

# 后备技术不确定下资源耗竭动态优化模型研究<sup>①</sup>

葛世龙<sup>1,3</sup>, 周德群<sup>2,3</sup>, 周 明<sup>2</sup>

(1 南京财经大学管理科学与工程学院 南京 210046

2 南京航空航天大学经济与管理学院, 南京 210016 3 能源软科学研究所, 南京 210016)

**摘要:** 不确定性是资源耗竭理论的一个重要研究方向, 资源替代研究中经常涉及技术不确定问题. 在技术出现时间不确定问题描述的基础上, 考虑资源开采成本与开采量相关以及有存货情形, 利用动态规划思想处理了技术出现时间不确定, 构建了动态优化模型, 得到相应地 HJB 方程和最优开采路径. 研究表明: 确定性情形是不确定性的特例; 在早期开采阶段, 资源开采速度随着替代技术出现可能性提高而加快, 开采了一段时间后, 资源的开采速度随着替代技术出现可能性提高而减慢; 关系转折时间点取决于资源初始储量, 初始储量越大, 该时间点越往后延长.

**关键词:** 可耗竭资源; 后备技术; 生产者剩余; 动态优化

**中图分类号:** F407.0224 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)04-0023-06

## 0 引言

可耗竭资源将随着人类的不断开采而最终耗尽, 在理论上是难以持续开采利用的, 有限的资源基础是否可以支持社会经济的可持续发展, 取决于在找到具有经济价值的替代资源之前, 是否可以合理开采与利用现有的可耗竭资源. 后备技术 (Backstop Technology) 是一类可以替代可耗竭资源的技术, 它不仅可以降低经济对可耗竭资源的依赖性, 而且其供给是不受限制的<sup>[1-2]</sup>. 后备技术的应用具有较大的不确定性, 不仅体现在 R&D 活动具有很高的风险, 而且技术出现时间及其成本往往也具有不确定性, 使得对可耗竭资源的最优配置的研究显得异常复杂.

一旦技术进步的速度超过可耗竭资源消耗的速度, 则会降低现有储量的货币价值. 如果资源部门预计在未来某个时期会出现这种状况, 并且敢冒风险, 那就必然会导致开发的现期转移, 即期望获得现值

最大化的个人或企业加速地消费可耗竭资源. 相反, 如果预计替代品的出现时间相当遥远, 未来的要求会比现期更大, 人们就会趋向于放慢对现有可耗竭资源储量的开发. 在已有资源耗竭文献中, 后备技术相关研究主要涉及两类: 一是把后备技术的研发活动作为企业的内生决策, 同时探讨可耗竭资源的最优开采与后备技术的最优研发策略. 如 Kamien & Schwartz 认为技术进步是利润驱动和政府政策的引导, 技术能否成功开发, 依赖于通过 R&D 获得的知识水平高低, 假定新技术可用时间不确定的前提下建立了优化增长模型, 发现 R&D 并非一开始就进行, 研发速率是先增后降<sup>[3]</sup>. Davison 认为 R&D 的目的是提高开发技术所需的知识水平, 且可以提前终止技术研发, 把技术开发成功所需的知识水平视为随机变量, 建立 R&D 和资源开采的优化决策模型. 发现知识增长率只取决于当前投入 R&D 的资本, 当前知识是过去累积投资的函数. 尽管当前投资非正, 知识也有可能增长, 企业往往在具备一定的知识后

① 收稿日期: 2007-11-29 修订日期: 2009-06-19

基金项目: 国家社会科学基金资助重大项目 (08&ZD046); 国家自然科学基金资助项目 (70873058 70702015); 教育部人文社科基金资助项目 (08JA630041); 南京财经大学科研基金项目资助 (C0905).

