战略顾客下最惠顾客保证对提前购买的价值①

计国君，杨光勇
(厦门大学管理学院，厦门 361005)

摘要：百货行业与零售行业频繁降价促销使得顾客会评估产品未来可能的获得性与价格，典型特征是利用等待，跨期选择购买时机. 文中研究了顾客最大支付意愿事前异质和事后异质两种情形下最惠顾客保证的价值. 最惠顾客保证是指销售商一旦降价销售，就对提前购买的顾客给予价格差额补偿. 结论表明，在事前异质中，顾客理性购买. 即使顾客最大支付意愿低于销售价格，也倾向于提前购买. 最惠顾客保证通过创造隐性价格风险鼓励提前购买. 而在事后异质中，销售商提供部分退货补偿，顾客体验购买. 当顾客购买并保留的产品数量较小时，销售商的最优策略是降价销售剩余库存. 最惠顾客保证通过创造隐性配给风险诱导提前购买.

关键词：异质性；最惠顾客保证；战略等待；配给风险；支付意愿
中图分类号：F224.3；F253.4 文献标识码：A 文章编号：1007-9807(2010)07-0016-10

0 引 言

百货行业与零售行业频繁降价促销已将顾客训练得越来越理性，表现为利用战略等待以尽可能低的折扣价格购买所需产品. 对零售业节假日顾客的随机调查发现，尽管战略等待可能会面对产品缺货带来的巨大心理压力，由于会增加期望效用，超过 50%的顾客还是倾向于等待到最后时刻才购买[1]. 这种战略等待在其它行业也大量存在. 例如，对于汽车、家电产品等耐用品，顾客也表现出战略等待[2]；另外，竞争压力加剧以及产品生命周期缩短迫使销售商将折扣销售常态化，进一步刺激顾客战略等待，从而增加产品供需不匹配程度. 这给销售商运营管理带来不利影响.

针对顾客战略等待，销售商已采用各种策略鼓励提前购买. 总体来说，这些策略大体分为两种：故意制造短缺和动态定价. 例如，西班牙的 ZARA 就以故意制造短缺闻名. 也有一些销售商运用价格补偿机制打消顾客战略等待，价格补偿机制包括：事前补偿(如直接降价)以及事后补偿(如价格差额补偿)[3]. 最惠顾客(most favored customer, MFC)保证就是一种事后补偿机制，是指保证那些提前购买的顾客，将从以后的降价销售中受益，即销售商承诺一旦降价销售，就对提前购买的顾客给予价格差额补偿. 例如，Best Buy对其电子产品、Gap对其流行服装、Priceline.com对其旅行机票都提供了 MFC保证[4]，鼓励顾客提前购买. 本文研究销售商通过 MFC保证所创造的隐性价格风险和配给风险来鼓励顾客提前购买，以期实现供给与需求得以更好地匹配.

与本文相关的研究主要反映在：1)用动态定价模型分析顾客战略等待对运营管理的影响，包括：Jerath 等研究了企业通过不透明代理商(opaque intermediary)进行最后时刻销售，能减轻顾客战略等待[5]；Su研究了同时存在投机者与战略顾客下的动态定价模型[6]，但忽略采购成本；Cachon等考虑了短视顾客(myopic customer)、战略顾客与询价顾客(bargain hunter)，认为企业即使能承诺价格路径，最好也运用动态降价策

① 收稿日期：2009-05-15；修订日期：2010-03-30.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70971111)；福建省自然科学基金资助项目(2009J01313).
作者简介：计国君(1964—)，男，安徽合肥人，博士，教授，博士生导师. Email: jiking@xmu.edu.cn

略[7]; Lai等以文献[7]结论为基础, 研究了价格匹配策略[4]; Elmaghraby等从顾客最大支付意愿基于信息对称与不对称两个视角研究了战略顾客下的多级最优降价机制[8]; Levin等运用动态定价模型研究了寡头企业向战略顾客销售易逝品[9]; Aviv等认为存在战略顾客时, 固定折扣策略总体上比应急定价策略更好[10]; Su假设产能固定, 发现迟钝顾客的存在会降低正常销售期的销售量, 却增强了折扣销售期产品竞争程度[11]; Su还研究了针对稳定消费模式的产品, 顾客以当前价格购买以后消费的动态定价模型[12]; 上述文献没有涉及顾客支付意愿事后异质, 也没有考虑MFC保证与退货保证.

2)与动态定价模型相对的是关注配给风险, 反映在, 刘晓峰等运用 Stackelberg博弈模型与机制设计理论研究了顾客战略等待行为对销售商库存与定价策略的影响, 发现增加配给风险能减轻等待行为[13]; Liu等认为销售商创造配给风险诱使顾客提前购买是其最优策略, 但该文假设需求确定和价格路径固定[2]; Su等发现数量承诺也能鼓励战略顾客提前购买[14], 该文假设价格路径固定, 关注配给风险; Su等研究了配给风险可能会影响顾客购买产品的积极性[3]; Yin等则通过调整销售店内产品陈列方式能人为控制产品可获得性, 从而创造配给风险[15]; 本文除考虑到已有文献针对的顾客事前异质情形外, 还研究了事后异质情形以及两种异质下 MFC保证的价值.

3)研究退货策略. Su认为顾客退货策略对企业库存决策有很大影响[16], 该文关注顾客事前同质, 也未涉及战略顾客; Swinney也研究了退货策略, 但重点是战略顾客下快速响应的价值[17]; Shulman等还从回收费用(restocking fee)策略研究了顾客购买以及退货决策[18]; 姚忠等认为风险约束下的回退策略对供应链的协调能力比无风险约束下要弱[19], 上述文献没有涉及 MFC保证.

4)研究 MFC保证. Levin等综合考虑动态定价与价格保证(即 MFC保证), 该文假设存货数量固定, 未涉及战略顾客[20]; Png关注无短期成本的服务产品, 研究了两点分布的事前异质顾客下 MFC保证的价值[21], 也假设存货数量固定, 本文则考虑存货数量内生确定, 探讨顾客最大支付意愿不确定下 MFC保证与退货保证的组合策略.

