

基于无损卡尔曼滤波的 HJM 模型及实证研究^①

杨宝臣, 苏云鹏

(天津大学管理学院, 天津 300072)

摘要: 在多因子 HJM 框架下, 将一类具有特定波动率结构设定的非马尔可夫远期利率模型转化为马尔可夫模型, 并将其表示成状态空间模型形式. 进一步, 引入基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法对 HJM 模型进行估计, 解决了模型非线性和潜在状态变量的问题. 实证研究中, 基于上海银行间同业拆放利率 (SHIBOR) 期限结构的实际动态特性, 对 HJM 模型的波动率结构进行相应的设定, 并引入随机市场风险价格, 构建了 SHIBOR 期限结构的三因子 HJM 模型. 结果表明, 三因子 HJM 模型可以很好的刻画 SHIBOR 期限结构的动态特性和波动率结构, 水平因子和斜率因子是驱动 SHIBOR 利率系统的主要因素.

关键词: HJM 模型; 无损卡尔曼滤波; 极大似然估计; 上海银行间同业拆放利率

中图分类号: F830.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)04-0067-09

0 引言

Heath-Jarrow-Morton(HJM)^[1]模型对于利率期限结构建模具有很好的灵活性. 然而, HJM 模型波动过程的非马尔可夫性, 模型的非线性以及基础状态变量的不可观测性, 使得 HJM 模型的估计十分困难, 很难应用于实际问题. 虽然文献[2-13]等从不同角度考虑了 HJM 模型的马尔可夫转化问题, 简化了计算复杂性, 但模型非线性以及潜在状态变量的问题依然存在.

文献表明, 基于卡尔曼滤波(Kalman^[14])的极大似然估计是随机模型估计的理想方法^[15], 可以将潜在状态变量作为不可观测变量来正确处理. 迄今为止, 已有文献[16-21]对卡尔曼滤波在利率期限结构模型估计上的应用作了研究. 然而以上文献主要研究的是均衡模型框架下基于卡尔曼滤波或扩展卡尔曼滤波(EKF^[21])的期限结构模型估计方法, 虽然对于线性或弱非线性且满足正态分布假设的期限结

构模型估计效果比较令人满意, 但是对于强非线性且不满足正态分布假设的期限结构模型估计效果就不甚理想. 这是由于 EKF 只是通过将非线性系统简单地线性化并且假定线性化后的系统仍服从正态分布, 从而使得传统卡尔曼滤波得以应用. 如此引入的线性化误差在系统强非线性或非正态条件下, 会严重影响模型估计效果. 而无损卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF^[23])基于确定性采样(UT 变换)得到一组 Sigma 点, 进而通过非线性的状态更新方程和观测校正方程得到系统状态的均值和协方差的估计, 避免了线性化误差, 因此较 EKF 更为准确和稳定.

鉴于以上原因, 本文在多因子 HJM 框架下, 将一类具有特定波动率结构设定的非马尔可夫远期利率模型转化为马尔可夫系统, 并在对得到的马尔可夫系统利用状态空间模型进行表示的基础上, 引入基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法对 HJM 模型进行估计, 进而解决了模型非线性和潜在状态变

① 收稿日期: 2008-12-16 修订日期: 2009-12-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471051, 70771075); 教育部博士点基金资助项目(200800560032); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-08-0397).

作者简介: 杨宝臣(1966-), 男, 河北唐山人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: hdyang@tju.edu.cn

量的问题.此外,本文基于上海银行间同业拆放利率(SHIBOR)期限结构的实际动态特性,对HJM模型的波动率结构进行了相应的设定,并引入了随机市场风险价格,构建了SHIBOR市场利率期限结构的三因子HJM模型,进而对SHIBOR市场利率期限结构进行了实证研究,重点分析了SHIBOR市场的波动率结构.

1 HJM 利率期限结构模型框架

以HJM模型作为利率期限结构模型的一般框架,设定现实概率条件下瞬时远期利率 $r(t, x)$ (即在时刻 t 商定的到期时刻为 $t+x$ 的瞬时拆入或拆出利率)满足以下随机微分方程^②:

$$dr(t, x) = \sigma(t, t+x)'[\bar{\sigma}(t, t+x) - \phi(t)]dt + \sigma(t, t+x)'dW(t) \tag{1}$$

其中, $\bar{\sigma}(t, t+x) = \int_t^{t+x} \sigma(t, u) du$, $W(t)$ 为现实概率测度 P 下 I 维独立标准维纳过程向量($I \in N_+$),而 $\sigma(t, x)$, $\phi(t)$ 分别为与 $dW(t)$ 相关的波动率向量和市场风险价格向量.一般地, σ 和 ϕ 均依赖于某些远期利率 $r(t, x)$ ^③.

