

# 上证指数高频数据的多重分形错觉<sup>①</sup>

周炜星

(华东理工大学商学院, 上海 200237)

**摘要:** 以上证指数 5 分钟取样的高频数据为例, 采用配分函数法对每一交易日的数据进行多重分形分析, 发现质量指数  $\tau(q)$  为线性函数, 用统计自举生成随机时间序列以深入剖析多重分形谱  $f(\alpha)$ , 发现约有 51% 的交易日, 其多重分形特性无法通过显著性检验. 进一步分析发现, 所有真实时间序列的奇异性强度与随机序列的奇异性强度相差无几, 因而完全可以用后者加以解释. 因此, 上证指数本身并不具多重分形特性.

**关键词:** 金融物理学; 上证指数; 多重分形分析; 统计检验

**中图分类号:** F830 O 189 12 N93 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)03-0081-06

## 0 引言

金融物理学是用统计物理、理论物理、复杂系统理论、非线性科学、应用数学等的概念、方法和理论研究金融市场通过自组织而涌现的宏观规律及其复杂性的一门新兴交叉学科<sup>[1-2]</sup>. 金融物理学的主要研究内容包括 4 个方面<sup>[2-3]</sup>: 第 1, 金融市场变量的统计规律, 其中最基本的性质是关于收益率的尖峰胖尾分布<sup>[4-6]</sup>. 第 2 证券的相关性、极端事件、金融风险管理和投资组合等, 分形市场假说与多重分形的理论和方法被广泛应用于分析金融时间序列<sup>[7-10]</sup>. 第 3 宏观市场的建模和预测, 包括用随机过程对收益率建模、对数周期性幂律模型等<sup>[11]</sup>. 第 4 金融市场的微观模型, 主要包括基本面投资者和噪声交易者博弈、逾渗模型、伊辛模型、少数者博弈模型等, 以及由此而衍生出来的各种模型<sup>[12-13]</sup>.

最早用多重分形理论分析金融时间序列的学者可能是 Ghoshghaie 等<sup>[10]</sup>, 他们将外汇市场与湍流类比, 发现美元和德国马克外汇价格波动的矩函数具有非线性的标度律, 而其他关于汇市多重分形特性的实证研究也得到了广泛关注. 多重分

形特性在其他金融时间序列中也有大量报道, 如黄金价格、商品价格、股票个股价格、股市指数的收益率等<sup>[2]</sup>. 也有一些学者直接研究价格本身的多重分形性质, 如香港恒生指数<sup>[14-15]</sup>、上证指数和深圳成指<sup>[16-20]</sup>、大陆上市的部分个股<sup>[21]</sup>等, 他们采用高频数据(如 5 分钟), 对每个交易日进行多重分形分析, 计算出多重分形奇异谱, 并指出这些多重分形性质与价格反常波动、风险管理等密切相关. 但是, 若进一步分析这些结果, 可以发现两个问题:

第 1 根据多重分形理论, 当尺度  $l \rightarrow 0$  时, 若存在常数  $\alpha(x)$  使得测度  $\mu$  在点  $x$  的邻域  $B(x, l)$  上满足幂律关系

$$\mu(B(x, l)) \sim l^{\alpha(x)} \quad (1)$$

则称测度  $\mu$  在点  $x$  处奇异, 其奇异性强度为  $\alpha(x)$ . 当  $\mu$  为股票价格或者股市指数时,  $\mu(B(x, l))$  近似正比于  $l$  即对所有点  $x$ , 奇异性指数  $\alpha(x) \approx 1$  换言之, 该测度在理论上不具备多重分形特性. 事实上, 实证研究得到的结果无一例外验证了上述理论推测, 奇异性强度分布  $\Delta \alpha \triangleq \alpha_{\max} - \alpha_{\min} \approx 0$

第 2 在湍流或海量高频金融数据的多重分

① 收稿日期: 2007-05-10; 修订日期: 2007-10-08.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70501011); 霍英东教育基金会高等院校青年教师基金资助项目(101086).

