

# 关键词拍卖中最优保留价的研究<sup>①</sup>

戎文晋<sup>1</sup>, 刘树林<sup>2</sup>

(1 百度在线网络技术(北京)有限公司, 北京 100080

2 对外经济贸易大学国际经济贸易学院, 北京 100029)

**摘要:** 研究了近年来在搜索引擎上广泛采用的一种广告形式——关键词拍卖。在关键词拍卖中如何设定每个关键词的保留价是搜索引擎在实践中向理论界提出的一个难题。通过建立一个可分单物品的拍卖模型来描述这种广告服务的销售机制, 进而利用最优机制理论推导出每个关键词最优保留价所满足的方程。这个结果是对 Riley 和 Samuelson 关于最优机制研究中的一个经典结论的推广, 并可直接用于实践。

**关键词:** 关键词拍卖; 保留价; 调整系数

**中图分类号:** F270 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)04-0029-09

## 0 引言

关键词拍卖, 国内通常称为竞价排名广告或关键词广告, 是近十年来搜索引擎发展起来的一种广告服务形式。它起源于 1998 年的 GoTo, 即后来雅虎的 Overture<sup>②</sup>。该商业模式一经面世, 就受到众多互联网公司的推崇, 很快成为互联网广告的主要利润来源<sup>[1]</sup>。2002 年, Google 改造了其中的拍卖机制, 成功地将所谓广义二阶价格拍卖 (generalized second price auction, GSP, 可参见文献 [2]) 转变为商业模式, 使其成为业界的一面旗帜。国内最大的搜索引擎百度在其广告中引进了该模式, 短短几年就成为国内最大的互联网企业之一。关键词拍卖成为了在互联网上应用最成功的经济机制之一, 它引入了歧视价格下的拍卖机制, 构造了一种优美的博弈结构, 引起了众多经济学家、广告学家和互联网领域专家的关注。

大多数关键词广告是这样设计的: 首先广告

主选择一组与其推广的产品相关的关键词, 比如出售电脑的广告主会选择“电脑”、“笔记本电脑”和“笔记本维修”等词汇, 每个广告主为每个关键词提供一个报价, 表示当搜索引擎的用户点击其广告时, 他愿意支付的最高单位价格<sup>③</sup>。当搜索引擎的用户检索一个关键词时, 搜索结果页面 (search engine results page, SERP) 上除了由搜索引擎的算法自动检索生成的内容外, 还会相应地展现一组有序的广告 (比如当用户搜索“笔记本电脑”一词时, 某搜索引擎的搜索结果页面见下面的图 1)。这些广告就是事先广告主选择该关键词并为其提交了报价的广告, 它们的排序也依赖于这些报价。在实践中大致有两种排序方式: 一是直接排序法, 即广告序列直接按报价的高低排序; 二是综合排序法, 即同时考虑广告主的报价和其它因素 (如广告的预期点击率或者与关键词的相关性) 给广告排序。现在大多数搜索引擎采用的是综合排序法。当用户点击了某个广告

① 收稿日期: 2007-10-12; 修订日期: 2009-10-09。

基金项目: 教育部人文社会科学十五规划资助项目。(01JA790063)。

作者简介: 戎文晋 (1973—), 男, 山西太原人, 博士。Email: rongwenjin@baidu.com

② GoTo 于 2003 年被 Yahoo! 收购, 其搜索业务整合成 Overture Services。2005 年, Yahoo! 再次重新定位市场, 改良品牌形象, 推出了 Yahoo! Search Marketing。

③ 当然这不一定是实际的支付, 但可以肯定的是实际的支付不会超过广告主的报价。

后, 其广告主向搜索引擎支付一定数额的广告费. 支付数额也有两种方式来确定: 首先就是上面提到的广义二阶价格 (GSP), 广告主支付次高

位广告主的报价; 其次是直接支付该广告主提交的报价, 即所谓的广义一阶价格 (generalized first price auction, GFP).

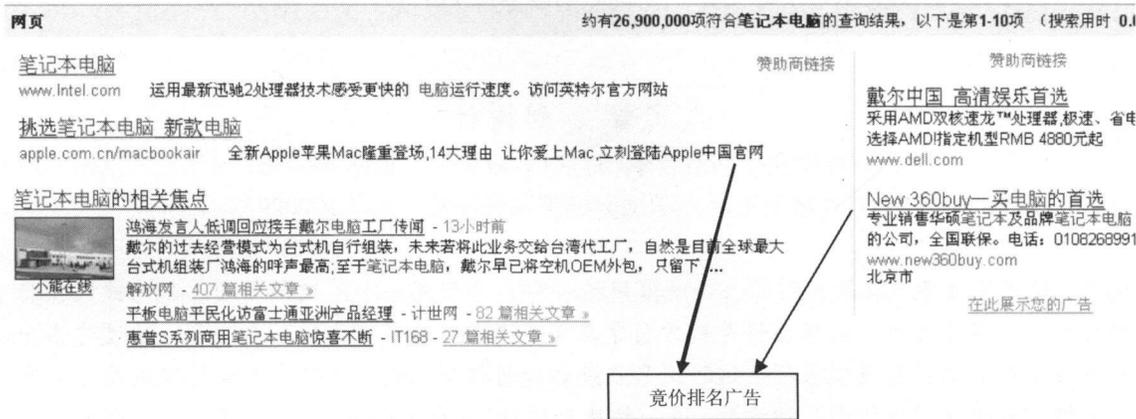


图 1 某搜索引擎关于“笔记本电脑”一词的搜索结果页面

Fig. 1 The interface for the search result for the keyword of “a notebook PC” by a search engine