作者简介: 葛世龙 (1980-), 男, 浙江台州人, 博士生. E-mail: ecsigs@163.com

才会进行 R&D 活动<sup>[4]</sup>. Tsur & Zemel 假定知识水平会随 R&D 活动增长, 从而可以降低后备技术开发成本, 在此基础上讨论可耗竭资源向后备技术切换时机选择的优化策略<sup>[5]</sup>. 二是把后备技术作为外生给定, 考虑它采用时间和成本的不确定性对资源最优开采的影响. 如 Dasgupta & Heal 分析了技术出现时间不确定性问题, 把技术出现看成离散的事件, 假定这些事件发生的概率分布是已知的, 从而讨论技术出现时间不确定对可耗竭资源的优化耗竭的影响<sup>[6]</sup>. Dasgupta & Stiglitz 根据套利公式分析了不确定问题, 根据发明和革新把技术应用划分为三个阶段, 讨论了它对资源跨期配置的影响<sup>[7]</sup>. Hoel 研究了技术成本不确定对资源跨期配置的影响<sup>[8]</sup>. 魏晓平等在研究矿产资源与可再生资源之间替代模型时, 分析了替代资源边际成本变化对替代条件的影响<sup>[9]</sup>. Oren & Powell 考虑到时间和成本的关联性, 分析了它们的综合影响<sup>[10]</sup>. Just, Netanyahu & Olson 探讨了存在多技术时, 技术采用及资源优化开采问题<sup>[11]</sup>.

在这些研究中都认为资源的需求量与资源开采量一致, 现实中, 它们往往并不一致. Lee & Orr 探讨了有存货时, 私人贴现率对资源开采和销售时间的影响<sup>[12]</sup>. Chemak & Patrick 在验证可耗竭资源理论时, 认为资源不是开采即投入市场, 而是初加工后才进入市场<sup>[13]</sup>, 处理方式类似于有存货情形. 基于此, 本文在考虑有存货, 且开采成本与开采量有关的基础上, 分析后备技术出现时间不确定对资源最优开采的影响.

## 1 动态优化模型的建立

### 1.1 限制条件

可耗竭资源是指一些矿物燃料和矿产资源, 如煤炭、原油和铁矿石等. 在自然环境下, 可耗竭资源难以迅速再生, 其储量随资源不断开采而逐渐减少, 且补充速度非常缓慢, 最终将耗竭, 或者在相当漫长的时间里, 恢复的资源不具有经济性.

分别记  $R_t, X_t$  为  $t$  时刻的资源的剩余储量和开采量,  $T$  为资源的耗竭(完全开采)时间,  $A, B$  分别表示资源的初始储量和期末储量, 由于地质条件和开采技术条件等因素的限制, 在开采终止时始终存在有不同的储量, 但不具有经济性, 这意味着期末储量

为正. 在文中, 设定资源的初始储量为确定值, 期末储量为零. 因此, 在开采期间  $(0, T)$ , 资源的基本限制条件可以表示为:

$$\begin{cases} \int_0^T x_t dt \leq R_0 \\ R_t \geq 0, R_0 = A, R_T = B = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由于文中研究资源的最优开采问题, 故式(1)中的第一个表达式应该取等号.

假定文中所涉及的函数均为连续、可导.

### 1.2 成本函数

假设 1 在开采时期内, 企业的技术水平基本保持不变, 开采成本只取决于  $t$  时刻的开采量  $X_t$ , 且具有弱凸性. 即有:

$$\frac{dC_t}{dX_t} > 0, \quad \frac{d^2C_t}{dX_t^2} \geq 0$$

开采成本可能是 U 型或者是单调递增, 文中根据假设 2 成本函数取为二次型

$$C_t(X_t) = \frac{bX_t^2}{2} + c \quad (2)$$

其中,  $C_t(X_t)$  表示  $t$  时刻的开采成本,  $b, c$  为成本函数的系数, 为分析方便, 取  $c = 0$

### 1.3 需求函数

现实中, 尽管资源市场或多或少都存在着垄断性, 但是资源价格通常受国家控制, 企业只是价格的接受者, 且资源市场的集中度低, 竞争程度非常高, 如煤炭. 此外, 有些资源虽然在国内垄断性很强, 但由于资源总量少, 从世界范围来看, 只表现出完全竞争者的行为, 如原油. 故作如下假定:

假设 2 资源具有同质性, 不同企业开采的资源具有完全的相互替代性, 资源市场为完全竞争, 任意时期资源市场都能出清.