文献[10]与[13]提出了如下一种可以使得很大一类随机模型马尔科夫化的波动率设定:

假定 1.1 1) 对任意 $1 \leq i \leq I$ 存在 $L_i \in N$ 使得远期利率波动率向量的元素 σ_i 具有以下形式

$$\sigma_i(t, x) = \sum_{l=1}^{L_i} c_{il}(t) \sigma_{il}(x) \tag{2}$$

其中 $c_{il}(t)$ 为随机变量, $\sigma_{ij}(x)$ 为确定性函数.

2) 存在 $M \in N$ 和数列 $x_1 < x_2 < \dots < x_M \in R_+$ 使得随机变量 $c_{il}(t)$ 具有以下形式

$$c_{il}(t) = \hat{c}_{il}(t, r(t, x_1), \dots, r(t, x_M)) \tag{3}$$

其中 \hat{c} 依赖于其自变量.

文献[13]证明了远期利率曲线可以表示为 N 个离散远期利率 $r(t, \tau_1, \dots, \tau_N) = [r(t, \tau_1), \dots, r(t, \tau_N)]'$ 的仿射函数.这一组远期利率构成了一个马尔科夫过程.从真实的风险市场角度出发,若以 $\phi =$

$(\phi_1, \dots, \phi_I)'$ 表示与维纳过程 $W(t)$ 有关的市场风险价格向量,瞬时远期利率服从的随机微分方程系统可以化为^④

$$dr(t, x) = [p_0(t, x, \tau_1, \dots, \tau_N) + p'(t, x, \tau_1, \dots, \tau_N) \times r(t, \tau_1, \dots, \tau_N) - \phi' \sigma(t, t+x)] dt + \sigma(t, t+x)' dW(t) \tag{4}$$

通过下式即可由瞬时远期利率得到到期时刻为 $t+x$ 的零息债券到期收益率 $y(t, x)$

$$y(t, x) = \frac{1}{x} \int_0^x r(t, u) du \tag{5}$$

由式(5)可知,到期收益率 $y(t, x)$ 也可以表示为远期利率的仿射函数,形式如下

$$y(t, x) = q_0(t, x, \tau_1, \dots, \tau_N) - q'(t, x, \tau_1, \dots, \tau_N) r(t, \tau_1, \dots, \tau_N) \tag{6}$$

其中, $q_i(t, x, \tau_1, \dots, \tau_N)$ 为一组确定性函数^⑤.这样就得到了一个仿射期限结构模型.

2 基于无损卡尔曼滤波的估计方法

2.1 无损卡尔曼滤波

非线性系统可表示为如下形式:

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k), w(t_k)) \tag{7}$$

$$z(t_{k+1}) = h(x(t_{k+1}), v(t_{k+1})) \tag{8}$$

其中, $x(t_{k+1})$ 和 $z(t_{k+1})$ 分别为状态向量和观测向量, f 和 h 分别为非线性的状态更新函数和观测函数, $w(t_k)$ 和 $v(t_{k+1})$ 分别为过程噪声和观测噪声,均为均值为0的高斯白噪声,而 $u(t_k)$ 为最优控制输入.

在UKF算法中,由于具有噪声项,需要对状态进行扩维处理^[23].针对式(7)和(8)定义的系统,令 $x^a = [x^T \ v^T \ w^T]^T$,则具体算法流程如下.

状态初始条件为

$$\hat{x}_0 = E(x_0) \tag{9}$$

$$P_0 = E((x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T) \tag{10}$$

状态的初始条件扩维,即

② 随机微分方程系引入市场风险价格 $\phi(t)$ 后的现实概率测度 P 下HJM模型形式,参见文献[124].

③ $r(t, 0)$ 表示瞬时短期利率,下文简记为 $r(t)$.

④ 系数函数 p_0 和 p 的具体形式请参阅文献[13].

⑤ 系数函数 q_i 的具体形式请参阅文献[13].

$$\hat{x}_0^a = E(x_0^a) = [\hat{x}_0; 0; 0] \quad (11)$$

$$P_0^a = E((x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (12)$$

1) Sigma 点采样

采用某种采样策略, 得到 t_j 时刻状态估计的 Sigma 点集 $\{\chi_i^a(t_j | t_j)\}$, $i = 1, \dots, L$, 其中 L 为所采用的采样策略的采 Sigma 点个数。需要注意的是, 此时的状态维数为 $n + q + m$ 。 χ_i^x 为粒子 χ_i^a 的前 n 维组成的列向量, χ_i^v 为粒子 χ_i^a 的 $n + 1$ 维到 $n + q$ 维组成的列向量, χ_i^w 为粒子 χ_i^a 的 $n + q + 1$ 维到 $n + q + m$ 维组成的列向量。

