第 13卷第 6期
2010年 6月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol 13 No 6
Jun 2010

随机时间变换下的寿险精算模型①

于栋华, 吴冲锋, 陈湘鹏
(上海交通大学安泰经济与管理学院, 上海 200030)

摘要: 时间变换方法广泛应用于经济学和金融学领域中,但在保险方面几乎没有涉及. 而某些保险问题往往在等间隔的日历时间下的统计性质非常复杂,但是却可以找到某个适度的经济时间,使得在该经济时间标度下,保险问题具有简单清晰的统计结构. 因此,引入时间变换方法,就可以简化保险问题. 首次将时间变换引入寿险问题中,提出了一种新型的保险产品设计思路,即按照经济时间设计保险产品. 给出了经济时间标度下的相应寿险模型的定义、计算,并通过对等价利息力的定义,讨论了不同时间标度下寿险模型的转换关系. 最后,进一步给出了时间变换下破产概率问题的结果. 本模型可以应用于很多实践问题.

关键词: 时间变换; 生命保险; 生存年金; 破产概率
中图分类号: F840.62　文献标识码: A　文章编号: 1007-9807(2010)06-0064-09

0 引 言

时间变换概念起源于 20世纪 20年代经济学家们对超通货膨胀的研究, 例如: Allais[1]提出推进货币的时间标度应该是总产出指数. Barro[2]认为分析货币需求的合适的时间标度应该是通货膨胀. Mandelbrot和 Taylor[3]、Clark[4]提出资产价格行为的调整是基于经济时间, 而不是日历时间. 引入时间变换可以简化问题结构, 在经济时间下获得简单的统计性质. 例如, 在各种混合正态分布假设下, 经济时间标度下的目标过程是统计上易于处理的正态过程, 参见 Tauchen 与 Pitts[5]、Harris[6]、Lamoureux[7]、Luu[8]等, 而 Ané[9]的研究说明资产收益的正态性可以通过随机时间变化来恢复, Geman[10]则进一步考虑了隐含时间变换的可恢复性问题.

国内对时间变换的研究主要是吴冲锋等[11-16]提出的基于成交量进程的股价动力学模型, 提出了根据交易的时间、股价和成交量的三维空间建立标度变换, 从日历时间维度转换到成交量维度, 重新构造股价序列的研究方法, 把成交量融入到价格序列中, 体现量价配合的思想, 基于成交量股价序列的统计特性要比原来的序列更简单, 更容易刻画. 黄登仕[17]详细评述了金融市场标度理论的最新进展.

在保险问题中也存在着时间变换的思想, 存在着日历时间与经济时间的差别. 最常见的就是, 对于保费的收取, 可以是按照年份收取, 也可以是按照如月份、季度、半年等时间单位收取, 不同的缴费周期仅仅是因为采用了不同的时间单位来观察问题, 这实际上就是一种时间变换的思想, 只不过是一种最简单的线性时间变换. 再如, 对各种设备的使用情况进行分析时, 就不能简单的只考虑日历时间, 而应该考虑到不同时段的使用频率不同, 从而即使对相同长度的日历时间, 机器的磨损程度也是不同的, 这时就应该根据机器的使用频率对日历时间进行划分, 这也是一种时间变换方法, 只是现在是一种随机时间变换, 得到的是随机周期. 再如在汽车保险中确定保费费率时, 不同汽车的使用情况不能简单的仅仅考虑汽车使用的日

① 收稿日期: 2005-05-12; 修订日期: 2010-03-18.
作者简介: 于栋华(1976—), 女, 山东青岛人, 博士生. Email: yu_donghua@sm.mail.cn

历年限, 而应该注意到车子的行驶路程很重要, 为了考虑一个适用的精算模型, 就可以引入随机时间变换的思想, 按照汽车的行驶路程而不是日历时间来设计相应的保险产品, 比如按照每行驶单位车程调整保费费率、缴纳保费的新型保险产品.

最后, 对于寿险问题, 张洪涛[18]指出, 与财产保险不同, 人身保险具有变动的危险率, 因为危险是以死亡为基础测定的, 不同年龄的人死亡率不同, 特别是人到晚年, 死亡率更是加速度增加. 而现有的保险产品设计原则和寿险精算模型, 基本上没有考虑这种影响. 因此, 可以考虑对应于日历时间, 存在着一个经济时间, 经济时间的推进是由死亡率的变动决定的. 例如, 在经济时间下, 人的寿命服从 De Moivre定律, 经济寿命是一个服从均匀分布的随机变量, 而在日历时间下的寿命不是均匀分布, 在某些高死亡率下, 日历时间推进得慢, 寿命取值得概率大, 而在低死亡率时, 日历时间推进的快, 当然这种时间推进程度的不均匀产生的是一种随机时间变换, 不是简单的线性时间变换. 同样的, 在日历时间下, 由于死亡率的不均匀, 不是常数死亡率, 不能对寿命应用指数分布假设, 但是可以找到一个经济时间, 在经济时间下, 死亡率成为常数, 经济寿命就具有指数分布了. 此外许多因素对寿命的影响都可以看作是通过一种时间变换实现的, 比如人们生活水平或者医疗条件的变化等.