1　问题描述

考虑单个销售商(以下简记为 S)在两期销售一种产品. 根据顾客购买行为, 用 EP 表示顾客以正常价格 p 购买的提前购买期, PP 表示以折扣价格 s购买的延迟购买期. S在 PP期有两种选择: 1)以 s降价销售 EP期末的剩余库存 I, 但必须对 EP期购买的顾客给予 $P-S$ 的价格差额补偿; 2)不降价销售 I, 此时, 不对 EP 期购买的顾客给予补偿. 假设采购提前期很长, S只有一次采购机会, 需要决策初始存货数量 q, 单位采购成本 c.

假设需求市场由大量顾客组成, 忽略单个顾客对市场的影响, 用 X 表示顾客数量为连续随机变量, 其分布函数与概率密度函数分别为 $F(\cdot)$ 与 $f(\cdot)$, $\bar{F}(\cdot)=1-F(\cdot)$. 所有顾客都具有战略性, 即根据 PP期产品可获得概率来比较 EP 期与 PP 期的期望剩余, 从而跨期选择购买时机. 顾客最大支付意愿②(以下简记为 MWP) v为连续随机变量, 不随时间发生变化, 其分布函数和概率密度函数分别为 $G(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$, $\bar{G}(\cdot)=1-G(\cdot)$, 这对 S和其他顾客是共同知识. 假设战略顾客具有两个特征: 1)风险中性; 2)理性预期 PP期产品可获得性, 即对获得产品的概率的信念与均衡可获得性一致. 该假设由 Muth[22] 提出, 也用于文献[4-10, 13-17]等研究中. 假设在PP期, 当需求超过剩余库存时, 顾客获得产品的概率相同.

2　顾客 MWP事前异质下 MFC保证的价值

顾客 MWP事前异质(ex ante heterogeneity)是指顾客在购买前就存在异质性, 此时, 顾客理性跨期购买; 而事后异质(ex post heterogeneity)则是指顾客购买前具有同质性, 购买后明白其

② 顾客最大支付意愿(maximum willingness to pay, MWP)是指购买产品所愿意支付的最高价格, 这可以从两个方面来理解: 1)从消费产品中获得的效用; 2)顾客自己对产品认可的价值.

MWP,从而体现异质性,这也可称为体验购买.

考虑如下事件顺序:

1)S首先决定 q,并承诺一旦降价处理 I,就对提前购买的顾客给予 $p-s$ 补偿;2)如果 X 超过 q,顾客不能获得产品,离开市场;3)PP 期开始时,S根据 EP 期实际销售信息决定是否降价处理 I,如果降价销售,需要决策最优 s,此时,战略等待的顾客以 s 购买产品;如果不降价处理 I,则不对 EP 期顾客给予补偿,等待的顾客不能在 PP 期购买产品.

2.1 战略顾客购买选择

战略顾客通过理性预期 PP 期获得产品的概率 ξ_{sr} 来跨期选择购买时机.

2.1.1 S不提供MFC保证情形

用 v_N 表示S不提供MFC保证时,战略顾客的MWP.此时,战略顾客在 EP 期购买产品必须满足如下条件

$$v_N - p \geqslant \xi_{sr}(v_N - s) \tag{1}$$

1)如果 $\xi_{sr} \in [0,1)$,则

$$v_N \geqslant \frac{\xi_{sr}(p-s)}{1-\xi_{sr}} + p \tag{2}$$

2)如果 $\xi_{sr}=1$,式(1)退化为 $v_N - p \geqslant v_N - s$,由于 $p > s$,则 $v_N \to +\infty$.

令

$$v_N^* = \begin{cases} \dfrac{\xi_{sr}(p-s)}{1-\xi_{sr}} + p & \text{如果 } \xi_{sr} \in [0,1) \\ +\infty & \text{如果 } \xi_{sr} = 1 \end{cases} \tag{3}$$

2.1.2 S提供MFC保证情形

用 v 表示S提供MFC保证情形下战略顾客的MWP.此时,S在 PP 期有降价销售或不降价销售两种选择,战略顾客只能获得期望价格差额补偿 $(p-s)/2$.这样,战略顾客在 EP 期购买产品必须满足如下条件

$$v - p + (p-s)/2 \geqslant \xi_{sr}(v-s)/2 \tag{4}$$

由式(4)得到

$$v \geqslant v^*$$

其中

$$v^* = \frac{p + s(1-\xi_{sr})}{2-\xi_{sr}} \tag{5}$$

特别地,当 $\xi_{sr}=1$ 时,$v^* = p$.

直觉上说,由于S提供MFC保证以及 PP 期获得产品的概率减小,战略顾客更容易提前购买.下面引理1说明了这种性质.

引理1 1)如果S不提供MFC保证,①当 $\xi_{sr}=1$ 时,所有战略顾客都延迟购买;②当 $\xi_{sr} \in [0,1)$ 时,则存在MWP阈值 $v_N^* \geqslant p$,且当 $v \geqslant v_N^*$ 时,顾客在 EP 期购买;当 $v < v_N^*$ 时,顾客在 PP 期购买.

2)如果S提供MFC保证,存在MWP阈值 $v^* \leqslant p$,且MWP $v \geqslant v^*$ 的顾客提前购买;MWP $v < v^*$ 的顾客延迟购买.

3)当 $\xi_{sr}=1$ 或 $\xi_{sr} \in [0,1)$ 时 $v_N^* > v^*$.

证明 比较式(1)~(5),可得到引理1.

引理1表明:1)如果S不提供MFC保证,当 PP 期没有配给风险($\xi_{sr}=1$)时,没有顾客会提前购买;2)S提供MFC保证时,即使 PP 期没有配给风险,MWP高于销售价格 p 的顾客还是会提前购买,这源于S提供MFC保证使得提前购买的顾客总是能获得最低价格,不受降价风险影响;而且,提前购买还能增加获得产品的机会;3)S不提供MFC保证的MWP阈值高于提供MFC保证时的阈值($v_N^* > v^*$),即MFC保证下战略顾客更倾向提前购买.