作者简介: 周炜星(1974—), 男, 浙江诸暨人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: wxzhou@eust.edu.cn

形分析中<sup>[22-24]</sup>,即使是百万量级的数据,一般也要求阶数  $q$  小于 8 才能保证配分函数的收敛性,因此分析更高阶的配分函数在统计上没有意义.而在上面讨论的研究中,每一交易日的高频时间序列(1分钟或5分钟数据)的长度不超过 240 却普遍采用了很大的阶数  $q$ ,甚至到达  $q = \pm 210$  这极大地降低了分析结果的可信性.

事实上,大部分文献只热衷于报道实证研究的结果,却忽略了更本质的内容,即产生多重分形特性的原因.研究表明,即使是不具多重分形特性的分形模型,也可能产生所谓的多重分形性质<sup>[25]</sup>,因而这些实证得到的多重分形特性,更确切的表述应该是“经验多重分形特性”.时间序列中的经验多重分形特性有两个可能的来源,一是波动性中存在的长程相关性,二是收益率的胖尾分布<sup>[26]</sup>.对很多金融时间序列,经验多重分形特性源于胖尾分布的零假设无法拒绝<sup>[27]</sup>,这一结论已经为一些研究所证实.对于价格时间序列而言,得到的多重分形谱具有很窄的奇异性分布,同样需要对之进行统计检验.

本文重新研究上证指数日内高频数据的多重分形特性,并采用统计自举(bootstrapping)的方法检验得到的经验多重分形特性是否来自随机涨落.结果表明,在近半数交易日中,随机化后的数据能够产生比真实数据更强的多重分形特性,而在另一半交易日中,随机化后的数据得到的奇异性强度能够在很大程度上解释真实数据的奇异性强度.因而,关于价格的所谓多重分形特性实际上不过是一种错觉.

## 1 数据与配分函数法

本文采用上证指数的 5 分钟高频数据,记录从 2001 年 2 月 28 日至 2006 年 8 月 10 日,剔除不完整的数据后,共余下 1 201 个交易日.对于每个交易日,共有  $T = 48$  个数据点,不妨记为  $\{\mu(t) : t = 1, 2, \dots, 48\}$ .

与相关文献<sup>[14-21]</sup>一致,本文采用配分函数(partition function)法<sup>[28-32]</sup>进行多重分形分析.将该测度  $\mu$  的支撑集分为尺度为  $l$  的盒子,可得  $N = T/l$  个盒子,第  $n$  个盒子内的测度为

$$\begin{aligned} \mu(n; l) &\triangleq \mu([ (n-1)l + 1, nl ] ) \\ &= \sum_{i=1}^l \mu( (n-1)l + i ) \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $l$  的取值为: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. 于是,  $q$  阶配分函数为

$$x_q(l) = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mu(n; l)}{\sum_{m=1}^N \mu(m; l)} \right]^q \quad (3)$$

若测度  $\mu$  具有自相似性,则存在标度指数函数  $\tau(q)$  使得如下标度关系成立

$$x_q(l) \sim l^{\tau(q)} \quad (4)$$

若测度  $\mu$  为单分形,则  $\tau(q)$  为线性函数;若  $\mu$  为多重分形,则  $\tau(q)$  为非线性函数.奇异性指数  $\alpha(q)$  和多重分形奇异谱  $f(\alpha)$  可对  $\tau(q)$  进行勒让德变换,得到<sup>[32]</sup>

$$\begin{cases} \alpha(q) = d\tau(q)/dq \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \end{cases} \quad (5)$$

可以用数值计算得到结果.

