零售商竞争下纵向合作广告的微分对策模型①

熊中楷[1], 聂佳佳[1], 熊 榆[2]
(1. 重庆大学经济与工商管理学院, 重庆 400030; 2. 约克大学管理学院, 英国)

摘要: 利用随机微分对策理论研究了供应链中零售商竞争下的纵向合作广告问题,建立了一个随机微分对策模型. 运用汉密尔顿 – 雅可比 – 贝尔曼方程分别求得了 Stackelberg博弈和合作博弈下均衡的全国性广告投入、地方性广告投入、制造商商誉的期望值和方差、商誉的概率分布函数以及 Stackelberg博弈下的广告分担比例, 并对此两种博弈进行了比较. 研究发现, 两种博弈下的零售商的地方性广告投入和制造商的商誉与零售商之间的广告竞争强度相关; 在一定条件下, 制造商具有一致渐进稳定的商誉概率分布函数. 最后, 运用效用理论对合作博弈下的增量利润进行了划分.

关键词: 供应链; 合作广告; 广告竞争; 随机微分对策; Stackelberg博弈; 合作博弈; 汉密尔顿 – 雅可比 – 贝尔曼

中图分类号: F270.5 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2010)06-0011-12

0 引 言

供应链上下游企业间的合作广告 (或称纵向合作广告), 即制造商对零售商的地方性广告进行补偿. 纵向合作广告被绝大多数的行业所采用, 它在许多公司的营销战略中扮演了极为重要的角色, 是许多制造商财务预算中的重要部分[1-2]. 据估计在 1987年, 美国公司大约花费 100亿美元在合作广告上, 而这个数字在 1993年则达到了极为惊人的 200亿美元[3-4]. 纵向合作广告在零售业中使用的比例相当高, 依照广告时代 (Advertising Age)[5]杂志的描述, 合作广告大约占所有百货商店广告的 50%, 占所有食品杂货店广告的 75%. 相对于制造商的全国性广告投入而言, 制造商用于补偿零售商的地方性广告开支要高得多, 如: 通用电器公司用于地方性广告的开支是其全国性广告开支的三倍[6].

纵观近年来国内外纵向合作广告问题的研究情况, 大多数文献都从更加理论化的视角出发, 建立相关数学模型以及运用博弈论方法分析合作广告问题. 纵向合作广告模型主要有两类: 静态合作广告模型和动态合作广告模型②. 静态合作广告模型研究方面: Huang和 Li[7]针对零售势力从制造商向零售商转移这一市场结构的变化, 考察了制造商与零售商合作广告系统的交易效率问题; Yue等[8]对此模型加以修正, 研究了在富有需求弹性的市场环境下, 制造商向消费者直接提供一个价格折扣时的两层供应链合作广告问题; Huang等[9]后来又侧重研究了合作博弈中制造商与零售商的最优广告策略选择, 并与经典的序贯行动博弈情形进行了比较分析, 结果表明, 前一种博弈情形比后一种博弈情形的系统利润更高, 并且制造商全国性广告支出以及零售商地方性广告支出也更高; 另外胡本勇和彭其渊[10]也对合作广

① 收稿日期: 2008-05-04; 修订日期: 2009-09-22.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70571088).
作者简介: 熊中楷 (1948—), 男, 江西南昌人, 教授, 博士生导师. Email: xiongzhongkai@cqu.edu.cn
② 静态合作广告模型没有考虑供应链中参与方的长期利润, 而动态合作广告模型 (通过微分对策理论建立的合作广告模型) 考虑了供应链中参与方的长期利润, 因而微分对策合作广告模型更加贴近现实[1,11-13].

告进行了深入的研究. 动态合作广告模型研究方面: Jørgensen等[11]构建了一个存在两种类型广告(长期广告和短期广告)的动态合作广告模型; Jørgensen等[12]假定销售量依赖于商誉和广告促销活动, 并且销售量关于商誉边际报酬递减, 他们先后讨论了 Nash非合作博弈和 Stackelberg博弈, 并对此进行了比较分析; 另外张庶萍和张世英[13]以及傅强和曾顺秋[1]也对动态合作广告进行了深入的研究.

以上文献对合作广告的研究在于探讨单一制造商和单一零售商的情形, 而在现代经济中, 生产商多是通过多个零售商分销产品. 即便是在同一个地区, 生产商往往也会采用多个零售商销售产品(独家代理经销除外), 例如: 宝洁公司生产的飘柔洗发水在北京市的华联、家乐福、易初莲花都有销售[2]. 基于这样的背景, 王磊等[2]研究了零售商竞争下的纵向合作广告问题, 扩展了 Huang和 Li[7]的模型, 然而其模型为静态合作广告模型. 本文在现有文献的基础上, 把研究扩展到动态环境下单一制造商和两个竞争性零售商的情形. 两个竞争性零售商从同一个制造商采购商品, 在同一个市场争夺最终客户. 零售商的商品需求量除了受到自己的广告投入影响还受到竞争者广告投入的影响. 在这种情况下, 所有参与方的决策均受到零售商广告竞争的影响. 本文将研究传统的制造商为领导者而零售商为追随者的 Stackelberg博弈, 比较分析动态环境中 Stackelberg博弈和合作博弈下的均衡结果. 期望所得到的相关结论能为制造商和零售商在广告预算支出、双方促销活动安排以及选择何种博弈结构等方面的科学决策提供理论依据.

1 模型

考虑由一个制造商和两个零售商组成的供应链系统, 制造商进行全国性广告, 两个零售商进行地方性广告竞争. 假设制造商全国性广告投入为 $A_m(t)$, 零售商地方性广告投入为 $A_i(t)\ (i=1, 2)$, 制造商承担零售商广告成本的比例为 $\chi_i(t)$, 且 $0 \leqslant \chi_i(t) \leqslant 1$. 设制造商和零售商的广告成本函数分别为[11-13]

$$C_m(A_m) = \frac{\mu_m}{2}A_m^2(t),\quad C_i(A_i) = \frac{\mu_i}{2}A_i^2(t) \tag{1}$$

其中, μ_m 和 μ_i 分别为制造商和零售商广告成本系数, $C_m(A_m)$ 和 $C_i(A_i)$ 各自代表制造商和零售商的广告成本, 并且均是关于广告投入的凸函数. 由于制造商和零售商广告的投入增加了制造商的品牌形象(商誉)[11-13], 本文用如下随机微分方程刻画商誉随时间的变化[14]

$$\begin{aligned} dG(t) = {} & (\lambda_m A_m(t) + \lambda_1 A_1(t) + \lambda_2 A_2(t) - \\ & \delta G(t))\,dt + \sigma(G(t))\,dz(t), \\ & G(0) = G_0 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 λ_m 和 λ_i 分别表示制造商和零售商广告投入对商誉的影响程度, $\delta > 0$表示品牌形象的衰减程度. 商誉的衰减通常是由于消费者在该制造商(或零售商)竞争对手的广告诱惑下转向其他品牌, 或转向新引入市场的产品和品牌等所造成的. $z(t)$ 为标准的维纳过程, $\sigma(G(t))$ 为随机干扰影响系数. 假设零售商 i的即时销售量 $Q_i(t)$ 为③

$$\begin{aligned} Q_i(t) = {} & \alpha_i A_m(t) + \beta_1 A_i(t) + \beta_2 (A_i(t) - \\ & A_j(t)) + \theta_i G(t);\quad i, j = 1, 2;\quad i \neq j \end{aligned} \tag{3}$$

其中 α_i, β_1, θ_i 均为大于零的常数, 分别为制造商广告、零售商广告以及品牌形象对产品销售量的影响, β_2 为零售商之间的广告竞争强度系数, $A_i(t) - A_j(t)$ 反映了两个零售商之间广告投入的差值, 当 $A_i(t) - A_j(t)$ 的值一定时, β_2 越大, 二者销售量的差值就会越大, 令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$. 设制造商和零售商有着相同且为正值的贴现率 r, 目标都是在无限时区内寻求使自身利润最大化的最优广告策略, 并且其边际利润分别为 π_m 和 π_i, 均为常量. 制造商和零售商的利润函数分别为

$$\max_{A_m, \chi_i} J_m(G_0) = E\int_0^{\infty} e^{-rt}\{\pi_m[Q_1(t) + Q_2(t)] -$$