有了经济时间, 经济寿命的表述, 就可以根据其统计性质, 定义经济时间下的保险产品. 当然, 对于可以精确观测的经济时间, 可以直接在现实中应用经济时间保险产品, 比如汽车保险, 可以设计并直接应用车程保险产品. 但是, 对如某些问题, 经济时间不一定可以方便的观测到, 或者仅仅是一种理论结果, 而日历时间下的结果可以观测到, 这时经济时间保险产品就成为一种桥梁, 通过不同时间保险产品的关系, 得到日历时间下的保险产品的定价问题, 在现实世界中应用日历时间产品. 这种情况下, 研究经济时间是为了帮助简化日历时间下保险问题的统计性质, 以便对日历时间下的保险产品的定价有更好的认识, 从而更准确的定价.

1　日历时间下的寿险精算模型

寿险精算模型[19-20] 建立的一般思路是, 首先选定新生儿, 设其死亡年龄为 X, 已知其生存到了 x岁, 用 (x) 来表示年龄 x的生命, (x)的剩余寿命记为 T, 建立个体的生存分布 $S_X(x)$ 模型, 进而可以得出相应的危险率函数 $\mu(x)$、期望剩余寿命 $\mathring{e}_x$ 等.

$$\mu(x) = f_X(x)/S_X(x),$$

$$\mathring{e}_x = E[X - x \mid X > x] = E[T] \tag{1}$$

式中: $f_X(x)$ 是死亡年龄 X 的概率密度函数.

再根据货币的时间价值, 建立精算现值表达式, 就可以得到相应的生命保险 $\bar{A}_x$ 与生存年金 $\bar{a}_x$ 表达式 (以终身生命保险与终身生存年金为例)

$$\bar{A}_x = E[z_1] = E[\exp(-\delta_1 T)] \tag{2}$$

式中: δ_1 为利息力, z_1: 在 (x) 死亡时支付 1元的收益现值.

$$\bar{a}_x = E[y_1] = E[\bar{a}_{\overline{T}|}] \tag{3}$$

式中: y_1表示在 (x)活着时每年连续支付 1元的年金现值.

进而推导保费 $\bar{P}(\bar{A}_x)$ 与准备金 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ 模型.

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x / \bar{a}_x \tag{4}$$

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x) \cdot \bar{a}_{x+t} \tag{5}$$

根据理赔量的分布, 可以建立破产概率 $\psi(u)$ 模型.

$$U(t) = u + c_1 t - L_1(t),\ T = \min\{t: t \geqslant 0, \text{且 } U(t) < 0\},\ \psi_1(u) = P(T < \infty) \tag{6}$$

式中: u—— 初始盈余, c_1—— 连续支付率, $L_1(t)$—— 至时间 t为止的总理赔量.

2　经济时间下的生存模型

在日历时间下选择个体 (x), 其未来剩余日历寿命为 $T = X - x \mid X > x$. 随机过程 $S = S(t)$给出了日历时间为 t时的经济时间, 令第 i年对应的经济时间长度为 s_i, 显然 $s_i = s(i) - s(i-1)$, $i \in N$. 有了经济时间后, 就可以定义经济死亡年龄等.

定义 1　对于死亡年龄为 X 的个体 (x), 定义

$S = S(X) = s_1 + \cdots + s_X$ 为个体的经济死亡年龄, 称 $s = S(x)$ 为个体的经济年龄, 这里 s 为已知常数. 在经济时间下将个体记为 (s), 定义 $e = S - s \mid S > s$ 为个体 (s) 的未来剩余经济寿命.