为使结果具有可比性,本文  $q$  的取值范围仍设得很大,取  $-120 \leq q \leq 120$ <sup>[19-20]</sup>. 当

$$\frac{\mu(n; l)}{\sum_{m=1}^N \mu(m; l)} \ll 1$$

且  $|q| \gg 1$  时,为了避免数值计算的结果超出电脑存储能力,可用下式计算配分函数的对数

$$\begin{aligned} \ln x_q(l) &= \ln \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mu(n; l)}{\max_m \{ \mu(m; l) \}} \right]^q + \\ &\quad q \ln \left[ \frac{\max_m \{ \mu(m; l) \}}{\sum_{n=1}^N \mu(n; l)} \right] \end{aligned}$$

从而增大计算范围.

## 2 多重分形分析

为确认上证指数的标度行为,以 2001 年 7 月 24 日为例,用配分函数法对 5 分钟交易数据进行多重分形分析.

图 1 给出了不同  $q$  值的配分函数  $x_q(l)$  与尺度  $l$  之间在双对数坐标系中的关系,可以发现,对每个  $q$  值  $x_q(l)$  与  $l$  呈很好的幂律关系,其中的直线为线性最小二乘拟合所得,无标度区覆盖了所考察的所有尺度,即  $l \in [1, 48]$ .

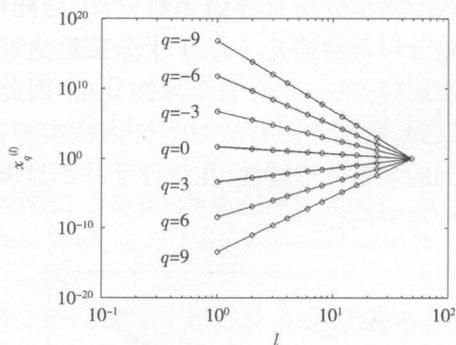


图 1 上证指数配分函数的标度行为

Fig 1 Scaling behavior of partition function of SSEC

由式 (4), 图 1 中直线斜率的相反数给出了相应  $q$  值的质量指数  $\tau(q)$ , 结果如图 2 所示. 不难看出, 质量指数  $\tau(q)$  相对于阶数  $q$  呈现良好的线性关系, 如图中直线所示, 其斜率为  $1\ 000 \pm 0\ 005$ , 线性相关系数为  $1\ 000\ 0$ . 从图 2 中显然无法得到  $\tau(q)$  为非线性函数这一结论, 而其他交易日的  $\tau(q)$  函数同样具有良好的线性关系, 因而, 上证指数本身不具有多重分形特性.

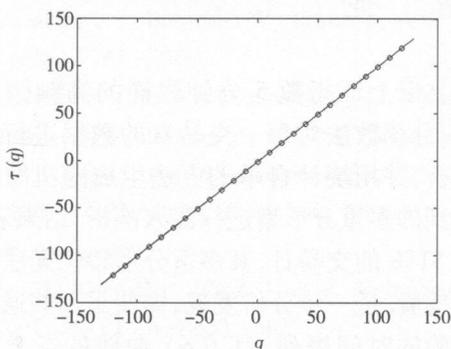


图 2 上证指数的质量指数函数  $\tau(q)$

Fig 2 Mass exponent  $\tau(q)$  of SSEC

图 3 给出了通过对  $\tau(q)$  进行勒让德变换得到的多重分形奇异谱曲线  $f(\alpha)$ . 单从形状而言, 该曲线具备守恒多重分形测度奇异谱曲线的所有几何性质<sup>[2]</sup>. 然而, 即使对于  $-120 \leq q \leq 120$  这么大的取值范围,  $\Delta\alpha$  的值依然很小, 而  $\alpha_{\min}$  和  $\alpha_{\max}$  的值十分接近 1, 同样显示所谓的多重分形特性不过是一种错觉.

