\pi A) \\ &= \Phi'_j(\mu_{\pi S}^C)(\pi A) \\ &= \Phi'_j(\mu_S^C)(A) \end{aligned}$$

根据式(12), 对任意的 $i \in S$, 有

$$\begin{aligned} \Phi'_i(\mu_S^C)(A) &= \frac{\sum_{k=1}^{q(A)} (h_k - h_{k-1})}{|S|} \\ &= \Phi_i(\mu_S^C)(A) \end{aligned} \tag{13}$$

如果 $k \notin S$, 设 $T = S \cup \{k\}$, 定义如下的模糊联盟 B'

$$B'(i) = \begin{cases} A(i), & i \in T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

那么 B' 是 A 的一个 μ_S^C – 承载. 由公设 A3及式(12)可得

$$\sum_{i\in S} \Phi'_i(\mu_S^C)(A) = (\mu_S^C)(B')$$

于是

$$\begin{aligned} (\mu_S^C)(B') &= \sum_{i\in \mathrm{Supp}(B')} \Phi'_i(\mu_S^C)(A) \\ &= \sum_{i\in T} \Phi'_i(\mu_S^C)(A) \end{aligned}$$

因此

$$\Phi'_k(\mu_S^C)(A) = 0$$

所以, 根据式(13)有

$$\Phi'(\mu_S^C)(A) = \Phi(\mu_S^C)(A)$$

2) 如果 $S \not\subset [A]_{h_k}$, 容易验证对任意的 $B \in \mathscr{F}(N)$, $[B]_{h_k} \subseteq [A]_{h_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的一个 μ_S^C – 承载. 设 $j \in N$, 如果 $A(j) = 0$, 由公设 A2可知

$$\Phi'_j(\mu_S^C)(A) = 0$$

如果 $A(j) \neq 0$, 定义如下的模糊联盟 C

$$C(i)=\begin{cases}A(j),\ i=j\\0,\ 其他\end{cases}$$

显然, $[C]_{h_k}\subseteq[A]_{h_k}$. 如果 B 是个模糊联盟, 且 $[B]_{h_k}\subseteq[A]_{h_k}$, 那么, 不存在 $h_k\in(0,1]$, 使得 $S\subseteq[B]_{h_k}$(如果存在 $h_k\in(0,1]$, 使得 $S\subseteq[B]_{h_k}$, 那么, $S\subseteq[A]_{h_k}$). 因此, 有

$$\mu_S([B]_{h_k}\cap[C]_{h_k})=0=\mu_s([B]_{h_k})$$

这说明模糊联盟 C 是 A 的一个 μ_S^C –承载, 于是, 由公设 A1和式(10)可得

$$\begin{aligned}\Phi_j'(\mu_S^C)(A)&=\sum_{i\in \mathrm{Supp}(C)}\Phi_i'(\mu_S^C)(A)\\&=\mu_S^C(C)\\&=0\\&=\Phi_j(\mu_S^C)(A)\end{aligned}$$

综上所述, 对于 $C_0(N)$ 中任意的对策, 由式(10)定义的函数 Φ 具有惟一性.　　证毕.

根据引理 1, 通过下列式子可将由式(10)定义的函数 Φ 从 $C_0(N)$ 拓展到 $C(N)$

$$\Phi_i(v)(A)=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_S(v)\Phi_i(\mu_S^C)(A)\tag{14}$$

引理 4　对于任意的 $v\in C(N)$, $A\in\mathscr{F}(N)$, 由式(14)定义的函数 Φ 是具有 Chouqet延拓形式 n 人模糊对策的 Shapley值, 且具有惟一性.

证明　由引理 1和引理 3可得由式(14)定义的函数 Φ 具有惟一性.

因此, 只需证明由式(14)定义的函数 Φ 是 Shapley值, 即只需证此函数 Φ 满足定义 1中所给的公设体系.

由命题 1可知, 具有 Chouqet延拓形式 n 人模糊对策 $v\in C(N)$ 是线性的, 那么, 对于 N 的任意的非空集子集 S, 函数 $v\mapsto c_S(v)$ 是线性的, 所以由式(14)定义的函数 Φ 是线性函数.

设 $v\in C(N)$, $A\in\mathscr{F}(N)$, 首先来证明此函数 Φ 满足公设 A1.