2) 状态更新方程

$$\chi_i^x(t_{j+1} | t_j) = f[\chi_i^x(t_j | t_j), u(t_j), \chi_i^v(t_j)] \quad (13)$$

$$\hat{x}(t_{j+1} | t_j) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m \chi_i^x(t_{j+1} | t_j) \quad (14)$$

$$P(t_{j+1} | t_j) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (\chi_i^x(t_{j+1} | t_j) - \hat{x}(t_{j+1} | t_j)) \times (\chi_i^x(t_{j+1} | t_j) - \hat{x}(t_{j+1} | t_j))^T \quad (15)$$

$$z_i(t_{j+1} | t_j) = h[\chi_i^x(t_{j+1} | t_j), u(t_j), \chi_i^w(t_{j+1} | t_j)] \quad (16)$$

$$\hat{z}(t_{j+1} | t_j) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m z_i(t_{j+1} | t_j) \quad (17)$$

$$P_w(t_{j+1} | t_j) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (z_i(t_{j+1} | t_j) - \hat{z}(t_{j+1} | t_j)) \times (z_i(t_{j+1} | t_j) - \hat{z}(t_{j+1} | t_j))^T \quad (18)$$

$$P_{xw}(t_{j+1} | t_j) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (\chi_i^x(t_{j+1} | t_j) - \hat{x}(t_{j+1} | t_j)) \times (z_i(t_{j+1} | t_j) - \hat{z}(t_{j+1} | t_j))^T \quad (19)$$

3) 观测校对方程

$$K_{j+1} = P_{xw}(t_{j+1} | t_j) P_w^{-1}(t_{j+1} | t_j) \quad (20)$$

$$\hat{x}(t_{j+1} | t_{j+1}) = \hat{x}(t_{j+1} | t_j) + K_{j+1} (z(t_{j+1}) - \hat{z}(t_{j+1} | t_j)) \quad (21)$$

$$P(t_{j+1} | t_{j+1}) = P(t_{j+1} | t_j) - K_{j+1} P_w(t_{j+1} | t_j) K_{j+1}^T \quad (22)$$

其中, $\hat{x}(t_{j+1} | t_j)$ 和 $P(t_{j+1} | t_j)$ 分别为 t_j 时刻状态

向量及协方差矩阵校正前估计, $\hat{x}(t_{j+1} | t_{j+1})$ 和 $P(t_{j+1} | t_{j+1})$ 则分别为 t_j 时刻状态向量及协方差矩阵校正后估计。 $P_w(t_{j+1} | t_j)$ 和 $P_{xw}(t_{j+1} | t_j)$ 分别为 t_j 时刻观测向量协方差矩阵以及状态向量与观测向量的互协方差矩阵校正前估计。 K_{j+1} 为 t_{j+1} 时刻滤波增益, 而 W^m 和 W^c 分别为均值和协方差估计所用 Sigma 点权重。 本文采用的是比例修正对称采样策略^[23], 具体请参阅相关文献。

2.2 基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计方法

令远期利率向量 $r(t, x) = r(t, \tau_1, \dots, \tau_N)$, 则由(4)和(6)可知 HJM 框架下利率期限结构的状态空间模型具有以下连续状态方程:

$$dr(t, x) = [p_0(t, x) + p'(t, x)r(t, x) - \phi'\sigma(t, x)]dt + \sigma(t, x)'dW(t) \quad (23)$$

以及离散观测方程:

$$z(t_j) = C(t_j)r(t_j, x) + e(t_j) \quad (24)$$

其中, $j = 0, 1, \dots, J, \mu$ 和 g_i 为非线性函数, $r(t, x) \in \mathbb{R}^d$ 为 t 时刻的远期利率状态向量, $z_j \in \mathbb{R}^r$ 为时刻 t_j 的观测向量, W 为 m 维维纳过程, 而观测误差项 $\{e(t_j) : e(t_j) \sim N(0, Q), j = 0, \dots, J\}$ 是一组独立同分布的随机向量。

由式(23)可知, 状态方程有如下离散形式:

$$r(t_{j+1}) = a(t, x) + b(t, x)r(t_j) + \eta(t_{j+1}) \quad (25)$$

其中, 状态误差项 $\{\eta(t_j) : \eta(t_j) \sim N(0, P), j = 0, \dots, J\}$ 是一组独立同分布的随机向量。

取远期利率状态向量的初值和初始条件协方差为其无条件均值 r_0 和无条件协方差 P_0 , 则即可对式(25)和(24)组成的非线性状态空间系统运用 UKF, 从而基于观测误差产生待估参数向量 θ 的对数极大似然函数。 其基本思路如下:

令 $\hat{r}(0) = r_0, \hat{P}(0) = P_0$, 则状态向量和观测向量的预测方程为

$$\hat{r}(t_{j+1} | t_j) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m f[\chi_i^x(t_j | t_j), 0, \chi_i^v(t_j)] \quad (26)$$

$$\hat{z}(t_{j+1} | t_j) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^m h[\chi_i^x(t_{j+1} | t_j), 0, \chi_i^w(t_{j+1} | t_j)] \quad (27)$$