### 3 统计检验

为进一步定量检验所得到的多重分形特征的统计显著性, 采用统计自举的方法. 对于一个给定

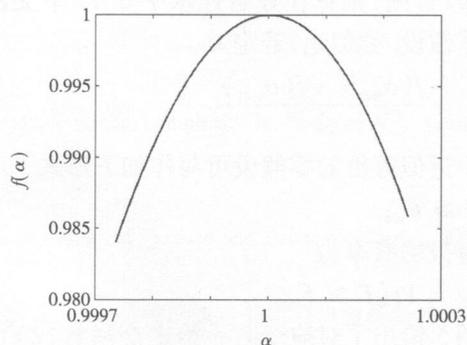


图 3 上证指数的多重分形谱  $f(\alpha)$

Fig 3 Multifractal spectrum  $f(\alpha)$  of SSEC

交易日的实际交易数据, 若将其次序打乱使得其中可能存在的相关性消失, 则得到的随机化序列不具多重分形特性. 对于上节讨论的例子, 本文计算了 10 个随机化序列的多重分形谱函数, 结果示于图 4, 其中, 实线对应真实上证指数, 10 条虚线对应随机化序列, 插图则是对主图左下方的放大. 可以看到, 上证指数的多重分形谱  $f(\alpha)$  与随机化序列的多重分形谱  $f_{\text{rnd}}(\alpha_{\text{rnd}})$  无法区分, 即实际序列的所谓多重分形特性并不显著.

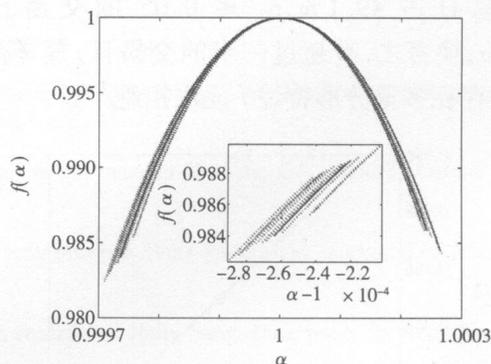


图 4 实际上证指数与随机化序列多重分形谱的比较

Fig 4 Comparison of multifractal spectra extracted from real and shuffled SSEC

多重分形的强度可以通过奇异性强度分布  $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$  来刻画, 统计检验多重分形特征的存在性, 等价于检验奇异性指数  $\alpha$  异于 1, 或  $\Delta\alpha \neq 0$ . 为此, 对于每一交易日的数据序列, 可生成  $n = 1\ 000$  个随机化序列, 其奇异性指数和奇异谱函数用下标  $\text{rnd}$  表示, 则统计检验的零假设为

$$\Delta\alpha \leq \Delta\alpha_{\text{rnd}}$$

虚假警报的概率为

$$p_1 = \text{Pr}(\Delta\alpha \leq \Delta\alpha_{\text{rnd}})$$

若  $p_1 \leq 0.05$  则谓之得到的多重分形特性存在并

且显著, 否则, 则称在显著性水平 0.05 下无法拒绝该零假设. 类似地, 若定义

$$F = \frac{f(\alpha_{min}) + f(\alpha_{max})}{2}$$

则一个近似等价的零假设可写作如下形式

$$F \geq F_{md}$$

虚假警报的概率为

$$p_2 = Pr(F \geq F_{md})$$

图 5 给出了对应于某一给定交易日 (2001 年 7 月 24 日) 的  $F_{md}$  与  $\Delta\alpha_{md}$  之间的散点图. 由图发现,  $F_{md}$  与  $\Delta\alpha_{md}$  之间存在良好的线性关系

$$F_{md} = k\Delta\alpha_{md} + b \tag{6}$$

其中,  $k = -29.7$ ,  $b = 1.0$  线性相关系数为 0.9999 图中的圆圈则表示实际上证指数序列所给出的  $F = 0.9850$  与  $\Delta\alpha = 5.0714 \times 10^{-4}$  值, 正好落在直线 (6) 上. 可以得到,  $p_1 = 0.289$ ,  $p_2 = 0.293$  可见, 无法将实际数据从随机化数据中区分出来. 对于其他交易日, 也得到了类似的结果, 并且,  $k = -29.6 \pm 0.7$ ,  $b = 1.000 \pm 0.003$  计算发现, 所有交易日的  $p_1 \approx p_2$ . 在 1201 个交易日中,  $p_1 \leq 0.05$  的交易日占 49.1%,  $p_2 \leq 0.05$  的交易日占 49.1%, 换言之, 有超过一半的交易日, 其零假设 (即不存在多重分形特性) 无法拒绝.