以下部分的 v^* 简记为 v,首先分析S降价销售剩余库存时的最优折扣价格.

2.2 S在 *PP* 期最优折扣价格决策

S通过对战略顾客行为的理性信念 v 推断出 EP 期顾客需求比例为 $\bar{G}(v)$,则需求数量为 $\bar{G}(v)X$.1)当 $X > X_h = q/\bar{G}(v)$ 时,EP 期还有部分需求不能得到满足,此时 $I=0$,不考虑 PP 期定价;2)当 $X \leqslant X_h$ 时,$I>0$.S需要权衡降价销售所增加的收益与对提前购买的战略顾客的补偿支付来决策折扣价格.

命题1 假设S降价销售剩余库存,令 $X_l = q/\bar{G}(s_l)$,则 PP 期最优折扣价格 $s^*(X)$ 为

$$s^*(X) = \begin{cases} s_h & \text{如果 } X_l < X \leqslant X_h \\ s_l & \text{如果 } 0 < X \leqslant X_l \end{cases}$$

其中,$s_h = (X-q)\bar{v}/X$

$$s_l = \arg\max_{s<v}[s(v-s) - (p-s)(\bar{v}-v)].$$

命题1的证明过程见附录.

命题1表明:1)如果 EP 期需求 $X_l < X \leqslant X_h$,S在 PP 期以收益最大化确定折扣价格;如果 $X \leqslant X_l$,则以出清剩余库存确定折扣价格;2)表面上看,S提供MFC保证策略消除了战略顾客面临的价格风险,即能从 PP 期降价中获得价格差额补

偿, 但由于 S动态确定折扣价格以及是否会真正降价销售剩余库存, 实际上仍创造了隐性价格风险.

下面分析 S与战略顾客之间的理性预期均衡以及 MFC保证的价值.

2.3 MFC保证的价值

2.3.1 S在 PP 期降价销售情形

用 $\pi^S(q, v)$表示 S提供MFC保证并降价销售剩余库存 I的期望利润, 有

$$\pi^S(q, v) = pE\min(\bar{G}(v)X, q) - cq + \int_{X_l}^{X_h}[s_h(q-\bar{G}(v)X)-(p-s_h)\bar{G}(v)X]\,dF(X) + \int_0^{X_l}[s_l(G(v)-G(s_l))-(p-s_l)\bar{G}(v)]X\,dF(X) \tag{6}$$

式(6)中第 1项表示EP期期望收益, 第 2项表示总成本, 第 3和第 4项分别表示EP期 $X_l < X \leqslant X_h$与 $X \leqslant X_l$情形下降价销售 I得到的收益与对EP购买的顾客的价格补偿之差.

对式(7)化简, 得到

$$\pi^S(q, v) = \int_0^{X_l} s_l\bar{G}(s_l)X\,dF(X) - cq + \int_{X_l}^{X_h} s_h q\,dF(X) + pq\bar{F}(X_h) \tag{7}$$

根据命题 1, 顾客对在 PP期产品获得概率的信念 ξ_{pr}可进一步表示为

$$\xi_{pr} = \begin{cases} F(X_l) & \text{如果 } 0 < X \leqslant X_l \\ \displaystyle\int_{X_l}^{X_h}\frac{(q-\bar{G}(v)X)\,dF(X)}{[G(v)-G(s_h)]X} & \text{如果 } X_l < X \leqslant X_h \end{cases}$$

由于 S动态选择折扣价格, 所以战略顾客预期折扣价格为 $Es = F(X_l)s_l + [F(X_h) - F(X_l)]s_h$, 将 ξ_{pr}与 Es代入式(5), 得到战略顾客的最优购买行为

$$v[1+\bar{F}(q/\bar{G}(v))] = p \tag{8}$$

这样, S与战略顾客之间的理性预期均衡可转化为如下优化模型

$$\max\ \pi^S(q, v)$$
$$\text{s.t. 式(8)}$$
$$q > 0, s < v \leqslant p$$

2.3.2 S在 PP 期不降价销售情形

用 $\pi^{NS}(q, v)$表示 S提供 MFC保证但不降价销售剩余库存 I的期望利润, 则有

$$\pi^{NS}(q, v) = pE\min(\bar{G}(v)X, q) - cq \tag{9}$$

此时, S与战略顾客之间的均衡问题也可转化为

$$\max\ \pi^{NS}(q, v)$$
$$\text{s.t. 式(8)}$$
$$q > 0, s < v \leqslant p$$

2.3.3 均衡分析与 MFC保证的价值

运用文献[2]、文献[21]的假设, 即 X服从$[0, \bar{X}]$的均匀分布, 得到下面命题 2该假设为充分非必要条件. 接着的数值分析假设 X服从Gamma分布.

命题 2　1)如果 $\bar{v} < \varphi_1$, 则 $\pi^S(q, v)$是 q的拟凹函数, 最优存货数量 q^S由 $d\pi^S/dq = 0$确定, 战略顾客最优行为为MWP为 v^S; $\pi^{NS}(q, v)$也是 q的拟凹函数, 最优存货数量 q^{NS}由 $d\pi^{NS}/dq = 0$确定, MWP为 v^{NS}.

2)如果 $\varphi_1 \leqslant \bar{v} < \varphi_2$, 则 π^S是 q的递减凹函数, 而 π^{NS}仍是 q的拟凹函数.

3)如果 $\varphi_2 \leqslant \bar{v} < 2p$, 则 π^S与 π^{NS}都是 q的递减凹函数, 其中,

$$\varphi_1 = \frac{3p^2}{2p+c},\quad \varphi_2 = p\left(\frac{p}{c}+1\right) - p\sqrt{\left(\frac{p}{c}+1\right)^2 - \frac{3p}{c}}.$$

注: 2)、3)中战略顾客最优MWP与 1)类似, 只是取值不同.