预测值的条件协方差分别为

$$P(\xi_{t+1} | \xi_t) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (\bar{X}_i(\xi_{t+1} | \xi_t) - \hat{r}(\xi_{t+1} | \xi_t)) \times (\bar{X}_i(\xi_{t+1} | \xi_t) - \hat{r}(\xi_{t+1} | \xi_t))^T \quad (28)$$

$$P_w(\xi_{t+1} | \xi_t) = \sum_{i=0}^{L-1} W_i^c (z_i(\xi_{t+1} | \xi_t) - \hat{z}(\xi_{t+1} | \xi_t)) \times (z_i(\xi_{t+1} | \xi_t) - \hat{z}(\xi_{t+1} | \xi_t))^T \quad (29)$$

其中, $z_i(\xi_{t+1} | \xi_t) = h[\bar{X}_i(\xi_{t+1} | \xi_t), 0, \bar{X}_i(\xi_{t+1} | \xi_t)]$.

令 v_j 为观测误差项 $e(\xi_t)$ 的估计值, 则有

$$v_{j+1} = z(\xi_{t+1}) - \hat{z}(\xi_{t+1} | \xi_t) \quad (30)$$

由于 UKF 无需对非线性系统进行强制线性化, 不会改变随机系统的原有分布特性, 因此可假定 v_j 服从正态分布, 其关于待估参数向量 θ 的对数似然函数具有如下形式

$$L_z(\theta) = -\frac{dJ}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} \ln |P_w(\xi_{t+1} | \xi_t)| - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} v_{j+1}^T P_w^{-1}(\xi_{t+1} | \xi_t) v_{j+1} \quad (31)$$

其中, d 是观测向量的维数, J 为观测值个数,

$P_w(\xi_{t+1} | \xi_t)$ 为 UKF 中 ξ_{t+1} 步协方差矩阵校正前估计.

通过极大化对数似然函数即可求出模型参数估计值, 即

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L_z(\theta) \quad (32)$$

由于随机系统的估计过程存在着系统稳定性、矩阵求导、最优估计方法收敛性以及估计值显著性等方面的困难, 因此本文使用遗传算法^[25] (genetic algorithm, GA) 来极大化对数似然函数以得到模型参数估计值, 这是因为遗传算法作为一种全局寻优算法, 与传统的优化算法相比, 具有运算量小、普适性强、稳定性好以及可操作性强等优点^[26-27].

3 SHIBOR 市场的三因子 HJM 模型

3.1 数据分析

选取 2006 年 10 月 8 日至 2008 年 6 月 27 日的每日 SHIBOR 数据对我国银行间市场收益率曲线进行估计分析. 该数据中包含银行间隔夜、7 天、

14 天、30 天、90 天、180 天、270 天以及 1 年期拆借利率数据. 以上数据来源于上海银行间同业拆放利率官方网站: <http://www.shibor.org/shibor/web/ShiborIsQuery.jsp> 首先将初始的 SHIBOR 利率数据转化为等价的连续复利, 进而对 SHIBOR 市场的利率期限结构进行主成分分析. 结果显示, 各期限利率的变动趋势可以由前 3 个主成分解释, 且解释比例高达 97.18%. 鉴于此, 表 1 中只列出了前 3 个主成分关于各期限利率的系数.

表 1 前 3 个主成分系数

Table 1 Coefficients for the first three principal components

	主成分 1	主成分 2	主成分 3
O/N	0.233 897	0.443 335	0.734 184
1W	0.299 839	0.436 572	0.141 389
2W	0.316 545	0.408 005	-0.379 29
1M	0.348 271	0.309 113	-0.531 26
3M	0.400 089	-0.291 04	0.025 466
6M	0.395 354	-0.303 76	0.076 265
9M	0.396 405	-0.301 48	0.076 482
1Y	0.400 478	-0.288 06	0.050 713

由表 1 可看出, 第一主成分关于各期限利率的系数均为正且大小大致相等, 因此第一主成分可理解为期限结构的总体变动趋势因素, 也即水平因子; 第二主成分关于较短期限利率的系数均为正, 而关于较长期限利率的系数均为负, 且绝对值大小大致相等, 因此第二主成分可理解为较短期限利率与较长期限利率之间的利差因素, 也即期限结构的斜率因子; 而第三个主成分关于各期拆借利率的系数呈现一个“U”形, 显示该因素对短期和长期利率是同向(为正)的, 而对中期利率是负向的, 这个主成分解释了利率曲线的曲率变化, 可认为是曲度变化因素, 也即扭曲因子.