显然, 个体 (s) 与 (x) 是同一个体, 只是观察的角度不同 ——经济时间与日历时间的不同. 根据定义 1, 未来剩余经济寿命与未来剩余日历寿命的关系为

命题 1 在定义 1下, 经济剩余寿命满足

1) 密度函数为

$$f_e(\tau) = \int f_{s(T)}(\tau \mid T = t) f_T(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

式中: $f_T(t)$ 为未来剩余日历寿命的分布密度, $f_S(s)$ 为未来剩余经济寿命的分布密度; 分布函数为

$$F_e(\tau) = \int F_{s(T)}(\tau \mid T = t) f_T(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

生存函数为

$$S_e(\tau) = \int S_{s(T)}(\tau \mid T = t) f_T(t)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

2) 危险率函数为

$$\mu(s) = f_S(s) / S_S(s) \tag{10}$$

3) 期望剩余经济寿命为

$$\begin{aligned} \mathring{e}_s &= E[S - s \mid S > s] \\ &= E[e] = E[s_1] \cdot E[T] \end{aligned} \tag{11}$$

3 经济时间下的生命保险与生存年金

类似于日历时间下对货币时间价值的考虑, 可以定义经济时间下的利息力 δ_2. 有了经济时间下的生存分布与利息力后, 就可以设计经济时间下的保险产品了. 首先, 考虑如下定义:

定义 2 经济时间下的终身生命保险 $\bar{A}_s$ 与终生生存年金 $\bar{a}_s$ 分别定义为

$$\bar{A}_s = E[z_2] = E[\exp(-\delta_2 e)] \tag{12}$$

式中: z_2——在 (s) 经济剩余寿命终止时支付 1元的收益现值.

$$\bar{a}_s = E[y_2] = E[\bar{a}_{e}] \tag{13}$$

式中: y_2——在 (s) 经济剩余寿命终止前每年连续支付 1元的年金现值.

命题 2 经济时间下终身生命保险与日历时间下终身生命保险的关系为

$$\bar{A}_s = \bar{A}_x @ [-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))] \tag{14}$$

式中: $\bar{A}_x @ [-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]$, 表示 $\bar{A}_x$ 计算时所用的利息力的大小 $[-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]$, 因为生命保险与生存年金的计算都是在相应利息力下进行的. 符号 @ 用于指出计算所用的利息力. $M_{s_1}(\cdot)$ 表示 s_1 的矩母函数.

证明

$$\bar{A}_x = E[\exp(-\delta_1 T)] = M_T(-\delta_1)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_s &= E[E[\exp(-\delta_2 e) \mid T = t]] \\ &= E[M_{s_1}(-\delta_2)^T] \\ &= E[\exp\{T \cdot \ln(M_{s_1}(-\delta_2))\}] \\ &= M_T[\ln(M_{s_1}(-\delta_2))] \end{aligned}$$

所以 $\bar{A}_s = \bar{A}_x @ [-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]$ 证毕.

命题 2指出, 将日历时间的终身生命保险中的利息力, 由 δ_1 换成 $-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))$ 就可得到经济时间中的终身保险的期望现值. 特别, 当 $-\ln(M_{s_1}(-\delta_2)) = \delta_1$ 时, 不同时间标度下的终身保险的期望现值相等. $-\ln(M_{s_1}(-\delta_2)) = \delta_1$, 等价于 $E[\exp(-\delta_2 s_1)] = \exp(-\delta_1)$, 其直观含义为: 单位日历时间上, 单位金额的经济现值的期望值等于其日历现值.

命题 3 经济时间下终身生存年金与日历时间下终身生存年金的关系为

$$\bar{a}_s = \frac{[-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]}{\delta_2} \cdot \{\bar{a}_x @ [-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]\} \tag{15}$$

证明 由定义 2, 对经济时间终身生存年金, $\bar{a}_s = \dfrac{1 - \bar{A}_s}{\delta_2}$ 成立. 再根据命题 2

$$\begin{aligned} \bar{a}_x @ [-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))] &= \frac{1 - \bar{A}_s}{[-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]} \\ &= \bar{a}_s \frac{\delta_2}{[-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]} \end{aligned}$$

即 $\bar{a}_s = \dfrac{[-\ln(M_{s_1}(-\delta_2))]}{\delta_2} \cdot \{\bar{a}_x @ [-\ln(M_{s_1} \times (-\delta_2))]\}$ 证毕.

特别, 当 $-\ln(M_{s_1}(-\delta_2)) = \delta_1$ 时, 即 $E[\exp(-\delta_2 s_1)] = \exp(-\delta_1)$, 不同时间生存年金

的期望现值满足 $\bar{a}_s = \frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \bar{a}_x$.

定义 3 (等价利息力) 由方程

$$E[\exp(-\delta_2 s_1)] = \exp(-\delta_1) \tag{16}$$

决定的利息力 δ_0, 称为等价利息力.