当然, 在竞价排名广告的实践中, 还存在着这两种基本支付方式的各种变形, 比如, 很多搜索引擎采取的是支付次高位广告主的报价加一个最小的货币单位 (比如 0.01 元). 广告排名采取综合排序法的, 支付的数额也可能不仅与报价有关, 而且会与排序中使用的其它因素有关. 比如百度竞价排名广告中向广告主提供的综合指数中就融合了与广告主网页质量有关的一个变量——质量度.

从以上可以看出, 在关键词拍卖中, 广告主的报价反映了广告主对单位点击估价的私有信息, 而排序的方式决定了广告主对广告资源的预期分配和预期支付, 最后用户的点击使广告资源实现了分配, 而搜索引擎获得了相应的支付.

从博弈论的角度看, 关键词拍卖是一种连续的重复博弈, 所以就产生一个基本的问题: 在搜索引擎普遍使用的 GSP 机制下, 是否存在动态博弈的均衡? 很显然, GSP 机制并没有占优策略的均衡, 但存不存在其它均衡呢? Edeh an 等人<sup>[2]</sup>证明在 GSP 下存在一种有限制的均衡——局部无妒忌均衡 (locally envy-free equilibrium), 在这种均衡下, 广告主没有动机改变自己的排序. 这与 Varian<sup>[3]</sup>提出的对称的纳什均衡 (symmetric Nash equilibrium) 是等价的. Aggarwal<sup>[4]</sup>也作了类似的分析. 但是, 这些均衡的存在没有考虑到广告主的预算和搜索引擎对广告主设置的保留价等

现实情形. 当引入预算问题后, 以上均衡的性质将发生改变, 比如即使是 VCG 机制在预算情形下也失去了其讲真话 (truthful) 的性质. 事实上, 当广告主存在预算时, 并不存在一个非平凡的讲真话的机制<sup>[5]</sup>. 其它有关预算问题的重要文献还有文献 [6] 和文献 [7]. 而当存在保留价时, 上述均衡的性质也将发生变化, 其中文献 [8] 通过给每个广告位设定保留价而推广了文献 [4] 的结果, 文献 [9] 则假定每个广告主存在一个保留价, 推广了文献 [2] 中的结论.

关于如何从最优机制的角度出发来研究关键词拍卖中的最优保留价问题, 至今作者还没有看到. 事实上, 对搜索引擎来说, 如何为成千上万个关键词确定保留价格以使搜索引擎的收益最大化是个重要而基本的工作. 在理论上, Riley 和 Samuelson<sup>[10]</sup>在研究私有估价下单物品拍卖的最优机制时, 得出了一个关于最优保留价格的经典公式. 本文试图沿着这一思路, 考察在关键词拍卖的环境中, 如何为每一个关键词设定最优保留价格, 这无论在理论上还是在实践中都具有重要的意义.

在方法上, 本文将关键词拍卖抽象成一种可分单物品的拍卖. 这是因为对一次即将到来的点击而言, 其落在每个广告上面的概率和为 1, 这就相当于对“用户的点击”这一物品进行了分割. 关于可分物品的拍卖, 现有的大多数文献都关注

于不同支付方式对卖者收益的比较, 如 Wilson<sup>[11]</sup> 比较了单一物品拍卖 (unit auction) 与可分物品拍卖 (shares auction) 下的不同收益, Wang 和 Zender<sup>[12]</sup> 及 Hortacsu<sup>[13]</sup> 则分别从理论与实证的角度对比了在可分物品拍卖情况下统一价格 (uniform-price) 与歧视性价格支付 (discriminatory auction) 下的卖者收益. 在这些文献所研究的可分物品拍卖中, 每个竞价者都允许提交多个价格-数量偶, 即在不同价格水平下所需要的物品数量或份额. 这样, 机制的设计者事实上获得了每一个竞价者的需求曲线, 最优机制的设计依赖于这种需求曲线的结构. 一般来讲, 这会形成竞价者巨大的策略选择空间, 造成研究上的难点. 但是在关键词拍卖的情形下, 竞价的广告主却显示出了一种特殊的需求. 虽然他只被允许提交单一的价格, 但是却通过广告在结果页面上的排序而获得不同的预期点击率, 从而显示出了自己的需求. 这是与一般的可分物品拍卖不同的地方.