③ 需求函数的形式主要受到傅强和曾顺秋[1]、Jørgensen等[11]、Jørgensen等[12]和王磊等[2]的启示: 需求函数的第一、二和四项分别为制造商全国性广告投入、零售商地方性广告投入和商誉对需求的影响(其形式为第一、二和三篇需求函数的形式, 此三篇文章研究的是动态环境下单一制造商和单一零售商的合作广告问题), 需求函数的第三项为零售商之间的广告竞争对需求的影响(其形式为第四篇文章需求函数的形式, 此文研究的是静态环境下零售商竞争下的合作广告问题).

$$\frac{\mu_m}{2}A_m^2(t) - \sum_{i=1,2}\frac{\mu_i}{2}\chi_i(t)A_i^2(t)\}\mathrm{d}t\} \tag{4}$$

$$\max_{A_i} J_i(G_0) = E\{\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rt}\{\pi_i[\alpha_i A_m(t) + \beta_1 A_i(t) - \beta_2 A_j(t) + \theta_i G(t)] - \frac{\mu_i}{2}[1-\chi_i(t)]A_i^2(t)\}\mathrm{d}t\} \tag{5}$$

约束条件为式(2). 由于 Chintagunta和 Vilcassim[15]以及 Erickson[16]通过实证研究表明反馈控制策略所得到的解与实证数据拟合效果比开环解要好, 另外一方面反馈控制策略对于局部对策也是最优的, 所以本文研究模型的反馈控制策略④.

2　Stackelberg主从博弈

2.1　反馈 Stackelberg均衡

当制造商和零售商进行 Stackelberg主从博弈时, 博弈顺序如下: 首先由制造商确定全国性广告投入以及为零售商承担的地方性广告分担比例; 然后零售商选择最优的地方性广告投入.

命题 1　在 Stackelberg主从博弈情形下, 制造商和零售商的最优策略分别为

a) 制造商的最优广告策略和分担比例分别为

$$A_m^* = \frac{\pi_m[\alpha(r+\delta)+\theta\lambda_m]}{\mu_m(r+\delta)},$$

$$\chi_i^* = \frac{(r+\delta)(2\beta_1\pi_m - \beta\pi_i) + \lambda_i(2\theta\pi_m - \theta_i\pi_i)}{(r+\delta)(2\beta_1\pi_m + \beta\pi_i) + \lambda_i(2\theta\pi_m + \theta_i\pi_i)} \tag{6}$$

b) 零售商 i的最优广告策略为

$$A_i^* = \frac{(2\beta_1\pi_m + \beta\pi_i)(r+\delta) + \lambda_i(2\theta\pi_m + \theta_i\pi_i)}{2\mu_i(r+\delta)} \tag{7}$$

c) 制造商和零售商的最优利润分别为

$$V_m^*(G) = \frac{\theta\pi_m}{r+\delta}G + e_2,\quad V_i^*(G) = \frac{\theta_i\pi_i}{r+\delta}G + s_2^i \tag{8}$$

其中 e_2, s_2^i分别为式(18)和(19)所示.

证明　为了得到此博弈的 Stackelberg均衡, 运用逆向归纳法, 首先求解零售商的最优化控制问题. 其最优利润函数 $V_i(G)$必须满足汉密尔顿-雅可比-贝尔曼 (Hamilton-Jacobi-Bellman, HJB)方程[14]

$$rV_i(G) = \max_{A_i}\{\pi_i Q_i - \frac{\mu_i}{2}(1-\chi_i)A_i^2 + V_i'(G)(\lambda_m A_m + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - \delta G) + \sigma^2(G)V_i''(G)/2\} \tag{9}$$

为使上面等式右边最大化, 求解其对 A_i的一阶偏导数并令其等于零, 解得

$$A_i^*(\chi_i) = \frac{\beta\pi_i + \lambda_i V_i'(G)}{\mu_i(1-\chi_i)} \tag{10}$$

制造商将根据上式反应函数选择 A_m和 χ_i, 而这时制造商的 HJB方程是

$$rV_m(G) = \max_{A_m,\chi_i}\{\pi_m(Q_1+Q_2) - \frac{\mu_m}{2}A_m^2 - \frac{\mu_1}{2}\chi_1 A_1^2 - \frac{\mu_2}{2}\chi_2 A_2^2 + V_m'(G)\dot{G} + \sigma^2(G)V_i''(G)/2\} \tag{11}$$

将式(10)代入式(11), 得

$$rV_m(G) = \max_{A_m,\chi_i}\Big\{\pi_m\Big[\sum_{i=1,2}\frac{\beta_1[\beta\pi_i + \lambda_i V_i'(G)]}{\mu_i(1-\chi_i)} + \alpha A_m + \theta G\Big] - \sum_{i=1,2}\frac{\chi_i[\beta\pi_i + \lambda_i V_i'(G)]^2}{2\mu_i(1-\chi_i)^2} + V_m'(G)\Big[\lambda_m A_m + \sum_{i=1,2}\frac{\lambda_i[\beta\pi_i + \lambda_i V_i'(G)]}{\mu_i(1-\chi_i)} - \delta G\Big] - \frac{\mu_m}{2}A_m^2 + \sigma^2(G)V_m''(G)/2\Big\} \tag{12}$$

由式(12)的一阶条件得

$$A_m^* = \frac{\alpha\pi_m + \lambda_m V_m'(G)}{\mu_m} \tag{13}$$

$$\chi_i^* = \frac{(2\beta_1\pi_m - \beta\pi_i) + \lambda_i[2V_m'(G) - V_i'(G)]}{(2\beta_1\pi_m + \beta\pi_i) + \lambda_i[2V_m'(G) + V_i'(G)]} \tag{14}$$

将式(10)、(13)和(14)分别代入式(9)和(11), 化简整理得

---

④　为书写方便, 后文部分将省略时间 t

$$rV_i(G)=(\theta_i\pi_i-\delta V_i'(G))G+\frac{(\alpha\pi_m+\lambda_m V_m'(G))(\alpha_i\pi_i+\lambda_m V_i'(G))}{\mu_m}+$$
$$\frac{(\beta\pi_i+\lambda_i V_i'(G))[(2\beta_1\pi_m+\beta\pi_i)+\lambda_i[2V_m'(G)+V_i'(G)]]}{4\mu_i}-$$
$$\frac{(\beta_2\pi_i-\lambda_j V_i'(G))[(2\beta_1\pi_m+\beta\pi_j)+\lambda_j[2V_m'(G)+V_j'(G)]]}{2\mu_j}+\sigma^2(G)V_i''(G)/2 \quad (15)$$

$$rV_m(G)=[\theta\pi_m-\delta V_m'(G)]G+\frac{[\alpha\pi_m+\lambda_m V_m'(G)]^2}{2\mu_m}+\sigma^2(G)V_m''(G)/2+$$
$$\sum_{i=1,2}\frac{[\beta(2\pi_m+\pi_i)+\lambda_i[2V_m'(G)+V_i'(G)]][\Lambda_i+\lambda_i[2V_m'(G)+V_i'(G)]]}{8\mu_i} \quad (16)$$

其中 $\Lambda_i=(\beta_1-\beta_2)(2\pi_m-\pi_i)$, $i,j=1,2$, $i\neq j$. 由式(15)和(16)可知, 关于 G 的线性最优利润函数是 HJB方程的解, 令

$$V_m(G)=e_1G+e_2,\ V_i(G)=s_1^iG+s_2^i \quad (17)$$

其中, e_1, e_2, s_1^i, s_2^i 是常数. 将上述 $V_m(G)$ 和 $V_i(G)$ 及其对 G 的导数代入式(15)和(16), 求得最优利润函数的参数值为

$$e_1=\frac{\theta\pi_m}{r+\delta},\ e_2=\frac{\pi_m^2[\alpha(r+\delta)+\theta\lambda_m]^2}{2r\mu_m(r+\delta)^2}+\sum_{i=1,2}\frac{\Upsilon_i[\Omega_i(r+\delta)+\lambda_i(2\theta\pi_m+\theta_i\pi_i)]}{8r\mu_i(r+\delta)^2} \quad (18)$$

$$s_1^i=\frac{\theta_i\pi_i}{r+\delta},\ s_2^i=\frac{\pi_i\pi_m[\alpha(r+\delta)+\theta\lambda_m][\alpha_i(r+\delta)+\theta_i\lambda_m]}{r\mu_m(r+\delta)^2}+$$
$$\frac{\pi_i(\beta(r+\delta)+\lambda_i\theta_i)[(2\beta_1\pi_m+\beta\pi_i)(r+\delta)+\lambda_i(2\theta\pi_m+\theta_i\pi_i)]}{4r\mu_i(r+\delta)^2}-$$
$$\frac{\pi_i(\beta_2(r+\delta)-\lambda_j\theta_i)[(2\beta_1\pi_m+\beta\pi_j)(r+\delta)+\lambda_j[(2\theta\pi_m+\theta_j\pi_j]]}{2r\mu_j(r+\delta)^2} \quad (19)$$

其中 $\Upsilon_i=\beta(r+\delta)(2\pi_m+\pi_i)+\lambda_i(2\theta\pi_m+\theta_i\pi_i)$. 将 e_1, e_2, s_1^i, s_2^i 代入 $V_m(G)$ 和 $V_i(G)$, 从而得到制造商和零售商的最优利润函数为式(8), 将式(8)对 G 的导数代入式(10)、(13)和(14), 得式(6)和(7).