因此, 企业是资源价格接受者, 其价格  $P_t$  取决于资源的市场需求量, 且价格在一定范围内取值. 价格上限  $(\bar{P})$  取决于替代资源成本, 也可能取决于价格控制, 价格下限  $(\underline{P})$  往往取决于价格控制, 它们可从消费者和生产者两个方面来确定: 当  $P_t > \bar{P}$  时, 资源将被其替代品所替代, 消费者对资源的消费需求减少为零, 资源开采和消费活动都将停止, 需求也就退出了市场; 当  $P_t < \underline{P}$  时, 开采成本将无法弥补, 生产者无利可图, 使得生产量减少为零, 除非政府给以财政补贴. 下面设定需求函数的特征:

假设 3 需求函数具有弱凹性, 即  $\frac{dQ_t}{dP_t} < 0$

$$\frac{d^2 Q_t}{dP_t^2} \leq 0$$

为研究方便, 本文取线性形式, 记为:

$$Q_t = a(\bar{P} - P_t) = \bar{P} - P_t \quad (3)$$

其中,  $Q_t$  表示  $t$  时刻的市场需求量,  $a$  为需求函数的正系数, 为分析方便取  $a = 1$

### 1.4 库存及库存成本

由于资源开采地与使用地之间可能存在运输瓶颈, 或者企业为了生产的连续性, 企业在开采地与使用地之间总会保有一定水平的储备量. 库存策略及库存成本假定为:

假设 4  $t$  时刻累积库存量与当期资源累积开采量成正比, 即  $I_t = \alpha(R_0 - R_t)$ ; 库存成本与累积库存量也成正比, 即  $C_t = \beta I_t$ .

其中,  $I_t, C_t$  分别表示  $t$  时刻累积库存量和库存成本,  $\alpha, \beta$  分别为正比例系数.

### 1.5 技术不确定描述

假定技术出现时间是不确定的, 将它视为随机变量, 技术的成本特征是确定, 记  $\bar{C}$  为利用后备技术生产单位资源的成本, 当边际开采成本大于后备技术的固定成本时, 后备技术才被采用.

记  $\lambda_t$  为在  $t$  时刻之前不存在技术发明, 直到  $t$  时刻才出现技术发明的条件概率, 当  $t \geq 0$  时,  $\lambda_t$  为连续的;  $\Pi_t$  表示直到  $t$  时刻 (在之前技术未研发出来) 技术才被研发出来的概率密度, 即条件概率密度;  $\Omega_t$  表示  $t$  时刻存在技术发明的概率. 可得关系:

$$\Omega_t = \int_0^t \Pi_t dt \quad (4)$$

$$\lambda_t = \frac{\Pi_t}{1 - \Omega_t} \quad (5)$$

便于分析, 作如下假设:

假设 5 技术出现过程服从 Poisson 过程, 则,  $\lambda_t = \lambda > 0, \Pi_t = \lambda e^{-\lambda t}$ .

### 1.6 目标函数

企业目标是追求利润最大化, 可用生产者剩余来度量, 它是指提供资源获得的收益与提供资源成本的净值. 当市场出清时, 市场需求量与资源销售量一致, 因此, 可得如下关系:

$$Q_t = \begin{cases} X_t - \dot{I}_t & \text{后备技术未应用时} \\ X_t - \dot{I}_t + Y_t & \text{后备技术应用时} \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $Y_t$  表示后备技术应用后, 在  $t$  时刻提供的资源量, 设为常量  $Y$ .  $\dot{I}_t$  表示  $t$  时刻的库存变化量.

由于技术发明时间  $t$  是不确定的, 它将开采过程分为两个阶段. 因此, 在时刻  $\tau (\tau \geq t)$  所面临的问题是如何求解如下的优化问题:

$$V(R_t) = \max_{(X_\tau, Y_\tau)} \int_t^\infty [P_\tau (X_\tau - \dot{I}_\tau + Y_\tau) - C_\tau (X_\tau) - C_\pi - Y_\tau C] e^{-r\tau} d\tau$$

$$s.t. \begin{cases} \int_t^\infty X_\tau d\tau \leq R_t \\ X_\tau \geq 0, Y_\tau \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $r$  为贴现率.