方便起见, 记净保费 $\bar{P}(\bar{A}_x)$ 为 $\bar{P}_x$, 准备金 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ 为 ${}_t\bar{V}_x$, 采用等价原则确定保费, 则

$$\bar{P}_s = \bar{A}_s / \bar{a}_s \tag{17}$$

$$_{s'}\bar{V}_s = \bar{A}_{s+s'} - \bar{P}_s \cdot \bar{a}_{s+s'} \tag{18}$$

命题 4 在等价利息力作用下, 日历时间与经济时间下, 净保费与准备金的关系为

$$\bar{P}_s = \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \bar{P}_x,\quad {}_{s'}\bar{V}_s = {}_{x'}\bar{V}_x \tag{19}$$

式中: x'为对应于经济时间长度 s'的日历时间长度, x'、s'为已知常数.

证明 根据命题 2 ~ 3, 在等价利息力的作用下

$$\bar{A}_s = \bar{A}_x,\quad \bar{a}_s = \frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \bar{a}_x,\quad \bar{A}_{s+s'} = \bar{A}_{x+x'},$$

$$\bar{a}_{s+s'} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \bar{a}_{x+x'}$$

所以 $\bar{P}_s = \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \bar{P}_x$, ${}_{s'}\bar{V}_s = {}_{x'}\bar{V}_x$. 证毕.

综上, 等价利息力, 可以将不同时间标度统一起来, 从而很容易的实现经济时间的精算现值与日历时间的精算现值的互相转换与计算. 当无法直接观测经济时间, 可以就通过这种转换关系, 计算相应的利息力, 在日历时间下应用经济时间保险产品.

4 破产概率

根据文献 [20], 日历时间的盈余过程为 (6), 即

$U_1(t) = u + c_1 t - L_1(t)$, $T = \min\{t: t \geqslant 0$, 且 $U(t) < 0\}$, $\psi_1(u) = P(T < \infty)$

所以, 对应的经济时间下的盈余过程为

$U_2(s) = u + c_2 s - L_2(s)$, $S = \min\{s: s \geqslant 0$, 且 $U_2(s) < 0\}$, $\psi_2(u) = P(S < \infty)$ (20)

假设发生理赔时, 每次理赔的大小为随机变量 Y

$$L_1(t) = Y_1 + \cdots + Y_{N_1(t)} \tag{21}$$

式中: $Y_i \sim$ i i d., $N_1(t)$为到日历时间 t为止的总理赔次数.

相应的经济时间下

$$L_2(s) = Y_1 + \cdots + Y_{N_2(s)} \tag{22}$$

式中: $N_2(s)$为经济时间 s为止的总理赔次数. 显然, 若 $S(t) = s$, 则 $N_2(s) = N_1(t)$.

引理 1 当$N_2(s)$为参数为 λ泊松过程时, $N_1(t)$的分布函数满足

$$P(N_1(t) = n) = \int e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} f_{s(t)}(s)\,\mathrm{d}s \tag{23}$$

引理 2 当 $S(t)$为独立平稳增量过程时, 若 $L_2(s)$为复合泊松过程时, 过程 $L_1(t)$也是独立平稳增量过程.

证明 $\forall\, 0 \leqslant t_1 < t_2$, 有

$$\begin{aligned} P(L_1(t_2) - L_1(t_1) \leqslant l) &= \int P(L_1(t_2) - L_1(t_1) \leqslant l \mid s(t_2) - s(t_1) = s) f_{s(t_2)-s(t_1)}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int P(L_2(s_2) - L_1(s_1) \leqslant l \mid s(t_2) - s(t_1) = s) f_{s(t_2)-s(t_1)}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int P(L_2(s) \leqslant l \mid s(t_2) - s(t_1) = s) f_{s(t_2)-s(t_1)}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= P(L_1(t_2 - t_1) \leqslant l) \end{aligned}$$

类似的, 可证明对 $\forall\, 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < t_4$,

$$P(L_1(t_2) - L_1(t_1) \leqslant l_1, L_1(t_4) - L_1(t_3) \leqslant l_2) = P(L_1(t_2 - t_1) \leqslant l_1) \cdot P(L_1(t_4 - t_3) \leqslant l_2)$$

综上, 过程 $L_1(t)$也是独立平稳增量过程. 证毕.