由命题 1得到如下性质:

性质 1 令 $\Gamma_i=(r+\delta)(2\beta_1+2\theta\lambda_i)/(\beta+\lambda_i\theta_i)$,

(a) 若 $\pi_m/\pi_i>\Gamma_i$, 那么制造商提供正的广告补贴给零售商, 若 $\pi_m/\pi_i\leqslant\Gamma_i$, 那么制造商不提供补贴给零售商;

(b) 制造商的边际利润越高, 其投入的全国性广告越多, 为零售商分担的地方性广告也越多, 而零售商的边际利润越高, 制造商分担的地方性广告越少, 无论是制造商还是零售商的边际利润越高, 零售商的地方性广告投入也越多;

(c) 制造商的全国性广告不受零售商广告竞争强度(β_2)的影响, 而零售商之间广告竞争强度越大, 零售商投入的地方性广告越多, 制造商提供给零售商的广告补贴越少.

性质 1(a) 表明制造商的广告分担政策依赖于双方的边际利润. 如果制造商和零售商边际利润的比值小于 Γ_i, 这表明零售商的边际利润与制造商比较起来相对过高, 因此零售商有强烈的动力去投入符合制造商期望的大量地方性广告刺激产品的销售, 在这样的情况下, 制造商没有动力去分担地方性广告成本. 性质 1(b) 表明边际利润是推动双方进行广告投资的动力所在. 性质 1(c) 说明零售商之间的广告竞争对制造商的全国性广告没有影响, 但是零售商之间的广告竞争越激烈, 零售商投入地方性广告所带来的销量越少, 制造商没有动力为零售商分担更多的地方性广告, 所以制造商可以通过降低对零售商地方性广告的补贴来抑制零售商之间的广告竞争.

2.2 Stackelberg博弈下三方最优的广告投入对商誉的影响

在制造商按式(6)投入最优的全国性广告和零售商按式(7)投入最优的地方性广告下, 研究商誉随时间的变化规律, 首先求解商誉的期望值和方差. 将命题 1中均衡的全国性广告和地方性

广告代入式(2), 得

$$dG(t) = (\Omega - \delta G(t))dt + \sigma(G(t))dz(t),$$
$$G(0) = G_0 \geqslant 0 \qquad (20)$$

其中 $\Omega = \dfrac{\lambda_m \pi_m[\alpha(r+\delta)+\theta\lambda_m]}{\mu_m(r+\delta)} + \sum_{i=1,2}\{\lambda_i[(2\beta_1\pi_m+\beta\pi_i)(r+\delta)+\lambda_i(2\theta\pi_m+\theta_i\pi_i)]\}/[2\mu_i(r+\delta)] > 0$ 为常数. 为进一步分析, 设 $\sigma(G(t))dz(t) = \sigma\sqrt{G}dz(t)$[14], 运用随机微分方程理论, 命题 2给出了双方以最优广告投入下制造商商誉的期望值和方差.

命题 **2**　在 Stackelberg博弈最优广告投入下, 制造商商誉的期望值和稳定的商誉分别为

$$E[G(t)] = \frac{\Omega}{\delta} + e^{-\delta t}\left(G_0 - \frac{\Omega}{\delta}\right),$$
$$\lim_{t\to\infty}E[G(t)] = \Omega/\delta \qquad (21)$$

制造商商誉的方差和稳定的方差分别为

$$D[G(t)] = \frac{\sigma^2[\Omega - 2(\Omega-\delta G_0)e^{-\delta t} + (\Omega - 2\delta G_0)e^{-2\delta t}]}{2\delta^2},$$
$$\lim_{t\to\infty}D[G(t)] = \sigma^2\Omega/(2\delta^2) \qquad (22)$$

证明　将式(20)改写成随机积分形式

$$G(t) = G_0 + \int_0^t(\Omega - \delta G(s))ds + \int_0^t\sigma(G(s))dz(s) \qquad (23)$$

式(23)对 $G(t)$ 求期望得

$$E[G(t)] = G_0 + \int_0^t[\Omega - \delta E(G(s))]ds \qquad (24)$$

式(24)可以转化为一个常微分方程, 且初始条件为 $E[G(0)] = G_0$, 求解得

$$E[G(t)] = \frac{\Omega}{\delta} + e^{-\delta t}\left(G_0 - \frac{\Omega}{\delta}\right) \qquad (25)$$

对式(25)求极限得, $\lim_{t\to\infty}E[G(t)] = \Omega/\delta$ 为求其方差, 只要得到 $E[G^2(t)]$ 即可, 对式(20)运用 Itô公式[14] 得

$$dG^2(t) = [2G(\Omega - \delta G) + \sigma^2 G]dt + 2G\sigma\sqrt{G}dz(t) \qquad (26)$$

将式(26)改写成随机积分形式并求期望得

$$E[G^2(t)] = G_0^2 + \int_0^t[(2\Omega + \sigma^2)E(G(s)) - 2\delta E(G^2(s))]ds \qquad (27)$$

其中 G_0^2 为 $E[G^2(t)]$ 的初始条件. 对式(27)求导得如下微分方程

$$dE[G^2(t)]/dt = (2\Omega + \sigma^2)\left[\frac{\Omega}{\delta} + e^{-\delta t}\times\left(G_0 - \frac{\Omega}{\delta}\right)\right] - 2\delta E(G^2),$$
$$E[G^2(0)] = G_0^2 \qquad (28)$$

求解得

$$E[G^2(t)] = \frac{(2\Omega+\sigma^2)(\Omega e^{2\delta t} + 2\delta G_0 e^{\delta t} - 2\Omega e^{\delta t} + \Omega - 2\delta G_0)}{2\delta^2 e^{2\delta t}} + G_0^2 e^{-2\delta t} \qquad (29)$$

对式(29)求极限得, $\lim_{t\to\infty}E[G^2(t)] = \Omega(2\Omega + \sigma^2)/(2\delta^2)$. 则商誉的方差和极限值为式(22)所示.

下面通过一个例子说明商誉与其期望值的关系. 设参数 $G_0 = 50$, $t \in [0, 2]$, $\delta = 0.01$, $\sigma = 0.7$, $\Omega = 3$采用 Prasad和 Sethi[14] 的模拟方法, 将式(20)进行离散化处理得

$$G(t+\Delta t) = G(t) + (\Omega - \delta G(t))\Delta t + \sigma\sqrt{G(t)}\sqrt{\Delta t}\zeta(t) \qquad (30)$$

其中 $\zeta(t)$ 为独立同分布的标准正态分布变量, 步长 $\Delta t = 0.01$

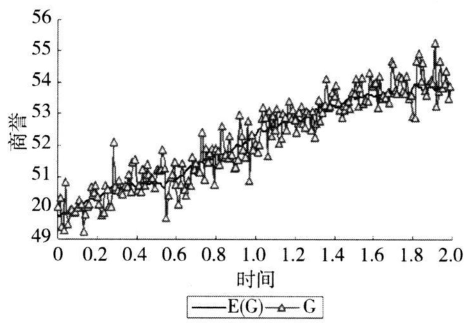

图 **1**　制造商商誉和期望商誉随时间的变化

Fig. 1 Changes of manufacturer's goodwill and expected goodwill with time

由图 1可以看出, 制造商的商誉始终在期望商誉的上下波动. 在 95% 的置信度下, 制造商商誉的置信区间为

$$\left(E[G(t)] - 1.96\sqrt{D[G(t)]},\ E[G(t)] + 1.96\sqrt{D[G(t)]}\right) \qquad (31)$$

在任意时刻, 虽然决策者不能准确知道其商誉, 但是式(31)使决策者知道商誉的大概值, 进而起到

辅助决策的目的. 然而随机干扰因素的分布函数不一定为正态分布, 在 2.3部分中本文将研究商誉的概率分布函数. 由命题 2可以得到如下性质.