3.2 模型设定

鉴于上节数据分析结果, 在式(1)设定中使用三维维纳过程, 相应的波动率函数如下:

$$\sigma_1(t, x) = \gamma_1 r^\lambda(t) \quad (33)$$

$$\sigma_2(t, x) = \gamma_2 e^{-k_2(x-t)} \quad (34)$$

$$\sigma_3(t, x) = \gamma_3(x-t)e^{-k_3(x-t)} \quad (35)$$

第一个波动率函数 $\sigma_1(t, x)$ 依赖于短期利率

水平, 因此可理解为水平因子; 第二个波动率函数 $\sigma_2(t, x)$ 反映出随机波动对收益率曲线的冲击随期限的增加而衰减, 因此可理解为斜率因子; 而第三个波动率函数 $\sigma_3(t, x)$ 可以对收益率曲线产生驼峰冲击, 因此可看作是扭曲因子。

目前已有的文献假定市场风险价格依赖于利率水平, 但由于无法确定这种依赖关系的具体函数形式, 因此总是将其设定为便于利率建模的函数形式。然而, 从另一个角度来看, 由于利率服从伊藤过程, 因此若市场风险价格依赖于利率水平,

也应服从伊藤过程。基于此, 本文并不给出市场风险价格的具体函数形式, 而是假定其服从以下随机微分方程:

$$d\phi_i = \alpha_i(\bar{\phi}_i - \phi_i) dt + \beta_i \sqrt{\phi_i(t)} dW_i(t) \tag{36}$$

容易看出, 该设定使得不同利率风险的市场价格总为正值且收敛于其长期均衡值。

3.3 实证结果

基于选取的 SHIBOR 数据按照上文介绍的方法对模型进行估计, 结果如下:

表 2 三因子 HJM 模型参数估计结果

Table 2 Estimated parameter values for the three-factor HJM model

参数	γ_1	γ_2	γ_3	λ	k_2	k_3	α_1	α_2
估计值	0.6291*	0.0043*	0.0007	1.2357	0.0546	0.0763*	8.2764*	12.4762
标准差	0.0352	0.0014	0.0003	0.0436	0.0003	0.0004	0.0530	0.0641
参数	α_3	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\phi}_2$	$\bar{\phi}_3$	β_1	β_2	β_3	$2\ln L_2$
估计值	12.7211*	36.6274*	12.4963*	0.5431*	3.2473	5.4784*	2.3851*	16.2715
标准差	1.7164	0.0829	0.0253	0.0914	0.0671	0.0925	0.4489	

注: “*”表示参数在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 条件下显著。

由表 2 可以看出, 模型参数估计值在统计上均显著, 且由估计值的标准差可知本文所引入的基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法具有很强的鲁棒性。

基于以上模型参数估计值, 即可求出三因子 HJM 模型下各期限 SHIBOR 利率的估计值, 具体情况如表 3 所示。

表 3 各期限 SHIBOR 利率估计误差统计量

Table 3 Summary statistics for prediction errors of SHIBOR rates with various maturities

	误差均值	误差标准差	绝对误差均值	绝对误差标准差
隔夜	5.93	17.76	13.12	13.35
7天	4.51	19.14	12.47	14.62
14天	3.97	22.61	11.85	16.40
30天	3.38	21.80	12.51	18.16
90天	3.42	19.44	10.69	15.77
180天	2.83	11.86	8.74	10.64
270天	1.76	4.29	4.52	3.37
1年	1.47	3.24	2.47	2.51

注: 表中数据均以基点为单位。

由表 3 可知, 各期限 SHIBOR 利率的估计误差和标准差均很小, 表明本文所设定的三因子 HJM 模型可以很好的刻画 SHIBOR 利率期限结构

的动态特性, 且模型估计方法是有效的。

图 1 给出了样本期内瞬时短期利率波动率变动情况:

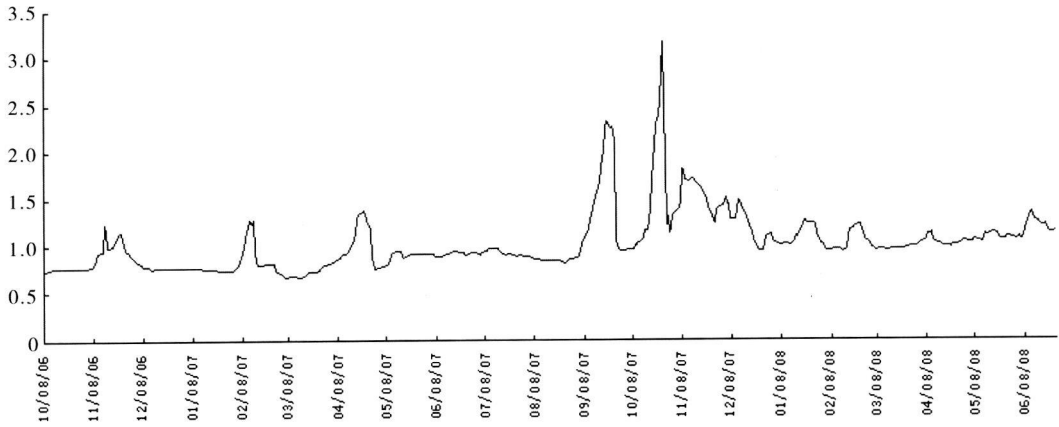


图 1 瞬时短期利率波动率

Fig 1 The instantaneous volatility of the short rate

由图 1 所示, 样本期内模型的瞬时短期利率波动率均值为 1.03%。在 2007 年 9 月 8 日到 2008 年 1 月 8 日期间, 瞬时短期利率波动率明显增大, 意味着利率波动比较剧烈; 而其他时间段内瞬时

短期利率波动率比较稳定且较小, 意味着利率波动相对比较平缓。

图 2 给出了三因子各自对总的瞬时短期利率波动率的贡献百分比变动情况。

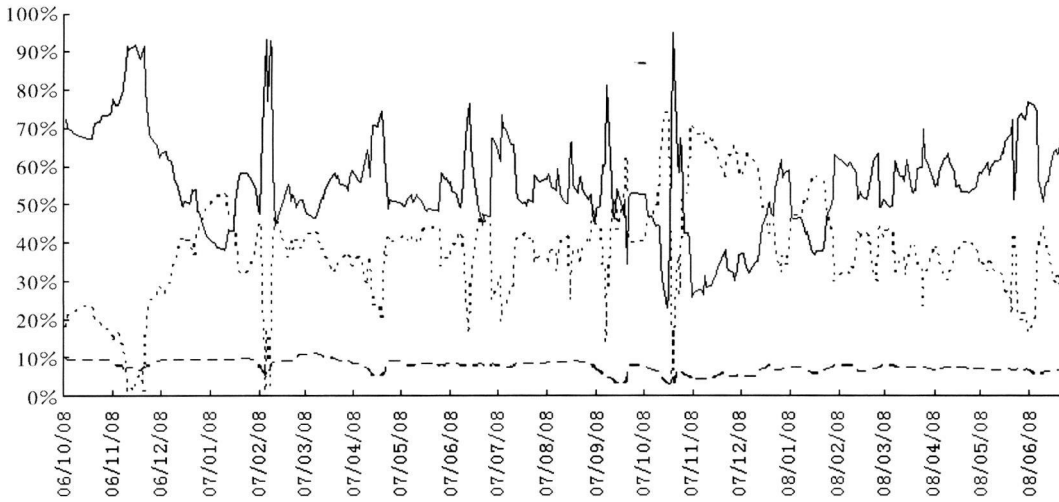


图 2 各因子对总的瞬时短期利率波动率的贡献百分比

Fig 2 Contribution of each factor to the total short rate variation

其中, 实线为水平因子对总的瞬时短期利率波动率的贡献百分比, 点线为斜率因子对瞬时短期利率波动率的贡献百分比, 间断线为扭曲因子对瞬时短期利率波动率的贡献百分比。

因子只解释了总波动率的 7.34%。

由图 2 所示, 各波动因子对于瞬时短期利率波动率的贡献具有显著差别, 并且是时变的。水平因子和斜率因子解释了瞬时短期利率波动率的绝大部分, 也即 92.66%, 其中水平因子解释部分为 55.26%, 斜率因子解释部分为 37.40%。而扭曲

进一步, 本文研究了各因子的波动风险溢酬随着时间的变动情形。波动率增大, 风险就会增大, 这就要求利率变动的漂移项减小, 相应使得债券价格变动的漂移项增大, 从而补偿投资者所承担的更大风险。此补偿称为风险溢酬, 可以由波动乘以其对应的市场风险价格来衡量。图 3 给出了各波动因子对于总的风险溢酬的贡献百分比变动情况。