命题 2的证明过程见附录.

命题 2表明: 通过提供 MFC保证, S能够利用EP期最新需求信息来决定PP期是否降价销售剩余库存. 也就是说, S通过比较从PP期降价销售得到的收益与对提前购买顾客的补偿支付来判断EP期需求信息进而决策是否降价销售.

下面数值计算(见图 1)进一步表明EP期的需求是 S是否降价销售 I的主要因素. 参数设置为, X服从均值为 100, 标准差为 50的 Gamma分布, $v \sim U(0, 14)$, $c = 4$, $p = 10$

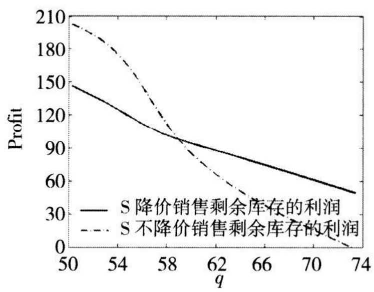

图 1　S降价销售与不降价销售剩余库存的利润比较

Fig. 1 Comparison of expected profits between discount and without discount

图 1表明: 1) 当存货数量较小时, EP 期需求较高 (通过式 (8) 可得), PP 期降价销售剩余库存得到的收益低于对 EP 期购买顾客的补偿支付, S 不降价销售. 此时, EP 期购买的战略顾客不能获得价格差额补偿, 这些以销售价格 p 购买的顾客成为销售商利润的主要来源; 2) 当存货数量较高时, 则 EP 期需求较低, S降价销售剩余库存. 此时, 提前购买与等待购买的战略顾客都能获得折扣价格.

以上分析假设已购买的顾客都不能退货, 这在一些行业中确有实践, 例如, 音像制品由于版权问题就不允许退货. 然而, 在有些行业, 如服装行业与电子行业, 很多企业已将退货保证看成主要运营策略, 这主要是基于退货保证能刺激更多顾客提前购买. 据《华尔街日报》[③]调查显示, 实际上只有 5% 的退货是产品质量缺陷问题, 绝大多数退货是其它原因, 如冲动性购买. 例如, Best Buy 允许 30 d内可以退货. 国内许多行业也提供退货保证. 接下来分析 S提供退货保证情形下 MFC保证对提前购买的价值.

3 顾客 MWP事后异质下 MFC保证的价值

假定顾客 MWP事后异质的事件顺序总体上与事前异质情形相同, 不同之处在于: 1) S的决策变量为初始存货数量 q 与销售价格 p; 2) 战略顾客在 EP 期购买产品并体验后, 明白 MWP, 然后决定保留产品或退货, 如果退货, 从 S获得部分退货补偿 a, 其中, $a < p$, 假设由于运营战略或市场竞争, S向顾客提供外生的退货保证; 3) 战略顾客退回的产品能再销售 (resale), 这样, PP 期可用于销售的产品数量为 EP 期末销售数量与退货数量之和; 4) 如果 S在 PP 期降价销售, 只对 EP 期保留产品的顾客给予价格差额补偿.

用下标"r"表示退货保证情形, 仍用 v表示顾客 MWP为连续随机变量, 分布函数和概率密度函数分别为 $G(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$, 不随时间变化. 假设 MWP的期望值 $Ev = \mu$. 战略顾客是否在 EP 期购买取决于 S提供的退货保证与 MFC保证.

③ Lawton C. The war on returns. Wall Street Journal, May 8, 2008

3.1 战略顾客购买决策

当 S提供退货保证时, 战略顾客虽能理性预期 PP 期产品可获得概率为 $F(q/\bar{G}(a))$, 但并不知道 S是否会真正降价销售. 这样, 战略顾客在 EP 期与 PP 期购买产品的期望剩余分别为 $E\max(v, a) - p + \frac{\bar{G}(a)(p-s)}{2}$ 与 $[F(\frac{q}{\bar{G}(a)})(\mu - s)]/2$, 则在 EP 期购买产品必须满足如下条件

$$E\max(v, a) - p + \frac{\bar{G}(a)(p-s)}{2} \geqslant \frac{F(\frac{q}{\bar{G}(a)})(\mu - s)}{2} \tag{10}$$

由式 (10), 得到

$$p = \frac{E\max(v, a) - \frac{1}{2}F(\frac{q}{\bar{G}(a)})(\mu - s) - \frac{1}{2}\bar{G}(a)s}{1 - \frac{1}{2}\bar{G}(a)} \tag{11}$$

式 (11) 中的销售价格 p 是 S所能制定的最高价格.

对 p 关于 q求导, 得

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{f(q/\bar{G}(a))(\mu - s)}{(2 - \bar{G}(a))\bar{G}(a)} < 0$$

$$\frac{d^2p}{dq^2} = -\frac{f'(q/\bar{G}(a))(\mu - s)}{(2 - \bar{G}(a))\bar{G}^2(a)}$$

假设市场需求密度函数 $f'(X) > 0$, 该条件为充分而非必要条件, 并且不小于 1次方的幂分布函数能满足该条件. 基于该假设, 有 $d^2p/dq^2 < 0$

3.2 MFC保证的价值

3.2.1 S在 PP 期降价销售情形

用 $\pi_r^S(q, p)$ 表示 S降价销售 I的期望利润, 则

$$\begin{aligned}\pi_r^S(q, p) &= p\tau + s[q - E\min(X, q)] + \\ &\quad (p - a + s)G(a)E\min(X, q) - \\ &\quad (p - s)\tau - cq \\ &= (p - a)G(a)E\min(X, q) + (s - c)q\end{aligned} \tag{12}$$

其中, $\tau = \bar{G}(a)E\min(X, q)$ 表示 EP 期保留的产品数量, 与 a与 q有关.