性质 **2** (a) 当 $\sigma = 0$时, $\lim_{t\to\infty} E[G^2(t)] = (\lim_{t\to\infty} E[G(t)])^2$, $\lim_{t\to\infty} D[G(t)] = 0$;

(b) 在 Stackelberg博弈最优广告投入下, 当 $\delta > \Omega/G_0$ 时, 制造商的期望商誉随时间推移是减小的, 但始终大于 Ω/δ; 当 $\delta \leqslant \Omega/G_0$ 时, 制造商的期望商誉随时间推移是增加的, 但始终小于 Ω/δ;

(c) 在 Stackelberg博弈最优广告投入下, 当 $\delta < \Omega/G_0$ 时, 制造商商誉的方差是关于时间的增函数, 如 $\mathrm{d}D[G(t)]/\mathrm{d}t > 0$; 当 $\delta \geqslant \Omega/G_0$ 且 $0 < t \leqslant (\ln 2)/\delta$时, 制造商商誉的方差是关于时间的增函数, 如 $\mathrm{d}D[G(t)]/\mathrm{d}t > 0$; 当 $\delta \geqslant \Omega/G_0$ 且 $t > (\ln 2)/\delta$ 时, 制造商商誉的方差是关于时间的减函数, 如 $\mathrm{d}D[G(t)]/\mathrm{d}t < 0$.

证明 (a) 的结论是显然的, 现在证明 (b) 和 (c) 的结论. 命题 2中商誉的期望和方差分别对 t求导得

$$\frac{\mathrm{d}E[G(t)]}{\mathrm{d}t} = -\delta \mathrm{e}^{-\delta t}\left(G_0 - \frac{\Omega}{\delta}\right) \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}D[G(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma^2 \mathrm{e}^{-\delta t}[\Omega(1-\mathrm{e}^{-\delta t}) - \delta G_0(1-2\mathrm{e}^{-\delta t})]}{\delta} \tag{33}$$

由式(32)可知 $\delta = \Omega/G_0$为临界值, 故有 (b)的结论. 由于 $\Omega(1-\mathrm{e}^{-\delta t})$和 $\sigma^2\mathrm{e}^{-\delta t}/\delta$恒大于零, 所以当 $0 < t \leqslant (\ln 2)/\delta$时, $-\delta G_0(1-2\mathrm{e}^{-\delta t})$ 大于零, 此时, 式(33)大于零; 当 $t > \ln 2/\delta$时, $-\delta G_0(1-2\mathrm{e}^{-\delta t})$ 小于零, 为使式(33)大于零, 则 $G_0 < \Omega(1-\mathrm{e}^{-\delta t})/[\delta(1-2\mathrm{e}^{-\delta t})]$, 不等式两端对 t求极得 $\delta < \Omega/G_0$, 所以当 $t > \ln 2/\delta$且 $\delta < \Omega/G_0$时, 式(33)大于零; 而当 $t > \ln 2/\delta$且 $\delta \geqslant \Omega/G_0$时, 式(33)小于等于零. 总结上述分析得 (c) 的结论.

这揭示了当消费者对广告的"遗忘"程度 ($\delta > \Omega/G_0$) 比较大时, 即使投入广告也不能阻止商誉的减小, 但企业不投入广告商誉下降的速度更快. 这说明此时企业只有通过改善企业的广告形式降低消费者对广告的"遗忘"才能增加商誉, 例如: 在广告影响力大的媒体上进行广告宣传. 而当消费者对广告的"遗忘"程度比较小 ($\delta \leqslant \Omega/G_0$)时, 投入广告会增加商誉, 但是商誉方差会不断增大, 即制造商为获取更高的商誉所带来的风险更大. 这说明一个企业的商誉越高, 其商誉受外界因素的影响越大, 如企业所处的行业背景. 一旦商誉达到一定程度, 投入更多的广告不会增加其商誉, 但是不投入广告商誉会减小, 这说明企业的商誉不能无限地增大.

2.3 Stackelberg博弈下三方以最优广告投入时商誉的概率分布函数

当双方进行 Stackelberg博弈时, 在双方投入最优广告下, 研究商誉的概率分布函数, 由于其分布函数的复杂性, 一般难以给出解析表达式. 然而, 对于不同的商誉初始值, 商誉的概率分布函数可能不同. 这是因为当系统不稳定时, 对于不同的初始值会得到不同的商誉概率分布函数; 而当系统稳定时, 商誉的概率分布函数不受初始值的影响[17]. 所以, 在难以给出商誉概率分布函数解析表达式时, 对系统稳定性的分析显得至关重要. 式(20) 相应的 Fokker-Planck方程[14] 为

$$\frac{\partial f(G)}{\partial t} + \frac{\partial[(\Omega - \delta G)f]}{\partial G} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\sigma^2 G f(G))}{\partial G^2} = 0 \tag{34}$$

其中 $f(G)$ 为商誉 G 的概率分布函数. 类似于 Prasad和 Sethi的分析, 设 $\partial f(G)/\partial t = 0$, 其经济意义为商誉的概率分布函数不随时间的变化而变化. 则式(34)变为

$$\sigma^2 G f''(G) = 2(\Omega - \delta G - \sigma^2) f'(G) - 2\delta f(G) \tag{35}$$

令 $f = f_1$, $f_2 = \mathrm{d}f_1/\mathrm{d}G$ 则式(35) 可以表示为如下系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}f_1/\mathrm{d}G = f_2 \\ \mathrm{d}f_2/\mathrm{d}G = 2(\Omega - \delta G - \sigma^2) f_2 / (\sigma^2 G) - 2\delta f_1/(\sigma^2 G) \end{cases} \tag{36}$$

式(36)为关于 G的二阶非线性微分方程, 难以给出此方程的解析解, 但是可以通过如下命题证明该方程是一致渐进稳定的.

命题 **3** 在 Stackelberg博弈最优广告投入下, 制造商商誉的概率分布函数满足式 (35), 对于任意给定的初始商誉 $G_0 > 0$和正的系统参数

δ, σ, Ω, 式(36)是一致渐进稳定的充分条件为 $\sigma^2 - \Omega > 0$

证明　式(36)是一个线性非自治系统, 且参数 δ, σ 均为正值. 采用 Liapunov定理[17]判断该系统的稳定性, 设 Liapunov函数为

$$W(f_1, f_2, G) = f_1^2\left(1 + 2\delta/(\sigma^2 G)\right) + f_2^2 \tag{37}$$

显然有 $f_1^2 + f_2^2 < W(f_1, f_2, G) < f_1^2\left(2 + 2\delta/(\sigma^2 G)\right) + f_2^2$, 所以 $W(f_1, f_2, G)$ 是具有无限小上界的正定函数. 又因为 $W(f_1, f_2, G)$ 沿式(36)解的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{W}(f_1, f_2, G) &= 2f_1 f_2\left(1 + \frac{2\delta}{\sigma^2 G}\right) - \frac{2\delta f_1^2}{\sigma^2 G^2} + \\ &\quad 2f_2\left(\frac{2(\Omega - \delta G - \sigma^2) f_2}{\sigma^2 G} - \frac{2\delta f_1}{\sigma^2 G}\right) \\ &= \frac{4(\Omega - \delta G - \sigma^2) f_2^2}{\sigma^2 G} + 2f_1 f_2 - \frac{2\delta f_1^2}{\sigma^2 G^2} \\ &= -(f_1 - f_2)^2 - \left(\frac{2\delta}{\sigma^2 G^2} + 1\right) f_1^2 - \\ &\quad 4f_2^2\left(\frac{\delta}{\sigma^2} + \frac{1}{4} + \frac{\sigma^2 - \Omega}{\sigma^2 G}\right)\end{aligned} \tag{38}$$

因为 $2\delta/(\sigma^2 G^2) + 1 > 0$, 所以当 $\sigma^2 - \Omega > 0$时, $\dot{W}(f_1, f_2, G)$负定, 由 Liapunov定理可知式(36)是一致渐进稳定的.