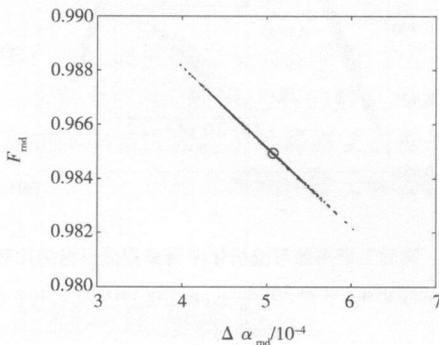


图 5 随机化上证指数序列的  $F_{md}$  与  $\Delta\alpha_{md}$  之间的散点图  
Fig 5 Scatter plot of  $F_{md}$  and  $\Delta\alpha_{md}$  of 1000 shuffled SSEC series

那么, 是否可以认为, 这 49.1% 或 49.1% 的交易日, 其多重分形特性在统计意义上是显著的呢? 为此, 可以直接比较给定交易日内实际数据给出的  $\Delta\alpha$  和  $F$  值与随机序列的均值  $\langle \Delta\alpha_{md} \rangle$  和  $\langle F_{md} \rangle$ , 结果如图 6 所示, 其中的实线给出了表示“实际数据等于随机化数据”的对角线. 图 6 表明, 所有交易日的  $\Delta\alpha \approx \langle \Delta\alpha_{md} \rangle$  且  $F \approx \langle F_{md} \rangle$ .

实际序列的多重分形奇异谱函数  $f(\alpha)$  与随机序列的多重分形奇异谱  $f_{md}(\alpha_{md})$  十分接近, 仅随机波动便能解释  $f(\alpha)$  曲线的奇异性分布. 因此, 同样可以认为, 用配分函数法对上证指数本身进行分析得到的多重分形特性, 在统计上并不显著, 不过是一种错觉而已.

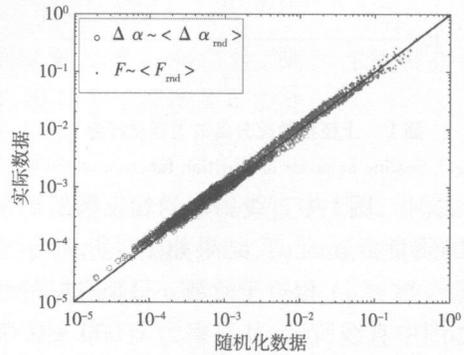


图 6 随机化数据与实际数据给出的  $F$  与  $\Delta\alpha$  的比较  
Fig 6 Comparison of  $F$  and  $\Delta\alpha$  extracted from real and shuffled SSEC series

### 4 结 论

本文以上证指数 5 分钟取样的高频数据为例, 用配分函数法对每一交易日的数据进行多重分形分析, 并用统计自举的方法生成随机时间序列对得到的多重分形谱进行深入剖析. 结果表明, 大约有 51% 的交易日, 其多重分形特性无法通过显著性检验. 进一步分析发现, 即使是那些通过显著性检验的时间序列, 其  $f(\alpha)$  曲线的奇异性强度, 也与随机序列的奇异性强度相差无几, 因而完全可以用后者得以解释. 此外, 所有交易日的质量指数  $\tau(q)$  呈现十分良好的线性关系, 非线性无法得到确认. 显然, 文献中所谓的多重分形特性, 只是一种错觉. 不难推测, 日内价格 (如个股) 或指数 (如恒生指数、深圳成指等) 本身并不具多重分形特性.