式(12)中第 1项表示 EP 期从保留产品得到的收益, 第 2项表示 PP 期降价销售收益, 第 3项表示从顾客退货中获得的收益, 第 4项则表示对保留产品的顾客给予的价格差额补偿, 最后项表示总成本.

这样, S与战略顾客之间的均衡问题可转化为如下优化模型

$$\max \pi_r^S(q, p)$$

s. t. 式(11)

3.2.2 S在 PP 期不降价销售情形

用 $\pi_r^{NS}(q, p)$ 表示 S不降价销售剩余库存 I 的期望利润, 则

$$\pi_r^{NS} = p\tau + (p-a)G(a)E\min(X, q) - cq$$

此时, S与战略顾客之间的均衡问题转化为如下优化模型

$$\max \pi_r^{NS}(q, p)$$

s. t. 式(11)

3.2.3 MFC保证的价值

基于上述两个优化模型, 得到下面命题 3.

命题 3 假设市场需求密度函数 $f(X)$ 递增,

1) π_r^S 是 q 的拟凹函数, 最优存货数量 q_r^S 由如下一阶条件确定

$$\frac{d\pi_r^S}{dq} = G(a)E\min(X, q)\frac{dp}{dq} + (p-a)G(a)\bar{F}(q) + (s-c) = 0 \quad (13)$$

且均衡销售价格为 p_r^S; π_r^{NS} 也是 q 的拟凹函数, 最优存货数量 q_r^{NS} 由如下一阶条件确定

$$\frac{d\pi_r^{NS}}{dq} = E\min(X, q)\frac{dp}{dq} - c + [p - aG(a)]\bar{F}(q) = 0 \quad (14)$$

且均衡销售价格为 p_r^{NS}, 其中, p_r^S, p_r^{NS} 由式(11)求得.

2) π_r^S 与 π_r^{NS} 都是 p 的拟凹函数.

命题 3的证明过程见附录.

命题 3表明了 S降价销售与不降价销售情形下战略顾客最优反应与均衡销售价格以及退货补偿直接相关.

下面命题 4则进一步表明 S在 PP 期是否降价销售取决于 MFC保证以及退货保证.

命题 4 存在退货补偿阈值 $a^* = \bar{G}^{-1}(s/p)$,

1) 当 $a > a^*$ 时, 利润差额 $\Delta\pi_r$ 是初始存货数量 q 的递增凸函数, 其中 $\Delta\pi_r = \pi_r^S - \pi_r^{NS}$.

2) 当 $a \leqslant a^*$ 时, $\Delta\pi_r$ 是 q 的拟凸函数.

命题 4的证明过程见附录.

命题 4表明: 1) 退货补偿越大, 随着初始存货量增加, S降价销售比不降价销售获得的利润更高. 这源于 S根据 EP 期保留产品数量较低的信息, 决定 PP 期最优策略是降价销售; 2) 退货补偿越低, EP 期保留产品的数量增加, S需要在降价销售更少剩余库存与补偿更多保留产品的顾客之间权衡.

3.2.4 扩展

以上分析假设所有提前购买的战略顾客都要求补偿, 但现实中, 由于各种原因, 只有一部分顾客需要补偿. 针对这种情形, 可以作如下分析: 假设顾客需要提出申请, 销售商才给予补偿, 此时, 需要补偿的顾客比例为 η, 其中, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

1) 上述研究可看成是 $\eta = 1$ 情形;

2) 当 $\eta < 1$ 时, 销售商给予的补偿支付更低, 所得到的利润更高. 这进一步表明不能获得价格差额补偿又以价格 p 购买的战略顾客是销售商的利润来源.

4　数值分析

通过数值分析, 比较存货数量 q 与退货补偿 a 不同组合下 MFC保证的价值. 参数设置如下: $s = 7$, $c = 7.2$, $v \sim U(8, 12)$, $X \sim N(100, 50^2)$.

图 2和图 3分别比较了 q 与退货补偿 a 不同组合下 S降价销售剩余库存、不降价销售剩余库存的利润以及二者的利润差额.

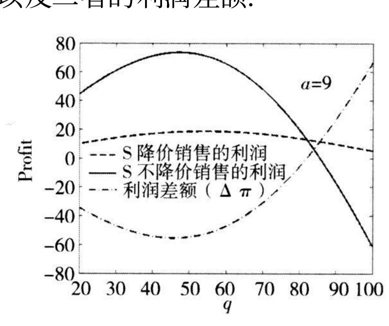

图 2　S降价销售与不降价销售剩余库存的利润比较

Fig. 2 Comparison of expected profits under discount and without discount case

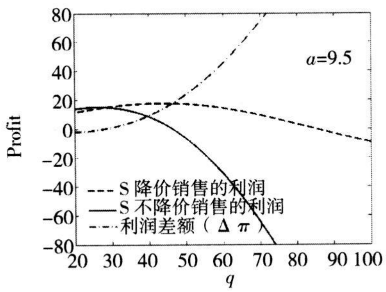

图 3 S降价销售与不降价销售剩余库存的利润比较

Fig. 2 Comparison of expected profits under discount and without discount case

图 2表明: 1) 当存货数量 q 较低时, S不降价销售比降价销售剩余库存的利润更大, 这主要是因为 EP 期保留产品的数量增加导致退货比例降低, 如果降价销售, 就需要对更多保留产品的顾客给予补偿, 另外, 由于 PP 期用于销售的产品数量减少, 从降价销售中得到的收益低于支付的补偿量, 所以, 不降价销售对 S更有利; 2) 当 q 较大时, S降价销售剩余库存的利润更大, 此时, EP 期保留的产品数量很小, 并且 p 随存货数量呈递减变化, 所以, 给予的价格差额补偿减少, 而增加的退货数量使得降价销售收益更大; 3) 当 q 足够大时, p 进一步降低, 甚至低于退货补偿 ($p < a$), 此时, 降价销售与不降价销售的利润均为负, 即这两种策略都不是 S的最优策略.