此命题说明制造商商誉的概率分布函数在一定条件($\sigma^2 - \Omega > 0$)下, 不受其初始商誉(G_0)的影响, 存在稳定的概率分布函数. 其解释如下: 渠道双方投入广告越多 Ω值越大, 存在稳定概率分布函数的条件 $\sigma^2 - \Omega > 0$就难以满足, 当 $\sigma^2 - \Omega > 0$不成立时, 意味着 Ω过大. 说明渠道双方投入广告过多以至其带来商誉的不确定性增加, 进而不能得到稳定的概率分布函数, 也就是说, 当企业投入过多广告时, 因广告产生的不确定性过大致使不能预测到商誉的分布函数; 而渠道双方投入广告比较少时, $\sigma^2 - \Omega > 0$成立, 此时投入广告少带来的不确定性小, 从而可以预测到商誉的分布函数.

3　合作博弈

3.1　合作博弈均衡解

需要指出的是, 文献[11－13]关注的是动态环境中传统的制造商为领导者而零售商为跟随者的博弈情形, 而未对供应链中成员之间的合作博弈情形进行探讨. 因此本部分重点探究制造商与零售商之间的这种合作关系, 并得到了该种博弈结构下制造商与零售商的最优广告策略选择以及渠道系统最优利润. 以上标“C”表示合作博弈下的最优值.

命题 4　在合作博弈情形下, 制造商和零售商的最优广告策略分别为

$$\begin{cases} A_m^C = \\ \dfrac{(\alpha\pi_m + \alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2)(r + \delta) + \lambda_m(\theta\pi_m + \theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2)}{\mu_m(r + \delta)} \\ A_i^C = \\ \dfrac{(\beta_1\pi_m + \beta\pi_i - \beta_2\pi_j)(r + \delta) + \lambda_i(\theta\pi_m + \theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2)}{\mu_i(r + \delta)} \end{cases} \tag{39}$$

供应链最优利润为

$$V^C(G) = \frac{\theta\pi_m + \theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2}{r + \delta}G + l_2 \tag{40}$$

其中 l_2为式(47)所示.

证明　当制造商与零售商进行合作博弈时, 将以供应链系统利润最大化为目标, 共同来确定 A_m 和 A_i 的最优值. 那么供应链的利润函数为

$$\max_{A_m, A_i, A_j}\left\{J = J_m + J_i + J_j = E\int_0^\infty e^{-rt}\left[\pi_m(Q_1 + Q_2) + \sum_{i=1,2}\left(\pi_i Q_i - \frac{\mu_i}{2}A_i^2\right) - \frac{\mu_m}{2}A_m^2\right]dt\right\} \tag{41}$$

其最优利润函数 $V(G)$必须满足如下 HJB方程

$$rV(G) = \max_{A_m, A_i, A_j}\left\{\pi_m(Q_1 + Q_2) + \sum_{i=1,2}\left(\pi_i Q_i - \frac{\mu_i}{2}A_i^2\right) - \frac{\mu_m}{2}A_m^2 + V'(G)\dot{G} + \sigma^2(G)V''(G)/2\right\} \tag{42}$$

求解上式右端关于 A_m 和 A_i 的一阶条件, 得到

$$A_m^C = \frac{\alpha\pi_m + \alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2 + \lambda_m V'(G)}{\mu_m},$$

$$A_i^C = \frac{\beta_1\pi_m + \beta\pi_i - \beta_2\pi_j + \lambda_i V'(G)}{\mu_i} \tag{43}$$

将式(43)代入式(42), 合并整理后得

$$rV(G)=(\theta\pi_m+\theta_1\pi_1+\theta_2\pi_2-\delta V')G+\sigma^2(G)V''(G)/2+\frac{(\alpha\pi_m+\alpha_1\pi_1+\alpha_2\pi_2+\lambda_m V')^2}{2\mu_m}+\frac{(\beta_1\pi_m+\beta\pi_1-\beta_2\pi_2+\lambda_1 V')^2}{2\mu_1}+\frac{(\beta_1\pi_m+\beta\pi_2-\beta_2\pi_1-\lambda_2 V')(\beta_1\pi_m+\beta\pi_2-\beta_2\pi_1+3\lambda_2 V')}{2\mu_2}\tag{44}$$

与命题 1类似, 关于 G 的线性最优利润函数是此 HJB方程的解, 令

$$V(G)=l_1G+l_2\tag{45}$$

其中 l_1, l_2 为常数. 将 $V(G)$ 及其对 G 的导数代入式(44)得

$$r(l_1G+l_2)=(\theta\pi_m+\theta_1\pi_1+\theta_2\pi_2-\delta l_1)G+\frac{(\alpha\pi_m+\alpha_1\pi_1+\alpha_2\pi_2+\lambda_m l_1)^2}{2\mu_m}+\frac{(\beta_1\pi_m+\beta\pi_1-\beta_2\pi_2+\lambda_1 l_1)^2}{2\mu_1}+\frac{(\beta_1\pi_m+\beta\pi_2-\beta_2\pi_1-\lambda_2 l_1)(\beta_1\pi_m+\beta\pi_2-\beta_2\pi_1+3\lambda_2 l_1)}{2\mu_2}\tag{46}$$

比较式(46)方程两端的 G 项系数, 求得系统利润最优利润函数的参数值为

$$l_1=\frac{\theta\pi_m+\theta_1\pi_1+\theta_2\pi_2}{r+\delta},\quad l_2=\frac{(\alpha\pi_m+\alpha_1\pi_1+\alpha_2\pi_2+\lambda_m l_1)^2}{2r\mu_m}+\frac{(\beta_1\pi_m+\beta\pi_1-\beta_2\pi_2+\lambda_1 l_1)^2}{2r\mu_1}+\frac{(\beta_1\pi_m+\beta\pi_2-\beta_2\pi_1-\lambda_2 l_1)(\beta_1\pi_m+\beta\pi_2-\beta_2\pi_1+3\lambda_2 l_1)}{2r\mu_2}\tag{47}$$

将 l_1, l_2 代入 $V(G)$, 从而得到供应链系统最优利润函数为式(40), 将式(40)对 G 的导数代入式(43)得式(39).

性质 **3** 在合作博弈下,

(a) 制造商的边际利润越高, 制造商的全国性广告投入、零售商的地方性广告投入以及供应链的总利润都越高;

(b) 当 $\pi_i<\pi_j$, $i,j=1,2$, $i\neq j$时, 零售商之间广告竞争强度系数(β_2)越大, 零售商 i的地方性广告投入越少.

性质 3说明制造商的边际利润的增加会增加系统的广告投入, 进而系统利润也会增加. 这揭示了供应链利润的提升在于供应链各成员提高自身的运营能力, 对制造商而言, 需要不断进行研发降低生产成本, 而对于零售商而言, 需要不断的提升自身的管理效率, 降低运营成本, 在物流运输方面, 需要优化物流网络, 降低运输成本. 只有供应链各成员的各项成本较低, 才能提高供应链整体的边际利润. 零售商之间的地方性广告竞争强度越大, 系统应减少其广告投入量以增加系统利润. 这表明零售商之间的竞争不利于合作博弈下广告的投入. 那么, 降低零售商之间的竞争强度将是提升供应链利润的有效方式, 如: 零售商的差异化经营模式.

3.2 合作博弈下双方以最优广告投入对制造商商誉的影响及其概率分布函数

当双方进行合作博弈时, 在最优广告投入下, 研究商誉的期望和方差. 将式(39)代入式(2), 得

$$\mathrm{d}G(t)=(\bar{\Omega}-\delta G(t))\mathrm{d}t+\sigma(G(t))\mathrm{d}z(t),\quad G(0)=G_0\geqslant 0\tag{48}$$

其中 $\bar{\Omega}=\dfrac{\lambda_m[(\alpha\pi_m+\alpha_1\pi_1+\alpha_2\pi_2)(r+\delta)+\lambda_m(\theta\pi_m+\theta_1\pi_1+\theta_2\pi_2)]}{\mu_m(r+\delta)}+\sum\limits_{i,j=1,2,i\neq j}\dfrac{\lambda_i[(\beta_1\pi_m+\beta\pi_i-\beta_2\pi_j)(r+\delta)+\lambda_i(\theta\pi_m+\theta_1\pi_1+\theta_2\pi_2)]}{\mu_i(r+\delta)}>0$为常数. 同样设 $\sigma(G(t))\mathrm{d}z(t)=\sigma\sqrt{G}\,\mathrm{d}z(t)$, 与 2.2和 2.3部分类似, 运用随机微分方程理论, 命题 5给出了制造商商誉的期望值和方差, 命题 6给出了概率分布函数的稳定性条件.