股市指数的所谓多重分形特性, 已被学者用于进行股市预测<sup>[15]</sup> 和构建市场风险指数<sup>[19,20]</sup>, 本文的研究对此提出了质疑. 需要指出的是, 本文并没有否定用多重分形理论进行市场预测和风险管理这一思路, 若采用其他金融变量 (如收益率) 计算真实多重分形特性, 或将得到更有价值的成果.

## 参考文献:

- [1] Mantegna R N, Stanley H E. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance[M]. Cambridge University Press, 2000.
- [2] 周炜星. 金融物理学导论[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2007.  
Zhou Weixing. A Guide to Econophysics[M]. Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics Press, 2007. (in Chinese)
- [3] 李平, 汪秉宏, 全宏俊. 金融物理的若干基本问题与研究进展(I)——价格的统计分析与价格涨落的随机过程模型[J]. 物理, 2004, 33(1): 28–33.  
Li Ping, Wang Binghong, Quan Hongjun. Some problem and progress about econophysics[J]. Physics, 2004, 33(1): 28–33. (in Chinese)
- [4] Mandelbrot B B. The variation of certain speculative prices[J]. Journal of Business, 1963, 36(4): 394–419.
- [5] Fama E F. The behavior of stock market prices[J]. Journal of Business, 1965, 38(1): 34–105.
- [6] Mantegna R N, Stanley H E. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index[J]. Nature, 1995, 376(6535): 46–49.
- [7] Mandelbrot B B. Long-run interdependence in price records and other economic time series[J]. Econometrica, 1970, 38(Suppl): 122–123.
- [8] Mandelbrot B B. Analysis of long-run dependence in economics: The R/S technique[J]. Econometrica, 1971, 39(Suppl): 68–69.
- [9] Lo A W. Long term memory in stock market prices[J]. Econometrica, 1991, 59(5): 1279–1313.
- [10] Ghashghaie S, Breymann W, Peinke J et al. Turbulent cascades in foreign exchange markets[J]. Nature, 1996, 381(6585): 767–770.
- [11] Somette D. Critical market crashes[J]. Physics Reports, 2003, 378(1): 1–98.
- [12] Johnson N F, Jefferies P, Hui P-M. Financial Market Complexity: What Physics Can Tell Us About Market Behaviour[M]. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [13] Challet D, Marsili M, Zhang Y-C. Minority Games: Interacting Agents in Financial Markets[M]. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [14] Sun X, Chen H-P, Wu Z-Q, et al. Multifractal analysis of Hang Seng index in Hong Kong stock market[J]. Physica A, 2001, 291(1–4): 553–562.
- [15] Sun X, Chen H-P, Yuan Y-Z, et al. Predictability of multifractal analysis of Hang Seng stock index in Hong Kong[J]. Physica A, 2001, 301(1–4): 473–482.
- [16] 魏宇, 黄登仕. 金融市场多标度分形现象及与风险管理的关系[J]. 管理科学学报, 2003, 6(1): 87–91.  
Wei Yu, Huang Dengshi. Multifractal phenomenon and financial risk management[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(1): 87–91. (in Chinese)
- [17] 魏宇, 黄登仕. 中国股票市场多标度分形特征的实证研究[J]. 系统工程, 2003, 21(3): 7–12.  
Wei Yu, Huang Dengshi. A study on the multifractal feature of Chinese stock market[J]. Systems Engineering, 2003, 21(3): 7–12. (in Chinese)
- [18] 吴文锋, 黄登仕, 吴冲锋. 中国股票市场的多标度特征[J]. 数量经济技术经济研究, 2003, 20(9): 112–115.  
Wu Wenfeng, Huang Dengshi, Wu Chongfeng. Multifractal feature of Chinese stock market[J]. Journal of Quantitative & Technical Economics, 2003, 20(9): 112–115. (in Chinese)
- [19] 魏宇, 黄登仕. 基于多标度分形理论的金融风险测度指标研究[J]. 管理科学学报, 2005, 8(4): 50–59.  
Wei Yu, Huang Dengshi. Study on financial risk measure based on multifractal theory[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(4): 50–59. (in Chinese)
- [20] Wei Y, Huang D-S. Multifractal analysis of SSEC in Chinese stock market: A different empirical result from Hang Seng index[J]. Physica A, 2005, 355(2–4): 497–508.