图 3表明: 1) 当存货数量 q 较小时, EP 期销售价格较高以及保留的产品数量增加, 此时, PP 期用于销售的产品数量减少, S的最优策略是不降价销售; 2) 随着 q 递增, 销售价格降低, PP 期可用于销售的产品数量大量增加, 降价销售对 S更有利; 3) 当 q 足够大时, 同样地, 是否降价销售都不是 S的最优策略.

比较图 2与图 3发现, 1) 随着退货补偿增加 (从 9到 9.5), 降价与不降价销售利润相等 (即 $\Delta\pi_r = 0$) 的点向左移动, 这说明降价销售在更大范围具有优势. 即退货补偿越高, S越需要降价销售更多的剩余库存; 2) 验证了命题 3与命题 4的结论; 3) S提供退货保证时, 降低存货数量直到低于某阈值以创造配给风险时, MFC保证的价值更大. 也就是说, MFC保证制造了隐性配给风险. 例如, 前面提到的 ZARA 也可以提供 MFC保证来鼓励提前购买.

通过对图 1、图 2与图 3的比较, 结论表明: S降价销售与不降价销售的最优范围相同, 验证了如下结论的稳定性. 即 S提供 MFC保证时, 如果 EP 期实际需求很小, PP 期降价销售; 否则, PP 期不降价销售.

与动态定价机制相比, S提供 MFC保证具有如下优势: 1) 弹性更大, 充分利用 EP 期需求信息, 即只在 EP 期需求很低时才降价处理剩余库存; 而动态定价机制, 只要 EP 期有剩余库存, 就会在 PP 期降价处理; 2) 更有助于向不熟悉产品的顾客传递高品质信号; 3) 维持公平性, 因为顾客总希望对同一产品支付相同价格. 此外, 随着互联网以及广告宣传的普及, 顾客获取 S的价格运行路径也比较容易, 这为 MFC保证的有效实施提供了便利条件.

5 结束语

顾客购买心态与购买行为越来越具有战略性, 表现为利用等待以尽可能低的价格购买产品, 从而实现消费者剩余最大化, 这使得企业的运营管理必须考虑顾客战略行为的影响. 理性购买与体验购买受到越来越多的关注, 因此, 本文考虑了顾客 MWP事前异质的理性购买和事后异质的体验购买对运营管理的影响. 研究结论表明: 当顾客理性购买时, 销售商通过创造隐性价格风险打消顾客战略等待行为; 顾客体验购买情形下 MFC保证能创造配给风险诱使提前购买.

基于本文内容, 可以从以下方面进行扩展: 研究顾客 MWP随时间贴现更能揭示顾客战略行为的动态影响; 研究顾客学习效应对销售商提高服务水平将起着重要作用; 考虑寡头垄断或多种异质顾客下 MFC保证; 检验分散型供应链中 MFC保证是否合适等也有一定的理论与实际意义.

参 考 文 献:

[1] Byrnes N, Zellner W. Playing the discount game[J]. Business Week, 2004, December: 13.

[2] Liu Qian, van Ryzin G. Strategic capacity rationing to induce early purchases[J]. Management Science, 2008, 54(6): 1115-1131.

[3] Su Xuanming, Zhang Fuqiang. On the value of commitment and availability guarantees when selling to strategic consumers[J]. Management Science, 2009, 55(5): 713-726.

[4] Lai Guoming, Debo L G, Sycara K. Buy now and match later: The impact of posterior price matching on profit with strategic consumers[J]. Manufacturing and Service Operation Management, 2010, 12(1): 33-55.

[5] Jerath K, Netessine S, Veeraraghavan S K. Revenue management with strategic customers: Last minute selling and opaque selling[J]. Management Science, 2010, 56(3): 430-448.

[6] Su Xuanming. Optimal pricing with speculators and strategic consumers[J]. Management Science, 2010, 56(1): 25-40.

[7] Cachon G, Swinney R. Purchasing, pricing, and quick response in the presence of strategic consumers[J]. Management Science, 2009, 55(3): 497-511.

[8] Elmaghraby W, Gulcu A, Keskinocak P. Designing optimal pre-announced markdowns in the presence of rational customers with multi-unit demands[J]. Manufacturing and Service Operation Management, 2008, 10(1): 126-148.

[9] Levin Y, McGill J, Nediak M. Dynamic pricing in the presence of strategic consumers and oligopolistic competition[J]. Management Science, 2009, 55(1): 32-46.

[10] Aviv Y, Pazgal A. Optimal pricing of seasonal products in the presence of forward-looking consumers[J]. Manufacturing and Service Operation Management, 2008, 10(3): 339-359.

[11] Su Xuanming. A model of consumer inertia with applications to dynamic pricing[J]. Production and Operation Management, 2009, 18(4): 365-380.

[12] Su Xuanming. Intertemporal pricing with strategic consumer behavior[J]. Management Science, 2007, 53(5): 725-741.

[13] 刘晓峰，黄　沛. 基于策略性消费者的最优动态定价与库存决策[J]. 管理科学学报，2009, 12(5): 18-26.
Liu Xiaofeng, Huang Pei. Optimal dynamic pricing and inventory policy under strategic customers[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(5): 18-26. (in Chinese)

[14] Su Xuanming, Zhang Fuqiang. Strategic customer behavior, commitment, and supply chain performance[J]. Management Science, 2008, 54(10): 1759-1773.

[15] Yin R, Aviv Y, Pazgal A, et al. Optimal markdown pricing: Implications of inventory display formats in the presence of strategic customers[J]. Management Science, 2009, 55(8): 1391-1408.

[16] Su Xuanming. Consumer returns policies and supply chain performance[J]. Manufacturing and Service Operation Management, 2009, 11(4): 595-612.

[17] Swinney R. Selling to Strategic Consumers when Product Value is Uncertain: The Value of Matching Supply and Demand[R]. Working Paper, Stanford University, 2009.

[18] Shulman J D, Coughlan A T, Canan S R. Optimal restocking fees and information provision in an integrated demand-supply model of product returns[J]. Manufacturing and Service Operation Management, 2009, 11(4): 577-594.