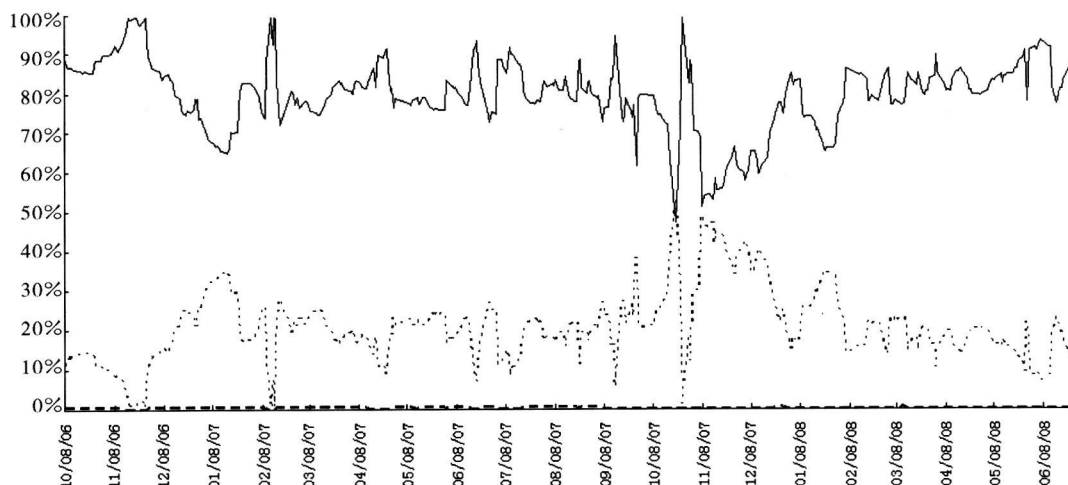


图 3 各波动因子对于总的风险溢酬的贡献百分比

Fig. 3 Contribution of each factor to the total risk premium

其中, 实线为水平因子对于总的风险溢酬的贡献百分比, 点线为斜率因子对于总的风险溢酬的贡献百分比, 间断线为扭曲因子对于总的风险溢酬的贡献百分比。

由图 3 所示, 水平因子的波动风险溢酬占了总风险溢酬的绝大部分, 平均比例达到了 79.10%; 斜率因子的波动风险溢酬次之, 平均比例为 26.23%, 而扭曲因子的波动风险溢酬所占比例最小, 平均仅为 0.75%。

4 结 论

本文在多因子 H.M 框架下, 将一类具有特定波动率结构设定的非马尔可夫远期利率模型转化

为马尔可夫系统, 并在对得到的马尔可夫系统利用状态空间模型进行表示的基础上, 引入基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法对 H.M 模型进行估计, 进而解决了模型非线性和潜在状态变量的问题。此外, 本文基于 SHIBOR 期限结构的实际动态特性, 对 H.M 模型的波动率结构进行了相应的设定, 并引入了随机市场风险价格, 构建了 SHIBOR 市场利率期限结构的三因子 H.M 模型, 进而对 SHIBOR 市场利率期限结构进行了实证研究, 重点分析了 SHIBOR 市场的波动率结构。结果表明, 三因子 H.M 模型可以很好的刻画 SHIBOR 期限结构的动态特性和波动率结构; 而三个因子中, 水平因子和斜率因子是驱动 SHIBOR 利率系统的主要因素。

参 考 文 献:

- [1] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claim valuation[J]. *Econometrica*, 1992, 60(1): 77-105.
- [2] Carverhill A. When is the short rate Markovian? [J]. *Mathematical Finance*, 1994, 4(4): 305-312.
- [3] Ritchken P, Sankarasubramanian L. Volatility structures of forward rates and the dynamics of the term structure[J]. *Mathematical Finance*, 1995, 5(1): 55-72.
- [4] Bhar R, Chiarella C. Transformation of Heath-Jarrow-Morton models to Markovian systems[J]. *European Journal of Finance*, 1997, 3(1): 1-26.
- [5] Inui K, Kijim A.M. A Markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1998, 33(3): 423-440.
- [6] de Jong F, Santa-Clara P. The dynamics of the forward interest rate curve: A formulation with state variables[J]. *Journal of*