定义 4 (调节系数) 当经济时间下的理赔总量 $L_2(s)$为复合泊松过程, 经济时间进程 $S(t)$为平稳独立增量过程时, 则对应的日历时间下的调节系数定义 R_1为

$$\exp(R_1 c_1) = M_{L_1(1)}(R_1) \tag{24}$$

因为$M_{L_1(1)}(r) = E[E(\exp(rL_1(1)) \mid s(1) = s)] = M_{s_1}(\lambda M_Y(r) - \lambda)$, 所以方程 (24) 等价于

$$R_1 c_1 = \ln(M_{s_1}(\lambda M_Y(R_1) - \lambda)) \tag{25}$$

命题 5 在引理 1 ~ 2的条件下, 与经济时间对应的日历时间下的盈余过程 $U_1(t) = u + c_1 t - L_1(t)$, 满足

$$\phi_1(u) = \frac{\exp[-R_1 u]}{E[\exp[-rU_1(T)]T \leqslant t]} \tag{26}$$

成立.

证明　一方面, 因为 $E[\exp(-rU_1(t))] = \exp[-ru - rc_1 t] \cdot E[\exp(rL_1(t))]$

而

$$E[\exp(rL_1(t))] = M_{L_1(t)}(r) = \exp[t \cdot \ln(M_{s_1}(\lambda M_Y(r) - \lambda))]$$

所以

$$E[\exp(-rU_1(t))] = \exp[-ru - rc_1 t + t \cdot \ln(M_{s_1}(\lambda M_Y(R_1) - \lambda))]$$

根据定义 2, 当 $r = R_1$ 时, $E[\exp(-rU_1(t))] = \exp[-R_1 u]$.

另一方面,

$$\begin{aligned} E[\exp(rL_1(t))] &= E[\exp(rL_1(T)) \cdot \exp(rL_1(t) - rL_1(T)) \mid T \leqslant t] \cdot P(T \leqslant t) + E[\exp(rL_1(t)) \mid T > t] \cdot P(T > t) \\ &= E[\exp\langle rL_1(T) + (t-T) \cdot \ln(M_{s_1}(\lambda M_Y(r) - \lambda))\rangle \mid T \leqslant t] \cdot P(T > t) + E[\exp(rL_1(t)) \mid T > t] \cdot P(T > t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\exp(-rU_1(t))] = {} & E[\exp[-rU_1(T) - rc_1(t-T) + (t-T) \cdot \ln(M_{s_1}(\lambda M_Y(r) - \lambda))] T \leqslant t] \cdot P(T \leqslant t) + \\ & E[\exp(-rU_1(t)) \mid T > t] \cdot P(T > t) \end{aligned}$$

令 $r = R_1$ 且 $t \to \infty$, 则有

$$\exp[-R_1 u] = E[\exp[-rU_1(T)] \mid T \leqslant t] \cdot \phi_1(u)$$

证毕.

命题 5给出了时间变换下, 日历时间下破产概率的结果. 本文的结果扩展了文献 [20] 中的破产概率结果, 文献 [20] 中是在日历时间下的损失过程服从复合泊松过程的条件下得到的, 本文则进一步指出, 一定条件下, 当经济时间下的损失过程服从复合泊松过程时, 日历时间下的对应过程不再是复合泊松过程了, 但是其破产概率仍然具有类似性质. 命题 5进一步说明了引入时间变换到保险问题中, 方便的简化了损失过程的统计性质, 扩展了保险问题的研究范围.

5　实证研究

本节给出经济时间保险产品定价的一个实例, 具体说明为什么采用经济时间, 如何确定经济时间的大小, 如何确定等价利息力, 以及如何确定保险产品在不同时间上的价值. 基本数据为中国人口 1949 年 —2004 年的年死亡率, 其中 1949—1998 来源于《新中国 50年统计资料汇编》[21], 1999—2004 来源于《中国统计年鉴 - 2005》[22].

精算模型中常常假设个体的危险率函数恒为常数 μ, 此时在长度为 t的时间内, 相应的死亡率 d_t 就是

$$d_t = 1 - e^{-\mu \cdot t} \tag{27}$$

相应的, 也可以用死亡率 d_t 求得 μ

$$\mu = \frac{-\ln(1 - d_t)}{t} \tag{28}$$

由式 (27), 个体在不同年份的年死亡率是相同的. 但是现实中, 由于受经济、医疗条件、教育等因素的影响, 年死亡率一直是不断变化的[23]. 图 5-1给出了我国人口历年的年死亡率情况:

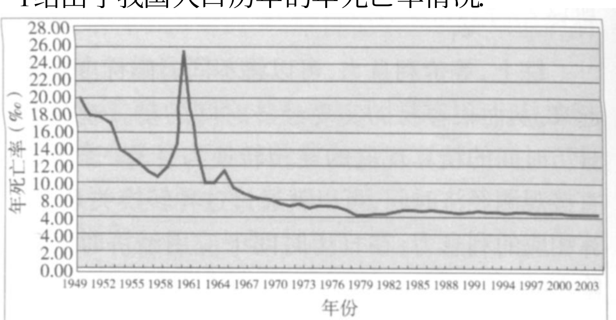

图 1　1949年 —2004年中国年死亡率变化图

Fig. 1 Yearly death rate of China from 1949 to 2004

图 1直观的说明了环境对死亡率的影响: 建国初期的死亡率一直较高, 最高处发生在三年自然灾害时期; 自 1978年以后死亡率逐步稳定, 而这正是我国实行改革开放政策时期; 20世纪 90年代后, 伴随着我国的经济和医疗卫生条件的不断改进和发展 —— 表现为人均国民收入、人均医院卫生院总床位数、人均医疗技术人员数等各项指标的相对提高, 同期的人口年死亡率也呈现相对下降趋势.

由于年死亡率不断变化, 因此必须对原有模

型进行调整, 此时经济时间方法就是一个不错的选择. 可以恰当的选择经济时间, 使得虽然危险率函数在常规时间下不是常数, 但是却在经济时间下为常数 μ_0. 参数 μ_0 的大小可以由所选择的参照标准来确定. 例如, 选择 1990年作为参照标准, 即假定 1990年在经济时间下的长度为一年. 由于 1990年的死亡率为 $d_0 = 6.67‰$, 根据式 (28), 得到 $\mu_0 = -\ln(1-d_0) = 6.69‰$. 参照标准的选择可以是任意的.

接下来研究如何确定经济时间, 也就是如何根据已知数据, 求出日历时间上的第 i年在经济时间上的时间进程 s_i. 事实上, 如果经济时间下的危险率函数为常数 μ_0, 那么由式 (27), 死亡率满足

$$1-e^{-\mu_0 s_i} = d_i \tag{29}$$

式中: d_i 为日历时间第 i年的死亡率. 由式 (29), $s_i = \frac{-\ln(1-d_i)}{\mu_0}$. 令 $\mu_i = -\ln(1-d_i)$, 那么 $s_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}$. 由式 (28), μ_i 可看作是由 d_i 所确定的年常数危险率. 因此, s_i 的大小取决于相对危险率: 如果某一年的危险率相对较大, 那么保险公司承担的风险也相对较高, 所以经济时间很好的描述了保险公司所承担的风险程度. 表 1给出了当参照标准为 1990年时, 某些年份的时间进程 (由于篇幅所限, 其他年份没有一一列出).

表 1 **1949年 —2000年部分年份的时间进程表**

Table 1 Comparison of time process from 1949 to 2000

年份	日历时间进程	经济时间进程
1950	1	2.71
1960	1	3.85
1970	1	1.14
1980	1	0.95
1990	1	1
2000	1	0.97

接着, 确定 s_i的分布. 如果以 1978年为界, 将 s_i数据划分为两组, 可以发现前一组与后一组有显著的差别 —— 前一组波动较大, 后一组则较为平稳. 两样本 KS检验结果 (表 2) 证明, 两组数据来自不同的分布.

表 2 两样本 **Kolmogorov-Smirnov**检验结果

Table 2 Result of two-sample Kolmogorov-Smirnov test

		Si
Most Extreme	Absolute	0.966
Differences	Positive	0.000
	Negative	-0.966
Kolmogorov-Smirnov Z		3.610
Asymp. Sig. (2-tailed)		0.000

注: 1949年 —2004年共 56个数据; 1949—1977为第 1组; 1978—2004为第 2组;

选择第 2组为研究对象, 进行单样本 KS检验 (表 3), 结果表明 s_i 服从均值为 0.981 9, 标准差为 0.027 04的正态分布.

表 3 单样本 **Kolmogorov-Smirnov**检验结果

Table 3 Result of one-sample Kolmogorov-Smirnov test

		Si
N		27
Normal Parameters(a, b)	Mean	0.981 9
	Std. Deviation	0.027 04
Most Extreme	Absolute	0.120
Differences	Positive	0.120
	Negative	-0.119
Kolmogorov-Smirnov Z		0.623
Asymp. Sig. (2-tailed)		0.832

a) Test distribution is Normal

b) Calculated from data

有了 s_i的分布后, 根据式 (16) 就可以得到等价利息力应满足的关系式

$$-0.981\,9\delta_2 + 0.5 * 0.027\,04^2 * \delta_2^2 = -\delta_1$$

由于日历时间的利息力数据很容易得到, 因此根据此式就可以求出合理的经济时间利息力. 此外, 注意到左边第 2项的系数近于 0, 上式近似为 $\delta_1 \approx 0.981\,9\delta_2$. 其含义是直观的: 平均意义上, 日历时间的一年等于经济时间的 0.981 9年, 因此平均意义上, 日历时间的利息累积速率 δ_1 就是经济时间上累积速率 δ_2 的 0.981 9倍.