将关键词拍卖视为可分物品拍卖的一个文献是文献 [14], 他们将一个广告的预期展示 (page impressions) 视为资源 (resource), 而将搜索引擎可提供的总广告资源作为拍卖的物品, 研究了卖者 (即搜索引擎) 如何将这广告资源分成不同的份额并分配给不同广告主, 以实现自身收益的最大化. 他们还讨论了这种最优份额结构受其保留价的影响, 并在广告主的估价与其占有的份额呈线性的情形下指出了最优保留价的确定, 结论与文献 [10] 相同. 本文则将“用户的点击”视为广告资源, 研究搜索引擎如何确定保留价, 以使广告资源在广告主之间的分配给搜索引擎带来最大的收益. 之所以本文将“用户的点击”视为广告资源, 而不是“广告展示”, 是因为从搜索引擎来看, 只有用户点击才能带来收入.

国内对关键词拍卖等网上拍卖的研究目前还不是很丰富. 文献 [15] 对顾客投标行为进行了研究, 与本文从广告主的竞价行为出发进行研究很相似, 而文献 [16] 则针对在关键词拍卖中不同支付规则下搜索引擎的收益进行了比较.

本文的其它部分是这样安排的: 第 1 节对关键词拍卖的博弈结构进行了分析, 并在一定假设下将其抽象成一种可分单物品的拍卖模型. 第 2

节在这一框架下, 研究了广告主的均衡报价策略, 并由此得出了搜索引擎的收益. 第 3 节从最大化搜索引擎收益的角度出发, 推导出最优保留价所满足的方程, 并在一些具体的例子中刻画了最优保留价的计算及其随广告主人数量变化的规律. 第 4 节是结论与进一步研究的方向.

## 1 机制描述

为了探讨在关键词拍卖中最优保留价的决定因素, 需要对关键词拍卖的机制进行形式化地描述. 任何一个物品的销售机制都包括三个主要部分: 购买者对物品的估价、物品的分配规则和支付规则, 关键词广告也不例外. 本节就从这三个方面对关键词拍卖这一广告出售机制作合理地界定与描述.

首先假设存在  $n$  个参与竞价的广告主 (即竞价者, 本文不区分这两个词的含义), 用符号  $i = 1, \dots, n$  来表示. 因为通常来讲, 一个广告主在一个关键词下最多只能展示一个广告, 因而下文也用  $i = 1, \dots, n$  来表示相应的广告, 根据上下文, 读者并不难区分. 另外, 本文通篇都假定参与广告拍卖的每一方 (包括广告主和搜索引擎) 均为理性且风险中性的代理人, 即他们均按照预期收益的大小来确定自己的行为策略.

从广告主的角度来看, 当搜索引擎的用户提出一个查询的要求后, 广告主关注的是自己的广告链接能否被用户点击, 因此在按点击付费的机制下, 广告主的估价是对用户一次点击能给自己带来的平均收益的估计. 假设竞价者  $i$  的估价是  $x_i$ . 从搜索引擎的角度来讲, 它是个随机变量. 对此, 有如下假设:

**A1** 广告主的估价是对称的, 即每个广告主对一次点击的估价  $x_i$  都独立地服从一个相同的概率分布, 记这个分布的累积分布函数与相应的密度函数分别是  $F(x)$  和  $f(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

由假设 A1, 只须对一个典型广告主  $i$  的行为进行考察即可. 为简洁起见, 常常省略相应变量的下标  $i$ . 比如典型广告主  $i$  对一次点击所带来收益的真实估价是  $x$ .

**A2** 广告主的估价是私有信息, 即每个广

告主对一次点击的估价  $x$  是他的私人信息, 其它广告主与搜索引擎并不知道, 但是它所服从的概率分布是公共信息, 所有广告主和搜索引擎均是知晓的。

对于这样一个独立的私人估价模型, 文献 [10] 给出了不可分单物品的最优机制, 并确定了其最优保留价的计算方法。但是, 这一结果并不能直接使用在本文所述的机制中。这是因为当我们把用户的“一次点击”作为一个单物品拍卖时, 竞价者中的赢者并不一定会得到该物品 (也就是说, 即使排在最高位置的广告也不一定会被用户点击), 而是获得了一个取得该物品的概率 (即点击率)。因此, 本文实际上将关键词拍卖视为了可分单物品的拍卖, 它会产生多个赢者 (即多个广告主), 每个赢者获得该物品的一部分 (即广告主以一定的概率获得点击)。

与不可分单物品拍卖相比, 可分单物品拍卖的复杂性在于竞价者不仅需要向拍卖者报告他对物品的估价, 而且还要报告所需物品的份额。也就是说, 竞价者  $i$  需要向拍卖者显示自己的“需求曲线”——需求数量  $q_i$  和支付价格  $m_i$  之间的函数关系  $m_i = f(q_i)$ 。引言中指出, 在关键词拍卖中广告主以一种特殊的方式显示其对用户点击的需求。事实上, 对于广告主  $i$  来说, 他的实际支付价格  $m_i$  是由所有广告主的报价序列  $(b_i, b_{-i})$  决定的, 这里  $b_i$  是广告主自己的报价, 而  $b_{-i}$  是除广告主  $i$  外其它广告主的报价集合。另一方面报价序列  $(b_i, b_{-i})$  也确定了广告  $i$  的位置, 从而确定了广告  $i$  的预期点击率, 即需求物品的数量  $q_i$ 。因此, 广告主  $i$  通过下面的参数方程来向拍卖者显示自己对于用户点击的需求:

$$q_i = h(b_i, b_{-i}), m_i = g(b_i, b_{-i}), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