命题 5 在合作博弈最优广告投入下, 制造商商誉的期望值和稳定的商誉分别为

$$E[\bar{G}(t)] = \frac{\bar{\Omega}}{\delta} + e^{-\delta t}\left(G_0 - \frac{\bar{\Omega}}{\delta}\right),$$
$$\lim_{t\to\infty} E[\bar{G}(t)] = \bar{\Omega}/\delta \tag{49}$$

制造商商誉的方差和稳定的方差分别为

$$D[\bar{G}(t)] = \frac{\sigma^2[\bar{\Omega} - 2(\bar{\Omega} - \delta G_0)e^{-\delta t} + (\bar{\Omega} - 2\delta G_0)e^{-2\delta t}]}{2\delta^2},$$
$$\lim_{t\to\infty} D[\bar{G}(t)] = \sigma^2\bar{\Omega}/(2\delta^2) \tag{50}$$

命题 6 在合作博弈最优广告投入下, 对于任意给定的初始商誉 $G_0 > 0$和正的系统参数 δ, σ, 存在稳定概率分布函数的充分条件为 $\sigma^2 - \bar{\Omega} > 0$

命题 5和 6分别与命题 2和 3的证明类似, 限于篇幅, 从略. 与命题 2和 3比较而言, 制造商商誉的期望值和方差以及其稳定性的条件取决于 Ω和 $\bar{\Omega}$的大小, 下一部分将对此进行比较分析. 事实上, Ω和 $\bar{\Omega}$的大小与制造商和零售商的广告投入量有关, 因此对两种博弈形式下广告投入量的比较也就是对这两个量的比较.

4 比较分析

本部分意图对 Stackelberg博弈和合作博弈下制造商与零售商的最优广告策略、供应链系统最优利润以及商誉的期望和方差进行比较, 所得到的相关结论在命题 7中列出.

命题 7 Stackelberg博弈与合作博弈相比

(a) 制造商最优的全国性广告投入比较为 $A_m^C > A_m^*$, 零售商最优的地方性广告投入比较为

$$\begin{cases} A_i^C > A_i^*, \ \text{if}\ \pi_i/\pi_j > (\lambda_i\theta_i + \beta)(r+\delta)/(2\beta_2(r+\delta) - 2\theta_j\lambda_i), \\ A_i^C \leqslant A_i^*, \ \text{if}\ \pi_i/\pi_j \leqslant (\lambda_i\theta_i + \beta)(r+\delta)/(2\beta_2(r+\delta) - 2\theta_j\lambda_i) \end{cases} \tag{51}$$

(b) 对于任意给定的商誉 $G > 0$, 两种博弈下系统利润的比较为

$$\begin{cases} V^C(G) > V_m^*(G) + V_1^*(G) + V_2^*(G), \\ \quad \text{if}\ l_2 > e_2 + s_2^1 + s_2^2; \\ V^C(G) \leqslant V_m^*(G) + V_1^*(G) + V_2^*(G), \\ \quad \text{if}\ l_2 \leqslant e_2 + s_2^1 + s_2^2 \end{cases} \tag{52}$$

(c) 设 $\pi_i < 2\pi_j$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, 对于任意的 $t \in (0, \infty)$, 当 $\beta_2 < \pi_i/(2\pi_j - \pi_i)$时, 制造商商誉的期望和方差比较为

$$\begin{cases} E[\bar{G}(t)] > E[G(t)], \\ \quad \lim\limits_{t\to\infty} E[\bar{G}(t)] > \lim\limits_{t\to\infty} E[G(t)]; \\ D[\bar{G}(t)] > D[G(t)], \\ \quad \lim\limits_{t\to\infty} D[\bar{G}(t)] > \lim\limits_{t\to\infty} D[G(t)] \end{cases} \tag{53}$$

证明 A_i^C 减去 A_i^* 得

$$A_i^C - A_i^* = \frac{\pi_i(\lambda_i\theta_i + \beta)(r+\delta) - 2\pi_j(\beta_2(r+\delta) - \theta_j\lambda_i)}{2\mu_i(r+\delta)} \tag{54}$$

当 $\pi_i/\pi_j = (\lambda_i\theta_i + \beta)(r+\delta)/(2\beta_2(r+\delta) - 2\theta_j\lambda_i)$时, $A_i^C = A_i^*$, 所以有 (a) 的结论. $V^C(G)$减去 $(V_m^*(G) + V_1^*(G) + V_2^*(G))$ 得

$$V^C(G) - (V_m^*(G) + V_1^*(G) + V_2^*(G)) = l_2 - e_2 - s_2^1 - s_2^2 \tag{55}$$

所以有 (b) 的结论. 对于任意的 $t \in (0, \infty)$

$$\begin{cases} E[\bar{G}(t)] - E[G(t)] = \frac{\bar{\Omega} - \Omega}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) \\ \lim\limits_{t\to\infty} E[\bar{G}(t)] - \lim\limits_{t\to\infty} E[G(t)] = (\bar{\Omega} - \Omega)/\delta \end{cases} \tag{56}$$

$$\begin{cases} D[\bar{G}(t)] - D[G(t)] = \frac{\sigma^2(\bar{\Omega} - \Omega)(1 - 2e^{-\delta t} + e^{-2\delta t})}{2\delta^2} \\ \lim\limits_{t\to\infty} D[\bar{G}(t)] - \lim\limits_{t\to\infty} D[G(t)] = \sigma^2(\bar{\Omega} - \Omega)/(2\delta^2) \end{cases} \tag{57}$$

因为对于 $t \in (0, \infty)$, $1 - e^{-\delta t} > 0$, 又因为 $1 - 2e^{-\delta t} + e^{-2\delta t}$对 t的一阶导数大于零, 而且 $t = 0$时其值为零, 因此对于 $t \in (0, \infty)$, $1 - 2e^{-\delta t} + e^{-2\delta t} > 0$ 所以仅需比较 $\bar{\Omega}$和 Ω的大小. $\bar{\Omega} - \Omega$得

$$\bar{\Omega} - \Omega = \begin{cases} \frac{\lambda_m[(\alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2)(r+\delta) + \lambda_m(\theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2)]}{\mu_m(r+\delta)} + \\ \sum\limits_{i,j=1,2,\ i\neq j} \frac{\lambda_i[(\beta\pi_i - 2\beta_2\pi_j)(r+\delta) + \lambda_i(\theta_i\pi_i + 2\theta_j\pi_j)]}{2\mu_i(r+\delta)} \end{cases} \tag{58}$$

由于 $\pi_i < 2\pi_j$, 所以当 $\beta_2 < \pi_i/(2\pi_j - \pi_i)$ 时, $\overline{\Omega} > \Omega$. 因此 (c) 结论成立.

命题 7表明: 1) 由于零售商之间的广告竞争致使在两种博弈形式下零售商地方性广告投入的大小关系不确定, 其大小关系取决于零售商的边际利润以及广告竞争强度的大小; 2) 两种博弈下供应链系统利润的大小关系与系统参数相关, 在算例分析中将分析零售商之间的竞争强度对两种博弈下供应链利润的影响; 3) 当两个零售商之间在边际利润上具有一定差异时, 如 $\pi_i < 2\pi_j$, 而且当零售商之间的竞争强度较低时, 如 $\beta_2 < \pi_i/(2\pi_j - \pi_i)$, 合作博弈下制造商商誉高于 Stackelberg博弈下制造商的商誉, 同时, 合作博弈下商誉的方差也高于 Stackelberg博弈下的方差, 这说明合作博弈下有利于提高制造商的商誉, 同时供应链为提高商誉所带来的风险增大. 由 (a) 结论得如下推论.