最后, 根据等价利息力关系, 就可以日历时间保险产品的价值. 表 4给出了不同时间保险产品的价值.

表 4 经济时间保险产品与日历时间保险产品的价值比较

(以 δ_1 = 3% 为例, 参照标准为 1990年)

Table 4 Comparison of product values between economic time and calendar time (For example, δ_1 = 3%, base time is 1990)

项目	经济时间	日历时间
保险产品定义的时间单位	经济时间年	日历时间年
等价利息力	3.06%	3%
死亡时支付 1 000元的终身生命保险	179.40元	179.40元
年支付 1 000元的终生生存年金	26 816.99元	27 353.33元
死亡时支付 1 000元的净保费	6.69元	6.56元

注: 所有数值保留两位小数;

上面给出了经济时间保险产品定价的一个实例. 必须注意的是, 在研究中实际上假定了所有个体都服从同样的生存分布. 这样, 在常数危险率下, 就可以用全国人口年死亡率来代替个体的年死亡率. 这样处理的原因, 一方面是较为简单, 不需要考虑个体的年龄等因素, 另一方面是由于人口统计非常困难, 可以进行实证研究的数据往往较少、还有一定的误差. 当然, 如果有更多的数据, 如每一年的平均期望寿命, 还可以设计其他的经济时间产品, 并且都可以采取与本节类似的思路:

(1) 对经济时间上的个体的寿命做出假设, 建立经济时间上的生存模型; 计算产品的经济时间价值;

(2) 选择参照标准, 估计该生存模型的参数;

(3) 根据日历时间数据, 求得经济时间进程;

(4) 估计经济时间进程的分布, 求得等价利息力关系;

(5) 根据等价利息力, 得到日历时间下的产品的价值;

6 结 论

本文首次将随机时间变换引入保险问题中, 给出了一种新型的保险产品设计原则, 即设计经济时间保险产品. 通过对经济时间下的相应精算现值的定义, 本文详细研究了经济时间与日历时间下各个精算模型之间的关系. 特别的, 等价利息力的定义, 可以方便的进行生命保险、生存年金、净保费和准备金的经济时间值与日历时间值间的相互转换, 实现随机时间标度与日历时间标度的统一, 间接的解决了当经济时间不可观测时, 经济时间保险产品的应用问题. 最后, 本文研究了经济时间变换对日历时间下的破产概率问题的影响, 通过本文对时间变换下相应调节系数的定义, 使破产概率仍然具有类似复合泊松过程的结果. 本模型可以应用于很多实践问题, 并可以进一步扩展. 对于生存分布, 可以研究不同时间标度下, 生存分布的不变性等. 另外, 还可以研究经济时间下定期保险与定期生存年金公式, 以及相应的等价利息力的定义. 对于破产模型, 可以进一步研究最大损失函数的不同时间标度分解的关系等. 除以上扩展外, 本文的思想还可以应用于设计新型的汽车保险产品.

参 考 文 献:

[1] Maurice A. A restatement of the quantity theory of money[J]. American Economic Review, 1966, 56: 1123 - 1157.

[2] Barro R J. Inflation, the payments period, and the demand for money[J]. Journal of Political Economy, 1970, 78: 1228 - 1263.

[3] Mandelbrot B B, Taylor H W. On the distribution of stock price differences[J]. Operations Research, 1967, 15: 1057 - 1062.

[4] Clark P K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices[J]. Econometrica, 1973, 41: 135 - 156.

[5] Tauchen G E, Pitts M. The price variability-volume relationship on speculative markets[J]. Econometrica, 1983, 51: 485 - 505.

[6] Harris L. Transaction data tests of the mixture of distributions hypothesis[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22: 127 - 141.

[7] Lamoureux C, Lastrapes W. Endogenous trading volume and momentum in stock-return volatility[J]. Journal of Business

and Economic Statistics, 1994, 12: 253-260.

[8] Luu J, Martens M. Testing the mixture-of-distributions hypothesis using realized volatility[J]. The Journal of Futures Markets, 2003, 23: 661-679.

[9] Ané T, Geman H. Order flow, transaction clock, and normality of asset returns[J]. Journal of Finance, 2000, 55(5): 2259-2284.

[10] Geman H, Madan D B, Yor M. Stochastic volatility, jumps and hidden time changes[J]. Finance Stochastics, 2002, 6: 63-90.