式中, 函数  $h(\cdot)$  就是物品的分配规则 (即广告在搜索结果页面上的排序方式),  $g(\cdot)$  是广告主的支付规则, 这对所有广告主均是相同的。

另一方面, 广告主的报价  $b_i$  是自己估价  $x$  的函数, 即

$$b_i = \beta_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

式中, 函数  $\beta_i(\cdot)$  又称为广告主  $i$  的策略。在这个

非合作的博弈中, 重要的是找到它的均衡策略, 所谓均衡策略见下面的定义 1:

定义 1 称函数  $\beta(\cdot)$  是关键词拍卖中广告主的均衡策略, 如果它满足:

- (1) 所有广告主都按照策略  $\beta(\cdot)$  报价, 即对所有的  $i$  均有  $\beta_i = \beta$
- (2) 当其它广告主按照策略  $b_{-i} = \beta(x_{-i})$  报价时, 任一真实估价为  $x$  的广告主  $i$  对此的最优反应是真实的显示自己的估价, 即其报价应该是  $b = \beta(x)$ 。

这样, 独立同分布的私有估价  $x$ , 均衡策略  $\beta(x)$  及需求曲线 (1) 式共同构成了关键词广告的出售机制。本文接下来将讨论如果在这一机制内增加一个变量: 保留价 (即广告主的最低估价), 那么对搜索引擎最优的保留价应该是多少? 如何确定? 为回答这个问题, 首先必须确定搜索引擎的收益是如何表达的。

## 2 搜索引擎的收益

本节考察在均衡时搜索引擎的收益。搜索引擎的收益来源于广告主的预期支付, 从而广告主的均衡策略将直接影响搜索引擎的收益。因此, 首先从广告主的均衡策略谈起<sup>[15]</sup>。

为简单起见, 本文假定搜索引擎有  $n$  个广告位出售, 即  $n$  个广告主匹配这  $n$  个广告位, 这并不影响本文所研究问题的适用性<sup>④</sup>。用符号  $j = 1, \dots, n$  来表示广告位。

先来看一个典型广告主  $i$  在这个机制中的理性选择。假定当其它广告主按照均衡策略报价时, 这个典型广告主  $i$  想通过隐瞒自己的真实估价来获得更多的收益, 因此他的报价是  $\beta(y)$ , 而不是  $\beta(x)$ 。此时, 他获得的预期点击率为

$$q(y) = \sum_{j=1}^n P_j(y) \cdot CTR_j \quad (2)$$

式中,  $P_j(y)$  是典型广告主  $i$  显示其估价为  $y$  时, 能获得第  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 个广告位的先验概率, 根据上面对广告主估价分布的假定, 对于所有广告位  $j = 1, \dots, n$ , 有

$$P_j(\cdot) = C_{n-1}^{n-j} F(\cdot)^{n-j} (1 - F(\cdot))^{j-1}$$

④ 很多学者会将关键词拍卖看成一种分配博弈, 比如文献 [3]。

式 (2) 的  $CTR_j$  是第  $j$  个广告位的点击率, 对此, 有下面的假设:

**A3** 点击率只与广告位置有关, 而与具体的广告无关, 而且每个广告位的点击率是一个共有知识.

在通常情况下, 广告主会通过互相学习, 逐渐改善其广告链接文字的描述和网页质量<sup>⑤</sup>, 从而广告位的点击率不会依赖于具体的广告.

此时, 广告主的支付不仅依赖于自己的报价, 也依赖于所有其它广告主的报价, 即  $M = M(\beta(y), \beta(x_{-i}))$ , 对广告主  $i$  来说, 这是个随机向量, 因此他的预期支付就可表示成

$$m(y) = E_{x_{-i}}[M(\beta(y), \beta(x_{-i}))] \quad (3)$$

即他知晓其它广告主估价序列  $x_{-i}$  的概率分布, 从而从平均意义上来对自己的支付进行估计. 此时, 这个隐瞒了自己真实估价  $x$  的典型广告主  $i$  的最优化问题是

$$\max_y U(y, x) = x \cdot q(y) - m(y) \quad (4)$$

$U(y, x)$  表示当广告主隐瞒自己的真实估价  $x$  而以  $\beta(y)$  参与报价时的收益. 为了获得最大的收益, 广告主需要确定如何选择  $y$ . 由定义 1 中的 (2) 可知, 因为  $b = \beta(x)$  是一个均衡策略, 因此当其他广告主按照均衡策略报价时, 典型广告主的最优反应应该是以  $\beta(x)$  报价, 所以  $y = x$  是最优化问题式 (4) 的解, 从而下面的一阶条件一定成立:

$$\frac{\partial U(y, x)}{\partial y} \Big|_{y=x} = x \cdot q'(x) - m'(x) = 0 \quad (5)$$

注意式 (5) 成立的前提是  $U(x, x) > 0$  (这是因为  $U(x, x) < 0$  意味着典型广告主显示其真实估价所得到的预期收益小于零, 此时理性的广告主不会参与报价). 记参与报价的广告主中最低可能的估价是  $x^*$ , 则一定有

$$U(x^*, x^*) = x^* \cdot q(x^*) - m(x^*) = 0 \quad (6)$$

成立. 这样, 当广告主的估价  $x$  大于  $x^*$  时, 微分方程式 (5) 成立, 结合边界条件式 (6), 可解得 (求解过程见附录)

$$m(x) = xq(x) - \int_{x^*}^x q(r) dr \quad (7)$$

这就是典型广告主  $i$  的预期支付.