推论　设 $\pi_i < 2\pi_j$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, 当 $\beta_2 > (\pi_j(r+\delta)(\lambda_i\theta_i + \beta_1) + 2\pi_i\theta_j\lambda_i)/((r+\delta)(2\pi_i - \pi_j))$ 时, $A_i^C > A_i^*$; 当 $\beta_2 \leqslant (\pi_j(r+\delta)(\lambda_i\theta_i + \beta_1) + 2\pi_i\theta_j\lambda_i)/((r+\delta)(2\pi_i - \pi_j))$ 时, $A_i^C \leqslant A_i^*$.

此推论说明, 当零售商之间在边际利润上差异较大时, 如 $\pi_i < 2\pi_j$, 那么零售商之间的广告竞争强度较大时, 如 $\beta_2 > (\pi_j(r+\delta)(\lambda_i\theta_i + \beta_1) + 2\pi_i\theta_j\lambda_i)/((r+\delta)(2\pi_i - \pi_j))$, 合作博弈下零售商投入的地方性广告大于 Stackelberg博弈下的广告投入; 而当零售商之间的广告竞争强度较低时, 如 $\beta_2 \leqslant (\pi_j(r+\delta)(\lambda_i\theta_i + \beta_1) + 2\pi_i\theta_j\lambda_i)/((r+\delta)(2\pi_i - \pi_j))$, 合作博弈下零售商投入的地方性广告小于 Stackelberg博弈下的广告投入. 这说明零售商之间的竞争强度影响了两种博弈下的广告投入的大小关系.

5　利润分配

由上一部分的分析可知, 当 $l_2 > e_2 + s_2^1 + s_2^2$ 时, 整个供应链系统的利润增加量为 $\Delta V = V^C(G) - (V_m^*(G) + V_1^*(G) + V_2^*(G))$, 三方将通过协商来确定此系统利润增量的分配, 以实现"共赢"的目标. 设制造商和零售商分得的增量利润分别为 ΔV_m 和 $\Delta V_i (i = 1, 2)$, 同时制造商和零售商的效用函数均采用常见的指数效用函数[18]

$$U_m(\Delta V_m) = 1 - \exp(-\phi_m \Delta V_m),$$
$$U_i(\Delta V_i) = 1 - \exp(-\phi_i \Delta V_i) \tag{59}$$

其中 $U_m(\Delta V_m)$ 和 $U_i(\Delta V_i)$ 分别表示制造商和零售商分得 ΔV_m 和 ΔV_i 增量利润的效用, ϕ_m, ϕ_i 分别表示制造商和零售商的风险规避程度. 供应链的目标为供应链的效用函数最大化, 即制造商和零售商效用函数的加权平均[18], 则供应链的利润分配模型可以表示如下

$$\begin{cases} \max\limits_{\Delta V_m, \Delta V_1, \Delta V_2} U(\Delta V_m, \Delta V_1, \Delta V_2) = \lambda_m U_m(\Delta V_m) + \lambda_1 U_1(\Delta V_1) + \lambda_2 U_2(\Delta V_2) \\ \qquad = 1 - \lambda_m \exp(-\phi_m \Delta V_m) - \lambda_1 \exp(-\phi_1 \Delta V_1) - \lambda_2 \exp(-\phi_2 \Delta V_2) \\ \text{s.t.}\ \lambda_m + \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \Delta V_m + \Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V \end{cases} \tag{60}$$

权重 λ_m, λ_i 分别表示制造商和零售商的谈判能力. 由式 (60) 求得最优的利润分配为

$$\begin{cases} \Delta V_m^* = \dfrac{\phi_1\phi_2}{\phi_m(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1\phi_2}\Delta V - \dfrac{\phi_2 \ln(\phi_1\lambda_1/(\phi_m\lambda_m)) + \phi_1 \ln(\phi_2\lambda_2/(\phi_m\lambda_m))}{\phi_m(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1\phi_2} \\ \Delta V_i^* = \dfrac{\phi_j\phi_m}{\phi_m(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1\phi_2}\Delta V + \dfrac{(\phi_j + \phi_m)\ln(\phi_i\lambda_i/(\phi_m\lambda_m)) - \phi_m \ln(\phi_j\lambda_j/(\phi_m\lambda_m))}{\phi_m(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1\phi_2} \end{cases} \tag{61}$$

如果 $(\phi_j + \phi_m)\ln(\phi_i\lambda_i/(\phi_m\lambda_m)) - \phi_m \ln(\phi_j\lambda_j/(\phi_m\lambda_m)) > 0$, 那么说明制造商给予零售商的利润补贴; 否则, 它表示零售商给予制造商的补贴.

6　算例分析

设供应链参数如下: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1.1$, $\mu_m = 1.2$, $\delta = 0.01$, $r = 0.05$, $\theta_1 = 0.3$, $\theta_2 = 0.25$, $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.35$, $\pi_1 = 0.6$, $\pi_2 = 0.5$, $\pi_m = 0.6$, $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.45$, $\lambda_m = 0.6$, $\beta_1 = 1$, $G = 1$. 本部分研究的目的在于探索 Stackelberg博弈下制造商和零售商以及合作与 Stackelberg博弈下的利润随零售商广告竞争强度系数 (β_2) 的变化趋势, 结果如图 2和 3所示.

由图 2可以看出, 零售商的利润随广告竞争

强度的增加是增加的, 而制造商的利润随广告竞争强度的增加是减小的. 因此, 制造商可以通过减少对零售商的地方性广告补贴以降低零售商之间的广告竞争. 由图 3得知, 当零售商之间的竞争强度比较低时, 合作博弈下供应链的总利润是高于Stackelberg博弈下供应链的总利润; 而当零售商之间的竞争强度比较高时, 合作博弈下供应链的总利润是低于 Stackelberg博弈下供应链的总利润. 这说明零售商之间的竞争不利于合作博弈下供应链利润的提升.

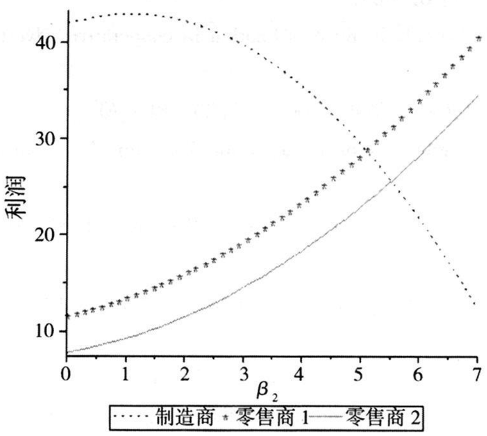

图 2　Stackelberg 博弈下各方利润随 β_2 的变化

Fig. 2 Changes of profits in Stackelberg game with β_2

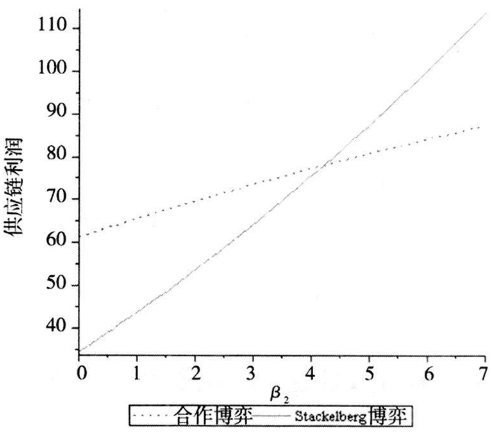

图 3　供应链利润随 β_2 的变化

Fig. 3 Changes of supply chain's profits with β_2

7　结束语

本文利用随机微分对策理论研究了供应链中零售商竞争下的纵向合作广告问题, 建立了一个随机微分对策模型. 运用汉密尔顿 – 雅可比 – 贝尔曼方程分别求得了 *Stackelberg* 博弈和合作博弈下均衡的全国性广告投入、地方性广告投入、制造商商誉的期望值和方差以及商誉的概率分布函数以及 *Stackelberg* 博弈下的广告分担比例, 并对此两种博弈进行了比较. 研究发现: (1) 在 *Stackelberg* 博弈下, 零售商之间的广告竞争越激烈, 零售商投入地方性广告所带来的销量越少, 制造商没有动力为零售商分担更多的地方性广告, 制造商可以通过降低对零售商地方性广告补贴来抑制零售商之间的广告竞争; (2) 无论是 *Stackelberg* 博弈或是合作博弈, 当商誉的衰减程度比较高时, 投入广告不会增加其商誉, 反而其商誉会降低; 当商誉的衰减程度比较低时, 投入广告会增加其商誉, 一旦商誉达到一定程度, 投入更多的广告不会增加其商誉; (3) 在合作博弈下, 制造商的边际利润越高, 制造商的全国性广告投入、零售商的地方性广告投入以及供应链的总利润都越高, 零售商之间广告竞争强度系数越大, 地方性广告投入越少; (4) 当零售商之间广告竞争强度不是非常大时, 合作博弈下制造商商誉的期望及其稳定值分别大于 *Stackelberg* 博弈下制造商商誉的期望及其稳定值, 但其方差也大于 *Stackelberg* 博弈下商誉的方差; (5) 在一定条件下, 制造商具有一致渐进稳定的商誉概率分布函数; (6) 运用效用理论对合作博弈下的增量利润进行了划分. 本文可以从以下几个方面进行扩展: (1) 在本文的基础上考虑零售商价格竞争对合作广告的影响; (2) 在本文模型的基础上进行实证研究.