类似文献 [7], 可得企业的目标函数为:

$$\max: [P_t (X_t - \dot{I}_t) - C_t (X_t) - C_h] (1 - \Omega_t) + \Pi_t V(R_t) \quad (8)$$

### 1.7 动态优化模型

综合式 (1) 和式 (8), 可得后备技术不确定下资源耗竭的动态优化模型为:

$$W_t = \max_{X_t} \int_0^T \{ [P_t (X_t - \dot{I}_t) - C_t (X_t) - C_h] \times (1 - \Omega_t) + \Pi_t V(R_t) \} e^{-rt} dt$$

$$s.t. \begin{cases} \int_0^T X_t dt = R_0 \\ R_t \geq 0, R_0 = A, R_T = 0 \end{cases} \quad (9)$$

## 2 最优开采路径的确定

### 2.1 优化问题式 (7) 的求解

优化问题式 (7) 的 Hamilton-Jacob-Bellman 方程为<sup>[14]</sup>:

$$rV(R_t) = \max \{ [P_\tau (X_\tau - \dot{I}_\tau + Y_\tau) - C_\tau (X_\tau) - C_\pi - Y_\tau C] - \frac{\partial V(R_t)}{\partial R_t} X_t \} \quad (10)$$

将式 (1)、(2)、(3)、(6) 代入式 (10), 结合假设 4 关于求偏导, 令其等于 0 可得:

$$\frac{\partial V(R_t)}{\partial R_t} = (\bar{P} - 2Y) (1 - \alpha) - [2(1 - \alpha)^2 + b] X_t \quad (11)$$

### 2.2 动态优化模型的解

根据假设 (5), 并利用最优控制理论对优化

问题 (9) 进行求解, 现值哈密尔顿函数可表示为<sup>[15]</sup>:

$$H_c = \{[\bar{P} - (1 - \alpha)X_t](1 - \alpha)X_t - \frac{bX_t^2}{2} - \alpha\beta(R_0 - R_t)\}e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}V(R_t) - m_t X_t \quad (12)$$

其中,  $m_t$  为现值拉格朗日乘子,  $m_t = m_0 e^{rt}$ ,  $m_0$  为初期资源的影子价格. 一阶条件和横截条件分别为

$$\dot{R}_t = \frac{\partial H_c}{\partial m_t} = -X_t \quad (13)$$

$$\dot{m}_t = -\frac{\partial H_c}{\partial R_t} + m_t = -\alpha\beta e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \frac{\partial V(R_t)}{\partial R_t} + m_t \quad (14)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial X_t} = \{\bar{P}(1 - \alpha) - [2(1 - \alpha)^2 + b]X_t\} e^{-\lambda t} - m_t = 0 \quad (15)$$

$$[H_c]_{t=T} = 0 \quad (16)$$

由式 (15) 可得

$$m_t = \{\bar{P}(1 - \alpha) - [2(1 - \alpha)^2 + b]X_t\} e^{-\lambda t} \quad (17)$$

对式 (17) 求导, 并结合式 (11), 代入式 (14) 可得微分方程:

$$[2(1 - \alpha)^2 + b]R_t - r[2(1 - \alpha)^2 + b]\dot{R}_t = (r\bar{P} + 2\lambda Y)(1 - \alpha) - \alpha\beta \quad (18)$$

注意到储量的边界条件, 并利用 Maple 软件可求得最优开采路径:

$$X_t = \frac{MA - NT}{(e^{-rt} - 1)M} e^{rt} + \frac{N}{rM} \quad (19)$$

其中,  $M = 2(1 - \alpha)^2 + b$ ,  $T$  由式 (16) 确定,  $N = (r\bar{P} + 2\lambda Y)(1 - \alpha) - \alpha\beta$

### 3 讨 论

根据式 (19) 可得到如下结论:

其一, 若  $\lambda = 0$  即无后备技术, 问题退化为确定性优化问题, 说明确定是不确定情形的特例.

其二, 资源开采量的变化形式仍以增长率大小为  $r$  的指数衰减, 但由式 (14) 知, 资源的影子价格已不再以指数形式增长.