- [ 21]周孝华, 宋 坤, 杨秀苔. 股票价格持续大幅波动前后多重分形谱的异常及分析[ J]. 管理工程学报, 2006, 20( 2): 92- 96  
Zhou Xiaohua, Song Kun, Yang Xiutai. Anomaly of multifractal spectrum before and after stock price continuously fluctuating sharply and its analyses[ J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2006, 20( 2): 92- 96 ( in Chinese)
- [ 22]L'vov V S, Podivilov E, Pomyalov A, et al. Improved shell model of turbulence[ J]. Physical Review E, 1998, 58(2): 1811- 1822
- [ 23]Zhou W-X, Sornette D, Yuan W-K. Inverse statistics and multifractality of exit distances in 3D fully developed turbulence [ J]. Physica D, 2006, 214( 1): 55- 62
- [ 24]Jiang Z-Q, Zhou W-X. Scale invariant distribution and multifractality of volatility multipliers in stock markets[ J]. Physica A, 2007, 381( 1- 4): 343- 350
- [ 25]Bouchaud J-P, Potters M, Meyer M. Apparent multifractality in financial time series[ J]. European Physical Journal B, 2000, 13( 3): 595- 599
- [ 26]Kantelhardt J, Zschiegner S, Koscielny-Bunde E, et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series[ J]. Physica A, 2002, 316( 1- 4): 87- 114
- [ 27]Lux T. Detecting multifractal properties in asset returns: The failure of the “ scaling estimator” [ J]. International Journal of Modern Physics C, 2004, 15( 4): 481- 491
- [ 28]Mandelbrot B B. Intermittent turbulence in self-similar cascade: Divergence of high moments and dimension of carrier[ J]. Journal of Fluid Mechanics, 1974, 62( 2): 331- 358
- [ 29]Gaspard P. Generalized dimensions of strange attractors[ J]. Physics Letters A, 1983, 97( 6): 227- 230
- [ 30]Hentschel H G E, Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors[ J]. Physica D, 1983, 8( 3): 435- 444
- [ 31]Frisch U, Parisi G. On the Singularity Structure of Fully Developed Turbulence[ C] // M Gil R, Benzi G, Parisi G, eds., Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics. Amsterdam, North-Holland: Elsevier, 1985, 84- 88
- [ 32]Halsey T C, Jensen M H, Kadanoff L P, et al. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets [ J]. Physical Review A, 1986, 33( 2): 1141- 1151

## Illusionary multifractality in high-frequency data of Shanghai Stock Exchange Composite Index

ZHOU Weixing

School of Business, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China

**Abstract** Multifractal analysis of the intraday five-minute high-frequency data of Shanghai Stock Exchange Composite (SSEC) was conducted by utilizing the partition function method, resulting in linear mass exponent functions  $\mathcal{T}(q)$ . Shuffled series generated by bootstrapping were used to perform a careful scrutiny on the extracted multifractal spectra  $f(\alpha)$ . It is found that the multifractal features in about 51% trading days are statistically insignificant. Moreover, the singularity strength of the real data is indistinguishable from that of the shuffled data and the latter can be used to account for the former. Hence, the so-called multifractality claimed for the SSEC (and other prices or indexes) is merely an illusion.

**Key words** econophysics; SSEC index; multifractal analysis; statistical analysis