设 $B\in\mathscr{F}(N)$ 是 A 的 v-承载, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in \mathrm{Supp}(B)}\Phi_i(v)(A)&=\sum_{i\in \mathrm{Supp}(B)}\cdot\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_S(v)\Phi_i(\mu_S^C)(A)\\&=\sum_{i\in \mathrm{Supp}(B)}\cdot\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})}c_s(v)\frac{\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})}{|S|}\\&=\sum_{i\in \mathrm{Supp}(B)}\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})}c_s(v)\frac{1}{|S|}\\&=\sum_{k=1}^{q(B)}(h_k-h_{k-1})\sum_{i\in B_{h_k}}\cdot\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})}c_S(v)\frac{1}{|S|}\end{aligned}$$

由于 $h_k\in(0,1]$, 设 u_k 是定义在集合 $[A]_{h_k}$ 上的对策: $u_k(T)=v(T)$, $\forall T\in P([A]_{h_k})$, 其中 $P([A]_{h_k})$ 表示 $[A]_{h_k}$ 的所有子联盟形成的集合. 设 $\varphi(u_k)\in R^{[A]_{h_k}}$ 是对策 u_k 的 Shapley值, 由文献[17]可知

$$\varphi_i(u_k)=\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})}c_S(u_k)\frac{1}{|S|}\tag{15}$$

如果模糊联盟 B 是 A 的 v-承载, 那么, $[B]_{h_k}$ 是 $[A]_{h_k}$ 的 u_k-承载, 由 Shapley值 $\varphi(u_k)$ 的有效性和哑元性可得

$$\sum_{i\in[B]_{h_k}}\varphi_i(u_k)=u_k(B]_{h_k}$$

结合式(15)可得

$$\sum_{i\in[B]_{h_k}}\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})}c_S(u_k)\frac{1}{|S|}=u_k([B]_{h_k})=v([B]_{h_k})$$

因此, 有

$$\begin{aligned}v(B)&=\sum_{k=1}^{q(B)}(h_k-h_{k-1})v([B]_{h_k})\\&=\sum_{k=1}^{q(B)}(h_k-h_{k-1})\sum_{i\in[B]_{h_k}}\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})}c_S(v)\frac{1}{|S|}\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i\in \mathrm{Supp}(B)}\Phi_i(v)(A)=v(B)$$

即满足公设 A1.

接下来证明函数 Φ 满足公设 A3. 对任意的 $A\in\mathscr{F}(N)$, 由引理 1可得

$$\pi v(A)=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_s(\pi v)\mu_S^C(A)$$

因为 $c_S(\pi v)=c_{\pi^{-1}S}(v)$, 于是, 对任意的 $A\in\mathscr{F}(N)$ 和 $i\in N$, 根据式(14)及引理 2有

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi i}(\pi v)(\pi A)&=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_S(\pi v)\Phi_{\pi_i}(\mu_S^C)(\pi A)\\&=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_{\pi^{-1}S}(v)\Phi_{\pi_i}(\pi(\pi^{-1}\mu_S^C))(\pi A)\\&=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_{\pi^{-1}S}(v)\Phi_i(\pi(\pi^{-1}\mu_S^C))(A)\\&=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_{\pi^{-1}S}(v)\Phi_i(\mu_{\pi^{-1}S}^C)(A)\\&=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing}c_S(v)\Phi_i(\mu_S^C)(A)\\&=\Phi_i(v)(A)\end{aligned}$$

即满足公设 A3.

最后证明函数 Φ 满足公设 A2. 对于一些 $j\in$

N, 如果 $A(j)=0$, 那么, 对于每一个非空联盟 S, 有 $\Phi_j((u_S^c)(A)=0$, 根据式(14)则有 $\Phi_j(v)(A)=0$, 即满足公设 A2.

引理 **5** 由式(14)定义的函数 Φ 就是式(4)所表示的函数.

证明 对于 $i\in N$, 分以下两种情况:

1) 如果 $i\notin \mathrm{Supp}(A)$, 即 $A(i)=0$, 那么对每一个非空联盟 S, 有 $\Phi_i(u_S^c)(A)=0$, 根据式(14)有 $\Phi_i(v)(A)=0$.