广告主的预期支付就是搜索引擎的预期收益. 然而从搜索引擎的角度来看, 由式 (7) 得到的预期支付  $m(x)$  仍然是个随机变量, 因为搜索引擎并不知道广告主  $i$  的私有信息  $x$ . 但是搜索引擎知道它的分布, 所以他从这个典型广告主  $i$  处得到的预期收益是

$$\begin{aligned} R(x^*) &= E_x[m(x) | x \geq x^*] \\ &= \int_{x^*}^{\infty} [xq(x) - \int_{x^*}^x q(r) dr] f(x) dx \end{aligned}$$

经过简单的积分变换 (详细过程见附录) 得到

$$R(x^*) = \int_{x^*}^{\infty} \left[ x - \frac{1-F(x)}{f(x)} \right] q(x) f(x) dx \quad (8)$$

对于每一个真实估价大于  $x^*$  的广告主, 搜索引擎都能够从式 (8) 中确定相应的预期收入. 而真实估价大于  $x^*$  的广告主的人数对于搜索引擎来说是确定的, 因为这样的广告主都参与了报价, 作为拍卖方的搜索引擎能够获得关于拍卖过程的整体信息. 根据前面的设定, 总共有  $n$  个广告主参与了报价, 从而搜索引擎在一次博弈中从报价的广告主处得到的总收入是  $n$  乘以  $R(x^*)$ .

考虑另外一种极端情形, 所有广告主的真实估价均小于  $x^*$ , 即没有广告主参与该关键词的广告拍卖. 正像在古字画的拍卖中一样, 卖者持有字画从而获得了自己对该字画的估价, 搜索引擎此时也获得了持有该关键词的广告位的价值, 我们称之为持有价值, 记为  $x_0$ . 从表面上看, 广告位对搜索引擎来说是一种易腐品 (perishable 可见文献 [2]), 持有广告位是没有价值的, 即  $x_0 = 0$ . 然而, 持有广告位不出售至少能给搜索引擎带来下面两点益处: 第一、改善用户体验获得的好处. 从一定意义上讲, 搜索引擎出售多少广告位是在取悦搜索用户与满足广告客户之间的一种权衡. 没有广告的搜索页面当然更吸引搜索用户, 从而为搜索引擎的发展留下宝贵的用户资源; 第二、客户的广告预算大都是事先确定好的, 如果在 A 词上不能投放广告, 他常常会转移至 B

⑤ 事实上, 搜索引擎常常会对广告主进行网站优化的培训, 也会协助广告主选择关键词.

词或者在搜索引擎的其它广告系统下投放<sup>⑥</sup>，这可以称为持有该广告位的机会收益。所以，从实践上来讲，持有价值是一个正值，即  $x_0 > 0$ 。从本文的假定来看，发生这种情形的概率是  $F^n(x^*)$ 。所以，结合式(8)搜索引擎在一次博弈中获得的总预期收益是

$$T(x^*) = x_0 F^n(x^*) + n \int_{x^*}^{+\infty} \left[ x - \frac{1-F(x)}{f(x)} \right] \times q(x) f(x) dx \quad (9)$$

### 3 最优保留价

从上一节的式(9)可知，广告主的最低估价  $x^*$  在两个方面影响搜索引擎的总收益：一是影响广告位出售的概率  $F^n(x^*)$ ，从而确定搜索引擎是实现持有价值还是广告位价值；二是在积分的下限上影响广告主的支付价格。因此，对搜索引擎最优的  $x^*$  就是理论上他应该设定的最优保留价。本节将从理论上推导最优保留价的计算，并对其作应用上的分析。

根据最优化原理，对式(9)中的变量  $x^*$  微分，得

$$\frac{dT}{dx^*} = nx_0 F^{n-1}(x^*) f(x^*) - n \left[ x^* - \frac{1-F(x^*)}{f(x^*)} \right] \times q(x^*) f(x^*)$$

令  $\frac{dT}{dx^*} = 0$  则搜索引擎的最优保留价  $x^*$  应该满足下面这个方程<sup>⑦</sup>

$$x^* - \frac{1-F(x^*)}{f(x^*)} = A(x^*, n)x_0 \quad (10)$$

其中  $A(x^*, n) = \frac{F^{n-1}(x^*)}{q(x^*)}$ ，下文称之为调整系数。在讨论调整系数的意义之前，我们首先将以上的讨论总结成一个本文的主要定理：