[11]吴冲锋, 吴文锋. 基于成交量的股价序列分析[J]. 系统工程理论方法应用, 2001, 10(1): 1-7.
Wu Chong-feng, Wu Wen-feng. An analysis of volume-based stock price[J]. System Engineering-Theory Methodology Applications, 2001, 10(1): 1-7. (in Chinese)

[12]吴文锋, 朱 云, 吴冲锋. 成交量与资产定价理论模型[J]. 预测, 2002, 21(4): 48-51.
Wu Wen-feng, Zhu Yun, Wu Chong-feng. Trading volume and asset pricing theory[J]. Forcasting, 2002, 21(4): 48-51. (in Chinese)

[13]王承炜, 吴冲锋. 中国股市价格—交易量的线性及非线性因果关系研究[J]. 管理科学学报, 2002, 5(4): 7-12.
Wang Cheng-wei, Wu Chong-feng. Linear and nonlinear granger causality test of stock price-volume relation: Evidences from Chinese markets[J]. Journal of Management Sciences in China. (in Chinese)

[14]吴冲锋, 王承炜, 吴文锋. 交易量和交易量驱动的股价动力学分析[J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 1-12.
Wu Chong-feng, Wang Cheng-wei, Wu Wen-feng. Trading volume and dynamic analytic method based on volume-driving prices[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 1-12. (in Chinese)

[15]吴文锋, 吴冲锋. 股价的成交量推进进程及其动力学分析[J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(4): 604-606.
Wu Wen-feng, Wu Chong-feng. Trading volume-driven of stock price and its dynamic analysis[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2003, 37(4): 604-606. (in Chinese)

[16]王承炜, 吴冲锋, 朱战宇. 混合分布理论研究[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(3): 335-339.
Wang Cheng-wei, Wu Chong-feng, Zhu Zhan-yu. Research on mixture distribution hypothesis[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(3): 335-339. (in Chinese)

[17]黄登仕. 金融市场的标度理论[J]. 管理科学学报, 2000, 3(2): 30-33.
Huang Deng-shi. Scaling and scale invariance in financial markets[J]. Journal of Management Sciences in China, 2000, 3(2): 30-33. (in Chinese)

[18]张洪涛, 庄作瑾. 人身保险[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2004: 10-11.
Zhang Hong-tao, Zhuang Zuo-jin. Personal Insurance[M]. Beijing: China Renmin University Press, 2004: 10-11. (in Chinese)

[19] [美] Bowers N L, 等. 精算数学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1996: 1-161.
Bowers N L, et al. Actuarial Mathematics[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1996: 1-161. (in Chinese)

[20] [美] Bowers N L, 等. 风险理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995: 80-99.
Bowers N L, et al. Risk Theory[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1995: 80-99. (in Chinese)

[21]国家统计局. 新中国 50年统计资料汇编[M]. 北京: 中国统计出版社, 1999.
National Bureau of Statistics of China. Comprehensive Statistical Data and Materials on 50 Years of New China[M]. Beijing: China Statistics Press, 1999. (in Chinese)

[22]国家统计局. 中国统计年鉴 2005[M]. 北京: 中国统计出版社, 2005.
National Bureau of Statistics of China. China Statistical Yearbook 2000[M]. Beijing: China Statistics Press, 2005. (in Chinese)

[23]江 蕾, 蒋远馨. 中国人口死亡率与经济发展水平关系的实证研究: 1952—2002[J]. 中国人口科学, 2005, 增刊: 179-183.
Jiang Lei, Jiang Yuan-xin. Empirical study of the relationship between population death rate and economical development

1952—2002[J]. Chinese Journal of Population Science, 2005, supplement 179 - 183. (in Chinese)

Life actuary models under time deformation

YU Dong-hua, WU Chong-feng, CHEN Xiang-peng
Antai College of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

Abstract Although time deformation methods are widely used in the fields of Economics and Finance, it rarely appears in the fields of insurance. It is noticed that under the calendar time some problems in insurance have very complicated statistical properties in equal intervals. But we can find a proper time scale named economical time and under this new time scale, these problems will now have simple and explicit statistical structures. So, by the introduction of time deformation, we can simplify the structures of insurance problems. In this paper, we apply time deformation methods into the fields of life insurance for the first time and propose a new idea for designing insurance products. That is to design insurance products under the economical time scale. First we give the definition and calculation methods under the scale of economical time for actuary models including whole life insurances, whole life annuities and the according premiums and reserves, etc., and then we concentrate on the relationships between different scales and give the definition of equivalent interest force. We find that the equivalent interest force is an important instrument for time deformation. Finally, we give the result of the ruin probability under time deformation. Our models can be applied in many practical situations.

Key words time deformation; life insurance; life annuities; the ruin probability