2) 如果 $i\in \mathrm{Supp}(A)$, 因为

$$\Phi_i(v)(A)=\sum_{S\in P,\ S\neq\varnothing} c_S(v)\,\Phi_i(u_S^c)(A)$$

$$=\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})} c_S(v)\,\frac{\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})}{|S|}$$

$$=\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})} c_S(v)\,\frac{1}{|S|}$$

根据文献[17]中 Shapley值的表达式可得

$$\sum_{S\in P_i([A]_{h_k})} c_S(v)\,\frac{1}{|S|}=$$

$$\sum_{S\in P([A]_{h_k})}\frac{(|S|-1)!\,(|[A]_{h_k}|-|S|)!}{|[A]_{h_k}|}\times [v(S)-v(S\setminus i)]$$

综上所述, 则有

$$\Phi_i(v)(A)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{q(A)}(h_k-h_{k-1})\times \sum_{S\in P([A]_{h_k})}\frac{(|S|-1)!\,(|[A]_{h_k}|-|S|)!}{|[A]_{h_k}|}\times [v(S)-v(S\setminus i)], & i\in SUPP(A)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

证毕.

根据引理 4及引理 5, 定理 1得证.

4 基于 Choquet延拓模糊对策 Shapley值在供应链协作企业收益分配中的应用

供应链协作是供应链各企业之间合作过程中理性选择的结果, 这是个典型的合作对策研究的实例. 供应链企业通过协作, 在达到各自利益目标的同时, 必须合理分摊整个供应链协作过程中所产生的总收益. 因此, 供应链协作过程中企业的收益分配可看成是多人合作对策的收益分配问题. 现假设有 A、B、C 3家企业(分别代表 1, 2, 3 三个局中人)欲通过相互协作来合作一个项目, 如单干则每企业获利 5万元(即 $v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=5$), 如 A、B联合则可获利 35万元(即 $v(\{1,2\})=35$), 如 A、C联合, 则可获利 25万元(即 $v(\{1,3\})=25$), B、C联合则可获利 20万元(即 $v(\{2,3\})=20$), 如 A、B、C联合则可获利 50万元(即 $v(\{1,2,3\})=50$). 假设企业 A、B、C合作的项目要求 100单位的资源投入(这种资源包括资金、技术、客户关系等), 由于精力、能力等诸多条件的限制, 企业 A只能投入 20单位资源, 企业 B只能投入 40单位资源, 企业 C只能投入 50单位资源, 这样企业 A、B、C参与该项目的程度分别为 20/100, 40/100, 50/100, 即企业 A、B、C分别以 0.2、0.4、0.5的参与率参与联盟.

根据公式(1), 可计算出企业 A、B、C组成模糊联盟($\{1,2,3\}$)的预期收益为

$$\bar{v}(\{1,2,3\})=(C)\int_N f\,\mathrm{d}V=\sum_{k=1}^{q(S)}(h_k-h_{k-1})v(S_{h_k})$$

$$=0.2v(\{1,2,3\})+(0.4-0.2)v(\{2,3\})+(0.5-0.4)\,v(\{3\})$$

$$=0.2\times 50+0.2\times 20+0.1\times 5$$

$$=14.5$$

同理可以计算出

$$\bar{v}(\{1\})=v(\{1\})\times(h_1-h_0)=5\times 0.2=1$$

$$\bar{v}(\{2\})=v(\{2\})\times(h_2-h_0)=5\times 0.4=2$$

$$\bar{v}(\{3\})=v(\{3\})\times(h_3-h_0)=5\times 0.5=2.5$$

$$\bar{v}(\{1,2\})=v(\{1,2\})(h_1-h_0)+v(\{2\})(h_2-h_1)=35\times 0.2+5\times 0.2=8$$

$$\bar{v}(\{1,3\})=v(\{1,3\})(h_1-h_0)+v(\{3\})(h_3-h_1)=25\times 0.2+5\times 0.3=6.5$$

$$\bar{v}(\{2,3\})=v(\{2,3\})(h_2-h_0)+v(\{3\})(h_3-h_2)=20\times 0.4+5\times 0.1=8.5$$

因此, 在企业 A、B、C不参与或部分参与合作项目的情况下, 如单干则 A企业获利 1万元, B企业获利 2万元, C企业获利 2.5万元, 如 A、B联合则获利 8万元, 如 A、C联合则获利 6.5万元, B、C联合

则获利 8 5万元. 如 A、B、C 联合则获利 14 5万元.