**定理 1** 在风险中性和竞价者的估价是独立同分布的私人估价假设下，以预期收益最大化为导向的搜索引擎应该设定最优的保留价  $\max\{x_0, x^*\}$ ，其中  $x^*$  是方程(10)的解。

当  $A(x^*, n) = 1$  时，式(10)就简化为

$$x^* - \frac{1-F(x^*)}{f(x^*)} = x_0 \quad (11)$$

这就是文献[10]中的 PROPOSITION 3 得到的结果。调整系数  $A(x^*, n)$  的分子  $F^{n-1}(x^*)$  表示其它  $n-1$  个广告主的真实估价不超过  $x^*$  的概率，即真实估价为  $x^*$  的广告主成为最高估价的概率，而分母  $q(x^*)$  则表示真实估价为  $x^*$  的广告主获得一次点击的概率。对于不可分单物品来讲，这两者是一致的，即最高估价者必定以概率 1 获得拍卖的物品，即  $A(x^*, n) = 1$ 。但是在本文所述的关键词拍卖中，广告主的预期排名与预期获得点击机会之间是有差异的，即  $A(x^*, n)$  可能大于或小于 1。这是因为关键词拍卖中，广告是否获得点击是由外生因素(即搜索引擎的用户)随机确定的，因此具有随机支付的特征。这一随机支付的存在改变了搜索引擎在持有价值和广告位价值之间的权衡，相当于对其持有价值的一个调整，故称为调整系数。

由前面的式(2)和式(3)， $q(x)$  是点击率的加权和，权重是获得各广告位的概率  $P_j(x)$ ，

$$\sum_{j=1}^n P_j(x) = 1 \text{ 所以调整系数可完整的写成}$$

$$A(x, n) = \frac{F(x)^{n-1}}{\sum_{j=1}^n C_{n-1}^{n-j} F(x)^{n-j} (1-F(x))^{j-1} \cdot CTR_j} \quad (12)$$

这里为表述简洁，用  $x$  来替代  $x^*$ ，下同。

以下讨论一些具体的例子。首先记各广告位点击率组成的向量为  $CTR = (CTR_1, CTR_2, \dots, CTR_n)$ 。先看一种特殊情形， $CTR = (1, 0, \dots, 0)$ ，即广告主中只有一个赢者，他的广告位于最高位，并拥有百分之百的点击率，而其它广告主不会获得任何点击。此时，模型就退化成不可分物品的拍卖，有  $q(x) = F^{n-1}(x)$ ，从而  $A(x, n) = 1$ 。这就是文献[10]中的情形，最优保留价满足式(11)。

如果广告主的真实估价  $x$  服从  $[0, 1]$  上的均匀分布，即  $F(x) = x, f(x) = 1$  则式(10)就化

⑥ 比如 Google 存在着两套主要的广告投放系统：Adwords 和 AdSense。其中 Adwords 与本文所称的关键词拍卖类似，而 AdSense 则是将客户的广告投放到与 Google 签署协议的其它联盟网站上。

⑦ 这个方程常常会有多个解，这里说的最优保留价应该是通过以下步骤得到的：将每个解代入总收益的方程(9)，并比较它们之间的大小，从而获得最优的保留价。

简成

$$2x - 1 = \frac{x_0 x^{n-1}}{\sum_{j=1}^n C_{n-1}^{n-j} x^{n-j} (1-x)^{j-1} CTR_j} \quad (13)$$

当竞价者人数只有一人时<sup>⑧</sup>, 即  $n = 1$ , 由上式可以得到最优的保留价为

$$x^* = \frac{1}{2} + \frac{x_0}{2CTR_1}$$

这个结果要大于  $1/2$  大的程度与搜索引擎的持有价值成正比, 而与最高广告位置的点击率成反比。在实践中, 只有一个广告主竞价的关键词多数属于专业性强的词汇, 搜索量小, 其持有价值也小, 但点击率却很高, 从而最优保留价应略大于  $0.5$  这与古诺模型 [16] 或文献 [10] 中的结果有着内在的一致性。

如果再假定  $CTR = (0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06, 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 0.01)$ ,  $x_0 = 0.1$  这些量固定不变, 下表 1 与图 2 分别给出了在竞价者人数分别为 1 至 10 的情况下, 由式 (12) 确定的调整系数与由式 (10) 确定的最优保留价。

表 1 不同竞价者人数情形下的最优保留价与调整系数

Table 1 Optimal reserve prices and adjustment factors under different number of bidders

竞价者人数 $n$	最优保留价 $x^*$	调整系数 $A(x^*, n)$
1	1	10
2	1	10
3	1	10
4	0.660 2	3.204 2
5	0.559 5	1.189 5
6	0.526 5	0.530 1
7	0.512 9	0.257 2
8	0.506 5	0.130 7
9	0.503 4	0.068 4
10	0.501 8	0.036 6

图 2 中虚线表示式 (13) 左端的直线  $2x - 1$ , 而实线是式 (13) 右端的函数表达的曲线, 从上到下依次取  $n$  为 1 至 10, 虚线与实线的交点对应的横坐标就是定理 1 确定的最优保留价, 其数值