参 考 文 献:

[1]傅　强, 曾顺秋. 纵向合作广告的微分对策模型研究[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(11): 26- 33.
Fu Qiang, Zeng Shunqiu. Differential game models of the vertical cooperative advertising[J]. Systems Engineering—Theory and Practice, 2007, 27(11): 26- 33 (in Chinese)

[2]王　磊, 梁　樑, 吴德胜, 熊　立. 零售商竞争下的垂直合作广告模型[J]. 中国管理科学, 2005, 13(4): 132- 138

Wang Lei, Liang Liang, Wu Desheng, Xiong Li. Vertical cooperative advertising model under retailers' competition[J]. Chinese Journal of Management Science, 2005, 13(4): 132-138. (in Chinese)

[3] Davis R A. Retailers open doors wide for co-op[J]. Advertising Age, 1994, 65(32): 30-30.

[4] Somers T M, Gupta Y P, Herriott S R. Analysis of cooperative advertising expenditures: A transfer-function modeling approach[J]. Journal of Advertising Research, 1990, 30(5): 35-45.

[5] Top 100 advertisers[N]. Advertising Age, 1999-09-17. 16.

[6] Bergen M, John G. Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels[J]. Journal of Marketing Research, 1997, 34(3): 357-369.

[7] Huang Z M, Li S X. Co-op advertising models in manufacturer-retailer supply chains: A game theory approach[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 135(3): 527-544.

[8] Yue J F, Austin J, Wang M. Coordination of cooperative advertising in a two-level supply chain when manufacturer offers discount[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168(1): 65-85.

[9] Huang Z M, Li S X, Mahajan V. An analysis of manufacturer-retailer supply chain coordination in cooperative advertising[J]. Decision Sciences, 2002, 33(3): 469-494.

[10] 胡本勇，彭其渊. 基于广告-研发的供应链合作博弈分析[J]. 管理科学学报，2008, 11(2): 61-70.
Hu Benyong, Peng Qiyuan. Game analysis of cooperation based on R&D-advertisement in supply chain[J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(2): 61-70. (in Chinese)

[11] Jørgensen S, Sigue S P, Zaccour G. Dynamic cooperative advertising in a channel[J]. Journal of Retailing, 2000, 76(1): 71-92.

[12] Jørgensen S, Taboubi S, Zaccour G. Cooperative advertising in a marketing channel[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(1): 145-158.

[13] 张庶萍，张世英. 基于微分对策的供应链合作广告决策研究[J]. 控制与决策，2006, 21(2): 153-162.
Zhang Shuping, Zhang Shiying. Dynamic cooperative advertising strategies based on differential games in a supply chain[J]. Control and Decision, 2006, 21(2): 153-162. (in Chinese)

[14] Prasad A, Sethi S P. Competitive advertising under uncertainty: A stochastic differential game approach[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 123(1): 163-185.

[15] Chintagunta P K, Vilcassim N J. An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly[J]. Management Science, 1992, 38(12): 1230-1244.

[16] Erickson G M. Empirical analysis of closed-loop duopoly advertising strategies[J]. Management Science, 1992, 38(12): 1732-1749.

[17] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 武汉: 华中师范大学出版社，2001: 80-135.
Liao Xiaoxin. Stability Theory and Applications of Mathematics[M]. Wuhan: Central China Normal University Press, 2001: 80-135.

[18] Eliashberg J. Arbitrating a dispute: A decision analytic approach[J]. Management Science, 1986, 32(8): 963-974.

Vertical cooperative advertising model with competing retailers in supply chains with stochastic differential game

XIONG Zhong-kai[1], *NIE Jia-jia*[1], *XIONG Yu*[2]

1. School of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. School of Management, York University, UK

Abstract The vertical cooperative advertising in supply chains with stochastic differential game is studied and

(下转第 32页)

ii)，由式(4)可得 $p_A^u - p_B^u = \frac{\delta^u(1-h)(s_B^2 - s_A^2) + \alpha(1-h)(x_A - x_B)(s_A + s_B)^2}{(1-h)(s_A^2 + s_A s_B + h s_A s_B + s_B^2)}$，易得 $(x_A - x_B) \geqslant \frac{\delta^d(s_A^2 - s_B^2)}{\alpha(s_A + s_B)^2}$ 显然 $x_A \leqslant x_B$ 时，$s_A \leqslant s_B$ 成立. 命题 1得证.

命题 2

i) 下游市场中，当且仅当 $s_i - s_j \geqslant \frac{\delta^d(x_j^2 - x_i^2)}{\beta(1-h)(x_i^2 + x_j^2)}$ 时，$\pi_i^d \geqslant \pi_j^d$.

ii) 上游市场中，当且仅当 $x_i - x_j \geqslant \frac{\delta^u(s_j^2 - s_i^2)}{\alpha(s_i^2 + s_j^2 + 2h s_i s_j)}$ 时，$\pi_i^u \geqslant \pi_j^u$.

证明 对命题 2的 i)，证明 $\pi_A^d \geqslant \pi_B^d$ 时的情形. 将式(8)带入式(7)，相减可得

$$\pi_A^d - \pi_B^d = \frac{\delta^d(x_A + x_B)(x_A^2 - x_B^2) + \beta(1-h)(s_A - s_B)(x_A + x_B)(x_A^2 + x_B^2)}{(x_A)^2 + x_A x_B + (x_B)^2}$$

因为此式的分母大于零，当且仅当其分子也大于等于零时，$\pi_A^d \geqslant \pi_B^d$. 易得当且仅当 $s_A - s_B \geqslant \frac{\delta^d(x_B^2 - x_A^2)}{\beta(1-h)(x_A^2 + x_B^2)}$ 时，分子大于等于零. 所以当且仅当 $s_A - s_B \geqslant \frac{\delta^d(x_B^2 - x_A^2)}{\beta(1-h)(x_A^2 + x_B^2)}$ 时，$\pi_A^d \geqslant \pi_B^d$，i) 得证. 下面证 ii). 由将式(4)带入式(3)，相减可得

$$\pi_A^u - \pi_B^u = \frac{\delta^u(1-h)(s_A + s_B)(s_A^2 - s_B^2) + \alpha(1-h)(x_A - x_B)(s_A + s_B)(s_A^2 + s_B^2 + 2h s_A s_B)}{(1-h)(s_A^2 + s_A s_B + h s_A s_B + s_B^2)}$$

，易得当且仅当 $x_A - x_B \geqslant \frac{\delta^u(s_B^2 - s_A^2)}{\alpha(s_A^2 + s_B^2 + 2h s_A s_B)}$ 时，$\pi_A^u \geqslant \pi_B^u$. 命题 2得证.

(上接第 22页)

the stochastic differential game model is developed. The equilibrium national advertising input, local advertising input, expected goodwill and variance of manufacturer, as well as probability distribution function, are obtained in a Stackelberg game and cooperative game. The equilibrium advertising sharing rate is obtained in the Stackelberg game. The results between the Stackelberg game and cooperative game are compared. We finds that the local advertising of the retailer and the goodwill of the manufacturer in a Stackelberg game and cooperative game is related to the advertising competition coefficient. The probability distribution function of goodwill has evolutionary stability in certain conditions. At last, the incremental profit is divided between the retailer and the manufacturer by using utility theory.

Key words supply chain; cooperative advertising; advertising competition; stochastic differential game; Stackelberg game; cooperative game; Hamilton-Jacobi-Bellman