根据经典 Shapley值的计算公式, 可计算出清晰联盟下 Shapley值 $\varphi(v) = (20, 17.5, 12.5)$, 以及不同联盟组合下的企业收益分配策略, 如表 1所示.

表 1 不同清晰联盟组合下的企业收益分配策略

Table 1 The enterprise dividends distribution strategy of different crisp coalitions

$\varphi_i(v)(K)$	公司 A	公司 B	公司 C
$\varphi_i(v)(\{1\}) = 5$	5	0	0
$\varphi_i(v)(\{2\}) = 5$	0	5	0
$\varphi_i(v)(\{3\}) = 5$	0	0	5
$\varphi_i(v)(\{1, 2\}) = 35$	17.5	17.5	0
$\varphi_i(v)(\{1, 3\}) = 25$	12.5	0	12.5
$\varphi_i(v)(\{2, 3\}) = 20$	0	10	10
$\varphi_i(v)(\{1, 2, 3\}) = 50$	20	17.5	12.5

根据公式 (4) 及表 1, 可计算模糊联盟下的 Shapley值为

$$\begin{aligned}\Phi_1(\bar{v})(\{1,2,3\}) &= \varphi_1(v)(\{1,2,3\})(0.2-0) + \varphi_1(v)(\{2,3\})(0.4-0.2) + \varphi_1(v)(\{3\})(0.5-0.4)\\ &= 20\times0.2+0\times0.2+0\times0.1\\ &= 4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(\bar{v})(\{1,2,3\}) &= \varphi_2(v)(\{1,2,3\})(0.2-0) + \varphi_2(v)(\{2,3\})(0.4-0.2) + \varphi_2(v)(\{3\})(0.5-0.4)\\ &= 17.5\times0.2+10\times0.2+0\times0.1\\ &= 5.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(\bar{v})(\{1,2,3\}) &= \varphi_3(v)(\{1,2,3\})(0.2-0) + \varphi_3(v)(\{2,3\})(0.4-0.2) + \varphi_3(v)(\{3\})(0.5-0.4)\\ &= 12.5\times0.2+10\times0.2+5\times0.1\\ &= 5\end{aligned}$$

因此, 得到模糊联盟下的 Shapley值

$$\Phi(\bar{v})(\{1,2,3\}) = (4, 5.5, 5).$$

以及可求得不同模糊联盟组合下如表 2所示的企业收益分配策略.

表 2 不同模糊联盟组合下的企业收益分配策略

Table 2 The enterprise dividends distribution strategy of different fuzzy coalitions

$\Phi_i(\bar{v})(S)$	公司 A	公司 B	公司 C
$\Phi_i(\bar{v})(\{1\})$	1	0	0
$\Phi_i(\bar{v})(\{2\})$	0	2	0
$\Phi_i(\bar{v})(\{3\})$	0	0	2.5
$\Phi_i(\bar{v})(\{1, 2\})$	3.5	4.5	0
$\Phi_i(\bar{v})(\{1, 3\})$	2.5	0	4
$\Phi_i(\bar{v})(\{2, 3\})$	0	4	4.5
$\Phi_i(\bar{v})(\{1, 2, 3\})$	4	5.5	5

由表 2可知, 企业 A单干获利 1万元, 与企业 B联合分得 3.5万元收益, 与企业 C联合分得 2.5万元收益, 与企业 B、C联合分得 4万元收益. 企业 B单干获利 2万元, 与企业 A联合分得 4.5万元收益, 与企业 C联合分得 4万元收益, 与企业 A、C联合分得 5.5万元收益, 如此等等. 因此, 企业 A、B、C都将选择自己获利最大的合作方案 $S = \{1, 2, 3\}$, 并从合作中各自获得 4万元、5.5万元、5万元的收益.