[19] 姚　忠. 风险约束下退货合同对供应链的协调性分析[J]. 管理科学学报，2008, 11(3): 96-105.
Yao Zhong. Analysis of return policy for coordinating supply chain under downside risk constraints[J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(3): 96-105. (in Chinese)

[20] Levin Y, McGill J, Nediak M. Price guarantees in dynamic pricing and revenue management[J]. Operations Research, 2007, 55(1): 75-97.

[21] Png I P L. Most favored customer protection versus price discrimination over time[J]. Journal of Political Economy, 1991, 99(5): 1010-1028.

[22] Muth J F. Rational expectations and the theory of price movements[J]. Econometrica, 1961, 29: 315-335.

On value of most favored customer guarantees to early purchase when selling to strategic customers

JI Guo-jun, YANG Guang-yong
School of Management, Xiamen University, Xiamen 361005, China

Abstract Department stores and retail industry's frequent promotions induce sophisticated consumers to evaluate product future possible availability and price and decide optimal inter-temporal purchase timing. This paper studies the value of most favored customer (MFC) guarantees to early purchase in both ex ante and ex post heterogeneity cases, where MFC refers to that, if seller salvages leftovers, consumers will benefit from this discounting. In the former case, where consumers rationally purchase a product, we show that consumers may purchase the product at the full price even if his maximum willingness to pay is lower than the full price. MFC guarantees discourage consumer's waiting behavior through creating implicit price risk. In the latter case, where the seller provides partial return policies and consumers buy and experience the product, we find that the seller prefers to salvage leftovers when products kept by consumers in the early period are weak. MFC guarantees encourage consumers to purchase early by creating implicit rationing risk.

Key words heterogeneity; most favored customer guarantees; strategic waiting; rationing risk; willingness to pay

附录:

命题1证明　由引理1可得, 延迟购买的战略顾客的MWP低于 v 当 $X \leqslant X_h$ 时, S在 PP 期有产品可以销售, 在 PP 期的收益 π_2 为

$$\pi_2 = \begin{cases} -(p-s)\bar{G}(v)X & \text{如果 } s \geqslant v \\ s\min[(G(v)-G(s))X,\ I] - (p-s)\bar{G}(v)X & \text{如果 } s < v \end{cases} \tag{A1}$$

由式(A1)得到, S在 PP 期只考虑 $s < v$ 情形, 则

$$\pi_2 = s\min[(G(v)-G(s))X,\ I] - (p-s)\bar{G}(v)X$$

假设 v 服从 $[0, \bar{v}]$ 上的均匀分布, 其中, $\bar{v} > p$.

1) 当 $X \leqslant q$ 时, 最优折扣价格 $s^* = s_l$, 其中,

$$s_l = \arg\max_{s<v} X[(s(v-s) - (p-s)(\bar{v}-v)]/\bar{v}$$

由于 $s(v-s) - (p-s)(\bar{v}-v)$ 为凹函数, 如果 $s_l < v$, 由一阶条件求得 $s_l = \bar{v}/2$;

2) 当 $q < X \leqslant X_h$ 时, 由 $[G(v)-G(s)]X = I$, 得到 $s_h = (X-q)\bar{v}/X$, 满足

$$\pi_2 = \begin{cases} sI - (p-s)\bar{G}(v)X & \text{如果 } s \leqslant s_h \\ [s(G(v)-G(s)) - (p-s)\bar{G}(v)]X & \text{如果 } s > s_h \end{cases}$$

如果 $s_h \leqslant s_l$, 最优折扣价格 $s^* = s_l$; 如果 $s_h > s_l$, 则 $s^* = s_h$. 由 $s_l = s_h$, 得到 $X_l = q/\bar{G}(s_l)$, 且当 $X < X_l$ 时, S以 s_l 定价; 当 $X \geqslant X_l$ 时, 以 s_h 定价.　证毕.

命题2证明　对式(8)中 q 关于 v 求导, 得到 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}v = \bar{X}(p/v^2 - 2/\bar{v})$. 假设 $v \in [\bar{v}/2, \sqrt{p\bar{v}/2}]$, 则 v 与 q 存在一一对应关系, 利用反函数导数性质, 得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{\bar{X}(\frac{p}{v^2} - \frac{2}{\bar{v}})},\quad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}q^2} = \frac{2p}{\bar{X}^2 v^3(\frac{p}{v^2} - \frac{2}{\bar{v}})^3}$$

其中, $q \in [\bar{X}(1 - p/\bar{v}),\ 2\bar{X}(1 - \sqrt{p/(2\bar{v})})^2]$.

计算式(7), 得到

$$\pi^S = [-\frac{3}{2} + \ln 2\bar{G}(v)]\frac{q^2\bar{v}}{\bar{X}} + (2\bar{v} - p - c)q + (p - \bar{v})\frac{pq}{v}$$

对 π^S 关于 q 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}\pi^S}{\mathrm{d}q} = -\frac{3\bar{v}}{\bar{X}}q + \frac{2\bar{v}q}{\bar{X}}\ln 2\bar{G}(v) - \frac{q}{\bar{X}}\frac{q}{\bar{G}(v)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q} + (2\bar{v} - p - c) + (p - \bar{v})\frac{p}{v} - (p - \bar{v})\frac{pq}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q} \tag{A2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\pi^S}{\mathrm{d}q^2} = -\frac{3\bar{v}}{\bar{X}} + \frac{2\bar{v}}{\bar{X}}\ln 2\bar{G}(v) + [2(p - \bar{v})\frac{pq}{v^3} - \frac{1}{\bar{v}\bar{X}}(\frac{q}{\bar{G}(v)})^2](\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q})^2 - [\frac{q}{\bar{X}}\frac{q}{\bar{G}(v)} + (p - \bar{v})\frac{pq}{v^2}]\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}q^2} - [\frac{4}{\bar{X}}\frac{q}{\bar{G}(v)} + 2(p - \bar{v})\frac{p}{v^2}]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q} \tag{A3}$$