列在表 1 中。从表中还可以看出, 随着竞价者人数的增多, 调整系数  $A(x, n)$  迅速下降, 虽然无法从解析式 (12) 得到证明, 但这一结论对估价  $x$  的任意分布  $F(x)$  都是正确的。在经典的拍卖理论中, Riley 和 Samuelson 的结果常用古诺垄断模型解释 (譬如文献 [16]), 即方程式 (10) 左边就是卖者的边际收益, 而右边的项可解释成边际成本。类似地, 有

$$MR = x - \frac{1 - F(x)}{f(x)},$$

$$MC = x_0 A(x, n) = x_0 \frac{F^{n-1}(x)}{q(x)}$$

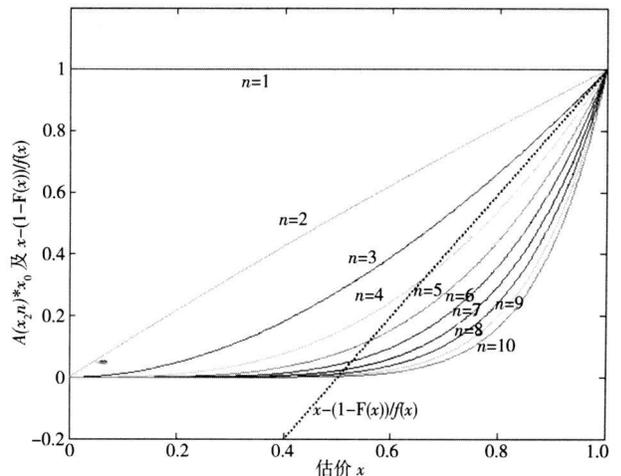


图 2 不同竞价者人数时最优保留价的确定

Fig. 2 Determination of optimal reserve price under different number of bidders

$MR$  和  $MC$  分别表示边际收益与边际成本。利用这些术语, 方程 (10) 意味着, 随着竞价者人数的增多, 搜索引擎的边际成本下降, 因为持有价值  $x_0$  在短期内是不会改变的。

## 4 结束语

本文对搜索引擎的关键词拍卖建立了一个可分单物品的拍卖模型, 并考察了广告主之间博弈的纳什均衡, 从搜索引擎的角度出发, 求得了最优保留价满足的方程。这一个结论能直接用于指导搜索引擎在关键词广告出售中的实践活动, 其

⑧ 这种情况在实践中并不是少见的, 广告主似乎总想避免竞争, 不断搜索没有广告主竞价的关键词, 以获得较低的点击价格和垄断地位。Muthukrishnan 等人证明广告主尽可能的选择便宜的关键词是他的一个最优策略或近似最优策略 [7]。

中广告主估价的分布和每个广告位上的点击率可以利用搜索引擎存储的历史数据和其它经验模拟而得到. 这一结论在理论上的意义是将文献 [10] 中的一个经典结论推广到可分物品拍卖中, 尽管只是在关键词拍卖这一特殊机制下得出的结论.

从本文的结论来看, 在关键词拍卖中, 搜索引擎的最优保留价与竞价者人数相关, 更进一步的猜想是, 两者呈负相关关系. 这可以成为我们下一步研究的方向.

本文的假设 A3 事实上并不是个紧的约束. 当广告的点击率不仅依赖于广告位, 而且依赖于具体放置在上方的广告时, 只要位置与广告对点击率的影响是可分离的, 即  $CTR_{ij} = CTR_{jh}(x_i)$ ,

这里  $h(x_i)$  是广告主  $i$  对点击率的影响因素, 则类似的结论仍然成立. 参见文献 [3] 和 [4] 对这个命题的讨论.

值得考虑的另外一个问题是, 本文只考虑了广告主在一个关键词下一次博弈的结果. 实际上, 只在一个关键词下作广告的广告主是极少的, 大多数广告主会提交几十甚至成百上千个关键词, 因此广告主的报价决策针对的是一组关键词, 而不是单一关键词. 这种情形下, 某个关键词的最优保留价将会受到另外一个关键词广告竞争的影响, 这有些类似于美国的频谱波段拍卖中, 竞价者在多个波段投标的情形 (见文献 [17]). 这是一个非常有现实意义的后续研究课题.