5 结束语

由于 n人对策中任意的联盟可由它的特征向量来表示, 本文利用 Choquet积分, 将 n人对策从集合 $\{0, 1\}^n$ 推广到 $[0, 1]^n$ 上, 给出了具有离散形式 n人对策的 Choquet延拓表达式, 简单讨论了具有 Choquet延拓形式 n人模糊对策的性质. 通过建立公理化体系, 对基于 Choquet延拓 n人模糊对策的 Shapley值进行深入研究, 证明了这类 n人模糊对策 Shapley值存在性与惟一性, 并给出了此模糊对策 Shapley值的解释表达式. 最后将此模糊对策的 Shapley值作为收益分配方案应用到供应链协作企业收益分配的实例中, 详细说明了该方法具体的操作步骤, 检验了其有效性与正确性.

参 考 文 献:

[1] Aumann R J, Shapley L S. Values of Non-atomic Games, Part III: Values and Derivatives [R]. Santa Monica: Rand Corp, 1970.

[2] Owen G. Multilinear extensions of games [J]. Management Science, 1972, 18(1): 64—79.

[3] Aubin J P. Coeur et valuer des jeux flous a paiements lateraux[J]. Comptes Rendus de l'Acad Sci Paris, 1974, 279(6): 891—894.
[4] Aubin J P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory[M]. Amsterdam: North-Holland Press, 1980.
[5] Aubin J P. Cooperative fuzzy games[J]. Mathematical Operation Research, 1981, 6(1): 1—13.
[6] Butnariu D. Fuzzy games: A description of the concept[J]. Fuzzy Set and System, 1978, 1(2): 181—192.
[7] Butnariu D. Stability and shapley value for an n-person fuzzy games[J]. Fuzzy Set and System, 1980, 4(1): 63—72.
[8] Butnariu D, Klement E P. Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions[M]. Dordrecht: Kluwer Press, 1993.
[9] Sakawa M, Nishizaki I. A lexicographical concept in an n-person cooperative fuzzy game[J]. Fuzzy Set and Systems, 1994, 61(2): 265—275.
[10] Nishizaki I, Sakawa M. Fuzzy cooperative games arising from linear production programming problems with fuzzy parameters[J]. Fuzzy Set and Systems, 2000, 114(1): 11—21.
[11] Nishizaki I, Sakawa M. Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution[M]. Physica-Verlag: A Springer-Verlag Company, 2001.
[12] Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games[J]. European Journal Operational Research, 2001, 129(3): 596—618.
[13] Tijs S, Branzei R, Ishihara S, *et al*. On cores and stable sets for fuzzy games[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 146(2): 285—296.
[14] Branzei R, Dimitrov D, Tijs S. Models in Cooperative Game Theory: Crisp, Fuzzy and Multi-Choice Games[M]. New York: Springer, 2005.
[15] Mares M. Fuzzy coalition structure[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 23—33.
[16] Mares M. Fuzzy Cooperative Games-Cooperation with Vague Expectations[M]. Physica-Verlag: A Springer-Verlag Company, 2001.
[17] Shapley L S. A value for n-person games[A]. Kuhn H W, Tucker A W. eds. Contributions to the Theory of Games Vol. II [M]. Princeton: Princeton University Press, 1953. 307—317.
[18] Yang rong, Wang zhenyuan, Heng pheng-ann. Fuzzy numbers and fuzzification of the Choquet integral[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(1): 95—113.
[19] Wang zhenyuan, Yang rong, Heng pheng-ann. Real-valued Choquet integrals with fuzzy-valued integrand[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(1): 256—269.
[20] 陈 雯, 张 强. 模糊合作对策的Shapley值[J]. 管理科学学报, 2006, 9(5): 50—55.
Chen Wen, Zhang Qiang. Shapley value for fuzzy cooperative games[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(5): 50—55. (in Chinese)

Shapley value for n-persons fuzzy games based on Choquet extension

TAN Chun-qiao, CHEN Xiao-hong
School of Business, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: For n-person games, any coalition can equivalently be represented by its characteristic vectors. In this paper, by means of Choquet integral, n-person games are extended from $\{0, 1\}^n$ to $[0, 1]^n$. According to axioms system, we investigate and prove the existence and uniqueness of a solution concept for n-person games with fuzzy coalition, which is called the Shapley value. An explicit formula of the Shapley value is given. Finally, we apply the method to profit allocation scheme among enterprises in supply chain coordination.

Key words: n-persons games; fuzzy coalitions; Choquet integral; Shapley value