其三, 假定其它参数不发生变化, 对式 (19) 关于  $\lambda$  求偏导, 得

$$\frac{\partial X_t}{\partial \lambda} = \frac{-2Y(1 - \alpha)T e^{rt}}{(e^{rt} - 1)M} + \frac{2Y(1 - \alpha)}{rM} \quad (20)$$

现判断式 (20) 的符号, 只需判断如下式子  $e^{rt} - 1 - rT e^{rt}$ . 从而有

1) 当  $t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{e^{rt} - 1}{rT}$  时, 有  $X_t = \frac{A}{T}$ , 只与

初始储量和耗竭时间有关, 而于其它参数无关.

2) 当  $t^* < \frac{1}{r} \ln \frac{e^{rt} - 1}{rT}$  时, 则  $\frac{\partial X_t}{\partial \lambda} > 0$  这说明

了开始阶段, 资源开采速度随着技术发明的可能性增加而提高. 也就是说, 当替代技术存在的可能性越大, 资源将会越快耗竭. 这反映了企业在技术不确定的情形下, 要急于收回初期投资, 就必须加快资源开采以获利.

3) 当  $t^* > \frac{1}{r} \ln \frac{e^{rt} - 1}{rT}$  时,  $\frac{\partial X_t}{\partial \lambda} < 0$  说明了经

过一段时间开采后, 开采速度随着技术发明的可能性增加而减慢. 这正反映了企业通过资源开采获得一定回报以后, 需对替代技术和资源继续开采的成本进行对比分析, 以做出合理的决策.

4) 对  $t^*$  进一步分析, 记  $y = \frac{e^{rt} - 1}{rT}$ , 根据  $t^*$

的表达式和复合函数增减关系可知,  $t^*$  与  $T$  的关系跟  $y$  与  $T$  的关系一致. 对  $y$  关于  $T$  求偏导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial T} &= \frac{rT e^{rt} - (e^{rt} - 1)}{rT^2} \\ &= \frac{e^{-rt} - (1 - rT)}{rT^2 e^{rt}} \end{aligned} \quad (21)$$

可以通过图解法 (如图 1 所示), 比较直线  $y_1 = 1 - rT$  和曲线  $y_2 = e^{-rt}$  的相对位置来确定式 (21) 的符号大小.

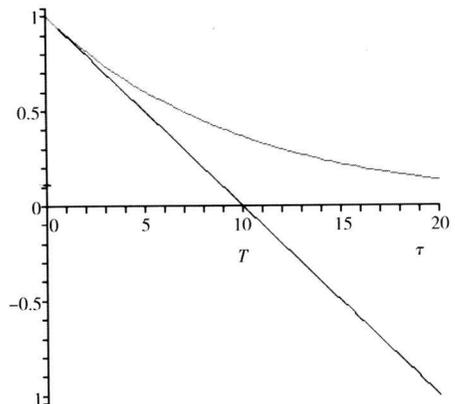


图 1 曲线与直线的相对位置示意

Fig 1 Graphical illustration relative position between curve and line

由图可见, 在  $T = 0$  处直线与曲线相切, 且曲线总在直线上方, 故  $e^{-rT} > 1 - rT$ , 所以  $\frac{\partial y}{\partial T} > 0$  从而可得,  $\frac{\partial t^*}{\partial T} > 0$  即  $t^*$  为  $T$  的增函数, 也就是说, 随着资源储量的增加, 开采速度随替代技术出现可能性提高而增长的时间会延长。

## 4 结束语

可耗竭资源最优开采是资源可持续开采与利用研究的核心。从理论上讲, 可耗竭资源是难以持续开采的, 在耗竭之前可以找到具有经济价值的替代资源, 并逐渐过渡到替代资源, 从而达到可持续。通常认为对替代资源的乐观估计会加快资

源的耗竭, 文中从替代技术出现时间不确定角度来描述乐观估计, 结果发现, 技术不确定性对资源耗竭的影响并不是那么直观, 而是需要分时间段进行分析。在开始阶段替代技术出现可能性越大 (乐观估计), 资源开采速度也越大, 会加快资源耗竭; 随着开采的继续, 该结论将不成立, 对技术的乐观估计反而减缓了资源的耗竭。因此, 在具体讨论替代资源的影响时需要注意当前的开采阶段。