## 参 考 文 献:

- [1] Fain D C, Pedersen JO. Sponsored Search: A Brief History [C] // In Proceedings of the 2006 ACM Conference on Electronic Commerce, Ann Arbor, MI, 2006.
- [2] Edelman B, Ostrovsky M, Schwarz M. Internet advertising and the generalized second price auction: Selling billions of dollars worth of keywords [J]. The American Economic Review, 2007, 97(1): 242-259.
- [3] Varian H R. Position auctions [J]. International Journal of Industrial Organization, 2007, 25(6): 1163-1178.
- [4] Aggarwal G, Goel A, Motwani R. Truthful Auctions for Pricing Search Keywords [C] // In Proceedings of the 2006 ACM Conference on Electronic Commerce, Ann Arbor, MI, 2006.
- [5] Bongs C, Chayes J, Immorlica N, et al. Multi Auctions With Budget Constrained Bidders [C] // In Proceedings of the 2005 ACM Conference on Electronic Commerce, Vancouver, BC, Canada, 2005.
- [6] Abrams S Z. Revenue Maximization When Bidders Have Budgets [C]. Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Miami, Florida, 2006.
- [7] Mehta A, Saberi A, Vazirani U, et al. Adwords and generalized online matching [J]. J ACM, 2007, 54(5): 22.
- [8] Gonen R, Vassilvitskii S. Sponsored Search Auctions with Reserve Prices: Going Beyond Separability [C] // In Internet and Network Economics, 4th International Workshop, WINE 2008, Shanghai, China, December 17-20, 2008, Christos H. Papadimitriou, Shuzhong Zhang (Eds.): Springer 2008, 597-608.
- [9] Even-Dar E, Fekman J, Mansour Y, Muthukrishnan S. Position Auctions with Bidder Specific Minimum Prices [C] // In Internet and Network Economics, 4th International Workshop, WINE 2008, Shanghai, China, December 17-20, 2008, Christos H. Papadimitriou, Shuzhong Zhang (Eds.): Springer 2008, 577-584.
- [10] Riley J G, Samuelson W F. Optimal auctions [J]. The American Economic Review, 1981, 71(3): 381-392.
- [11] Wilson R. Auction of shares [J]. Quarterly Journal of Economics, 1978, 93(4): 675-689.
- [12] Wang J, Zender J. Auctioning divisible goods [J]. Economic Theory, 2002, 19(4): 673-705.
- [13] Hortacsu A. Mechanism Choice and Strategic Bidding in Divisible Good Auctions: An Empirical Analysis of the Turkish Treasury Auction Market [R]. Working Paper, 2002.
- [14] Chen Jianqing, Liu De, Whinston A B. Designing Share Structure in Auctions of Divisible Goods [C]. The ACM Conference on Electronic Commerce (EC'05), June 5-8, 2005, Vancouver, British Columbia, Canada, 2005.
- [15] 杜黎, 胡奇英. 一类网上英式拍卖: 顾客投标行为研究 [J]. 管理科学学报, 2006, 9(3): 31-38.  
Du Li, Hu Qiying. Study on bidding strategies in online auctions [J]. Management Sciences in China, 2006, 9(3): 31-38. (in Chinese)
- [16] 张娥, 汪应洛. 关键字广告位拍卖的收益等价性研究 [J]. 中国管理科学, 2006, 14(3): 92-96.

Zhang E, Wang Yingluo. Revenue equivalence for adwords auction[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(3): 92-96 (in Chinese)

[17] Wolfstetter E. Topics in Microeconomics: Industrial Organization, Auction, and Incentives[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999

## Study on optimal reserve price of keyword auctions

RONG Wen-jin<sup>1</sup>, LIU Shu-lin<sup>2</sup>

1. Baidu Online Network Technology (Beijing) Co., Ltd. Beijing 100080, China

2. School of International Trade and Economics, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China

**Abstract** This paper studies a form of advertising—keyword auction, which is widely used by search engines in recent years. In practice, how to set reserve prices for each keyword is a difficult problem. This paper adopts a divisible single-object auction to model the selling mechanism of the advertising and obtains a mathematical equation about optimal reserve price for search engine. The conclusion generalizes a classic result given by Riley and Samuelson and can be used in practice of search engine directly.

**Key words** keyword auction; reserve price; adjustment coefficients

附录:

式(7)和式(8)的证明

由式(5), 有

$$m'(x) = x \cdot q'(x)$$

对上式两边从  $x^*$  到  $x$  积分, 得

$$m(x) - m(x^*) = \int_{x^*}^x r \cdot q'(r) dr = xq(x) - x^*q(x^*) - \int_{x^*}^x q(r) dr$$

由式(6), 可知  $U(x^*, x^*) = x^* \cdot q(x^*) - m(x^*) = 0$  即

$$m(x) = xq(x) - \int_{x^*}^x q(r) dr$$

这就是式(7). 注意到这里  $x$  是累积分布函数为  $F(x)$  的随机变量, 对上式两端在  $x \geq x^*$  的条件下求期望, 得

$$\begin{aligned} R(x^*) &= E_x[m(x) | x \geq x^*] \\ &= \int_{x^*}^{+\infty} xq(x)f(x) dx - \int_{x^*}^{+\infty} \left[ \int_{x^*}^x q(r) dr \right] \cdot f(x) dx \\ &= \int_{x^*}^{+\infty} xq(x)f(x) dx - \int_{x^*}^{+\infty} q(r) dr \cdot F(x) \Big|_{x^*}^{+\infty} + \int_{x^*}^{+\infty} F(x) \cdot q(x) dx \\ &= \int_{x^*}^{+\infty} [xf(x) - 1 + F(x)] \cdot q(x) dx \\ &= \int_{x^*}^{+\infty} \left[ x - \frac{1 - F(x)}{f(x)} \right] f(x) \cdot q(x) dx \end{aligned}$$

证毕.