- Financial and Quantitative Analysis, 1999, 34(1): 131–157
- [7] Chiarella C, Kwon O. A Class of Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models with Stochastic Volatility [R]. Working Paper, University of Technology, Sydney, 1998
- [8] Chiarella C, Kwon O. Square Root Affine Transformations of the Heath-Jarrow-Morton Term Structure Model and Partial Differential Equations [R]. Working Paper, University of Technology, Sydney, 1998
- [9] Bhar R, Chiarella C, El Hassan N, Zheng X. The reduction of forward rate dependent HJM models to Markovian form: Pricing European bond options [J]. Journal of Computational Finance, 2000, 3(1): 47–72
- [10] Chiarella C, Kwon O. Forward rate dependent Markovian transformations of the Heath-Jarrow-Morton term structure model [J]. Finance and Stochastics, 2001, 5(2): 237–257
- [11] Björk T, Svensson L. On the existence of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models [J]. Mathematical Finance, 2001, 11(2): 205–243
- [12] Björk T, Landén C. On the construction of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models [J]. Finance and Stochastics, 2002, 6(3): 303–331
- [13] Chiarala C, Kwon O. Finite dimensional affine realisations of HJM models in terms of forward rates and yields [J]. Review of Derivatives Research, 2003, 6(2): 129–155
- [14] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. Transaction of the ASME—Journal of Basic Engineering, 1960, 82D(1): 35–45
- [15] Duffee G R, Standon R H. Estimation of Dynamic Term Structure Models [R]. Working Paper, U. C. Berkeley, Berkeley, 2004
- [16] Pennacchi G. Identifying the dynamics of real interest rates and inflation: Evidence using survey data [J]. Review of Financial Studies, 1991, 4(1): 53–86
- [17] Chen R R, Scott L. Multifactor Cox-Ingersoll-Ross models of the term structure: Estimates and tests from a state space model using a Kalman filter [J]. Journal of Real Estate Finance and Economics, 2003, 27(2): 143–172
- [18] Jegadeesh N, Pennacchi G G, Estrella A. The behavior of interest rates implied by the term structure of Eurodollar futures [J]. Journal of Money, Credit & Banking, 1996, 28(3): 426–451
- [19] Babbs S H, Norman K B. Kalman filtering of generalized Vasicek term structure models [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1999, 34(1): 115–130
- [20] Brennan M J, Wang A W, Xia Y. Estimation and test of a simple model of intertemporal capital asset pricing [J]. Journal of Finance, 2004, 59(4): 1743–1775
- [21] 范龙振, 张国庆. 两因子 CIR 模型对上交所利率期限结构的实证研究 [J]. 系统工程学报, 2005, 20(5): 447–453
Fan Long-zhen, Zhang Guo-qing. Modeling term-structure of yields in SSE with two-factor CIR model [J]. Journal of Systems Engineering, 2005, 20(5): 447–453. (in Chinese)
- [22] Bucy R S, Renne K D. Digital synthesis of nonlinear filters [J]. Automatica, 1971, 7(3): 287–289
- [23] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear system [J]. The Proc of Aerospace, 1997, 87(2): 54–65
- [24] 李彪, 杨宝臣. 基于远期利率分解技术的三因子 HJM 模型研究 [J]. 管理科学学报, 2008, 11(6): 112–121.
Li Biao, Yang Bao-chen. Empirical study of three-factor HJM model based on forward rate decomposition technique [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(6): 112–121. (in Chinese)
- [25] Holland J. Adaptation in Natural and Artificial Systems [M]. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975
- [26] 王燕青, 唐万生, 韩其恒. 基于遗传算法的概率准则组合证券模拟求解 [J]. 管理科学学报, 2002, 5(6): 29–33, 52
Wang Yan-qing, Tang Wan-sheng, Han Qi-heng. Stochastic simulation based genetic algorithm for solving portfolio problem with probability criterion [J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(6): 29–33, 52. (in Chinese)

[27] 李建武, 李敏强. 测试实数编码遗传算法的困难度 [J]. 管理科学学报, 2004, 7(4): 40-44

Li Jianwu, Li Minqiang. Analyzing GA-hardness for real encoding in genetic algorithms [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(4): 40-44. (in Chinese)

Model calibration of HJM models based on UKF with application

YANG Bao-chen, SU Yun-peng

School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract In a multifactor HJM framework, this paper transforms a class of non-Markovian forward rate models with a specific volatility specification into the Markovian representation, which is further cast into a state-space model. Then a maximum likelihood estimator based on the unscented Kalman filter is introduced into the estimation of the term structure models, thus getting the problems of nonlinearity and the existence of latent variables resolved. For the empirical study, a three-factor HJM model is established for the Shanghai Interbank Offered Rate (SHIBOR) market by introducing stochastic market price of risk and a volatility specification appropriate for the market. It is found that the dynamics and volatility structure of SHIBOR are both well captured by the model, and the level and slope factors explain the majority of the variation of the yield curve.

Key words Heath-Jarrow-Morton models; unscented Kalman filter; maximum likelihood estimator; Shanghai Interbank Offered Rate

(上接第 66 页)

[14] Pierre Giot and Amin Schowenbacher. IPO, trade sales and liquidations: Modeling venture capital exits using survival analysis [J]. Journal of Banking & Finance, 2007, 31(3): 679-702

[15] Sivapulle P, Choi JS. Testing for linear and nonlinear Ganger causality in the stock price-volume relation: Korean evidence [J]. The Quarterly Review of Economic and Finance, 1999, 39(1): 59-76

[16] Stickle SE, Verrecchia RE. Evidence that trading volume sustains stock price changes [J]. Financial Analysts Journal, 1994, November/December: 57-67

Survival analysis and the probability inference about the stock index

LEI Ming¹, YE Wu-yi², MAO Bai-qi², GUO Wen-jing¹

1. Nanjing University of Finance & Economics, Nanjing 210003, China

2. University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract In this paper, the successive rises and falls of Shanghai stock index returns are analyzed by survival analysis and extremum theory. The distributions of the successive rises and falls of returns are fitted with Gamma distribution. The conditional probability of the rises and falls of the stock index is obtained. Also the influence of the volume is analyzed. We think that the random walk hypothesis is only a rough approximation. And our study helps to better understand the efficient market theory.

Key words survival analysis; gamma distribution; probability inference; random walk