文中所得结果是在完全竞争市场下获得, 将价格换成边际收益, 就可以推广到垄断市场。文中使用了一些特殊函数和假设条件, 结论具有局限性。尽管在文中考虑了资源储备和后备技术不确定问题, 但没有考虑资源开采时间与销售时间的区分、技术成本特征及多技术替代与采用问题, 这些将是今后研究努力的方向。

## 参考文献:

- [1] Nordhaus W D. The allocation of energy resources[J]. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1973 4(3): 529-576
- [2] Matti Liski, Pauli Murto. Backstop technology adoption[Z]. <http://neumann-heck.ca/cree2005/murto.pdf>
- [3] Kanien M L, Schwartz N L. Optimal exhaustible resource depletion with endogenous technical change[J]. *Review of Economic Studies* 1978, 45(139): 179-196
- [4] Davison R. Optimal depletion of an exhaustible resource with research and development towards an alternative technology [J]. *Review of Economic Studies* 1978, 45(140): 355-367.
- [5] Tsur Y, Zemel A. Optimal transition to backstop substitutes for nonrenewable resources[J]. *Journal Economic Dynamics & Control* 2003, 27(4): 551-572
- [6] Dasgupta P, Heal G. The optimal depletion of exhaustible resources[J]. *Review of Economic Studies* 1974, 41(128): 3-28
- [7] Dasgupta P, Stiglitz J. Resource depletion under technological uncertainty[J]. *Econometrica* 1981, 49(1): 85-104
- [8] Hoel M. Resource extraction when a future substitute has an uncertain cost[J]. *Review of Economic Studies* 1978, 45(141): 637-644
- [9] 魏晓平, 谢钰敏. 矿产资源与可再生资源之间的替代模型研究 [J]. *管理科学学报*, 2001, 4(2): 63-66  
Wei Xiaoping, Xie Yumin. On replaces model research between mineral resources and renewable resources[J]. *Journal of Management Sciences in China* 2001, 4(2): 63-66 (in Chinese)
- [10] Oren S S, Powell S G. Optimal supply of a depletable resource with a backstop technology: Hotelling's theorem revisited[J]. *Operations Research* 1985, 33(2): 277-292
- [11] Just R E, Netanyahu S, Olson L J. Depletion of natural resources, technological uncertainty, and the adoption of technological substitutes[J]. *Resource and Energy Economics* 2005, 27(2): 91-108
- [12] Lee D R, Orr D. The private discount rate and resource 'Conservation' [J]. *Canadian Journal of Economics* 1975, 8(3): 351-363
- [13] Chemak J M, Patrick R H. A microeconomic test of the theory of exhaustible resources[J]. *Journal of Environmental Economics and Management* 2001, 42(1): 82-103
- [14] 龚六堂. 动态经济学方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002: 245-257

[15] 蒋中一. 动态最优化基础[M]. 北京: 商务印书馆, 1999. 252–255

Chiang Alpha C. Elements of Dynamic Optimization[M]. Beijing: The Commercial Press, 1999. 252–255. (in Chinese)

## Study on dynamic optimal model of resource depletion under technological uncertainty

GE Shi-long<sup>1,3</sup>, ZHOU De-qun<sup>2,3</sup>, ZHOU Ming<sup>2</sup>

1. College of Management and Engineering, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210046, China

2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

3. Institute of Soft Energy Science, NUAU, Nanjing 210016, China

**Abstract** Uncertainty is one of the important research aspects. Technological uncertainty is often referred to when one studies in the field of resource substitute. By describing the case where the invention date is uncertain and considering the relation of extraction rate with extraction cost, the dynamic optimal model is built by using the idea of dynamic programming. HJB equation and optimal extraction path are found. The results show: the study of uncertainty often includes the situation of certainty; in the early stage of resource extraction, extraction rate of resources will increase with the probability of introduction of substitutable technology. But after a period of extraction, the case is reverse; the changing point of this relation is dependent on initial stock of resources. The larger the initial stock, the later the changing point of relation.

**Key words** exhaustible resources; backstop technology; producer surplus; dynamic optimization