因为 $v > s_l = \bar{v}/2$, 所以, $\bar{G}(v) < 1/2$, $\ln 2\bar{G}(v) < 0$. 令 Γ_1 和 Γ_2 分别表示(A3)中第3项和第4项, 即

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = Z_1 q(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q})^2 \tag{A4}$$

其中

$$Z_1 = \frac{2(p-\bar v)p}{v^3} - \frac{2p^2(p-\bar v)}{v^3(p-\frac{2v^2}{\bar v})} - \frac{2-\frac{p}{v}}{\bar v\bar G(v)} - \frac{2p(2-\frac{p}{v})}{v^3(\frac{p}{v^2}-\frac{2}{\bar v})}$$

$$= \frac{2p}{v(p-2v^2/\bar v)}(\frac{p}{v}-\frac{p}{\bar v/2}) - \frac{2v-p}{v(\bar v - v)}$$

由 $v > \bar v/2$, 得到 $p/v - 2p/\bar v < 0$, 所以 $\Gamma_1 + \Gamma_2 < 0$.

令 Γ_3 表示 (A3) 中第 5项, 则 $\Gamma_3 = Z_2 \mathrm{d}v/\mathrm{d}q$,

其中, $Z_2 = -\frac{4q}{\bar X\bar G(v)} - \frac{2(p-\bar v)p}{v^2} = -\frac{2\delta}{v^2}$,

$$\delta = 4v^2 - 2pv + p^2 - p\bar v, \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}v} = 8v - 2p > 0, \lim_{q\to\bar X(1-p/\bar v)}\delta =$$

$(\bar v - p)^2 > 0$, 所以 $Z_2 < 0$, 结合 $v < \sqrt{p\bar v/2}$, 得到 $\Gamma_3 < 0$, 即 $\mathrm{d}^2\pi^S/\mathrm{d}q^2 < 0$.

计算一阶边界条件

$$\lim_{q\to\bar X(1-p/\bar v)}\frac{\mathrm{d}\pi^S}{\mathrm{d}q} = \frac{3p^2}{\bar v} - 2p - c,$$

$$\lim_{q\to 2\bar X[(1-\sqrt{p/(2\bar v)})]^2}\frac{\mathrm{d}\pi^S}{\mathrm{d}q} = -\infty \quad (A5)$$

对 π^{NS} 关于 q 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}\pi^{NS}}{\mathrm{d}q} = p - c - \frac{p}{\bar X}\frac{q}{\bar G(v)} - \frac{p}{2\bar X\bar v}(\frac{q}{\bar G(v)})^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q} \quad (A6)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\pi^{NS}}{\mathrm{d}q^2} = -\frac{p}{\bar X\bar G(v)} - \frac{2pq}{\bar X\bar v\bar G^2(v)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q} - \frac{pq^2}{2\bar X\bar v\bar G^2(v)}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}q^2} - \frac{pq^2}{\bar X\bar v^2\bar G^3(v)}(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}q})^2 \quad (A7)$$

由于 (A7) 中各项都为负, 所以 $\mathrm{d}^2\pi^{NS}/\mathrm{d}q^2 < 0$. 计算一阶边界条件

$$\lim_{q\to\bar X(1-p/\bar v)}\frac{\mathrm{d}\pi^{NS}}{\mathrm{d}q} = \frac{3p^2 - 2\bar vp}{\bar v}\frac{p}{2p-\bar v} - c$$

$$\lim_{q\to 2\bar X[(1-\sqrt{p/(2\bar v)})]^2}\frac{\mathrm{d}\pi^{NS}}{\mathrm{d}q} = -\infty \quad (A8)$$

令 $\varphi_1 = \frac{3p^2}{2p+c}$, $\varphi_2 = p(\frac{p}{c}+1) - p\sqrt{(\frac{p}{c}+1)^2 - \frac{3p}{c}}$,

1) 如果 $\bar v < \varphi_1$, (A5) 与 (A8) 均为正, 则一阶边界条件异号, 得到 π^S 与 π^{NS} 都是 q 的拟凹函数.

2) 如果 $\varphi_1 \leqslant \bar v < \varphi_2$, (A5) 为负, π^S 是 q 的递减凹函数, 而 (A8) 为正, π^{NS} 仍是 q 的拟凹函数.

3) 结合 $v \in [\bar v/2, \sqrt{p\bar v/2}]$ 得到 $\bar v < 2p$. 如果 $\varphi_2 \leqslant \bar v < 2p$, (A5) 与 (A8) 均为负, 所以 π^S 与 π^{NS} 都是 q 的递减凹函数. 由于 v 与 q 的一一对应关系, 通过式 (8) 求得 1)、2) 与 3) 下战略顾客最优 MWP v^S 与 v^{NS}. 证毕.

命题 **3**证明　对 π_r^S 关于 q 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}\pi_r^S}{\mathrm{d}q} = G(a)E\min(X,q)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + (p-a)G(a)\times\bar F(q) + (s-c)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\pi_r^S}{\mathrm{d}q^2} = 2G(a)\bar F(q)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} - (p-a)G(a)f(q) + G(a)E\min(X,q)\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}q^2}$$

由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} < 0$ 与 $\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}q^2} < 0$, 所以 $\frac{\mathrm{d}^2\pi_r^S}{\mathrm{d}q^2} < 0$; 假设 $s < c$, 则 $\lim_{q\to 0}\frac{\mathrm{d}\pi_r^S}{\mathrm{d}q} = (p-a)G(a) + s - c > 0$, $\lim_{q\to+\infty}\frac{\mathrm{d}\pi_r^S}{\mathrm{d}q} = s - c < 0$, 得到一阶边界值异号. 所以, π_r^S 是 q 的拟凹函数, 由 $\mathrm{d}\pi_r^S/\mathrm{d}q = 0$ 确定的 q_r^S 使得 π_r^S 达到最大.

同样地对 π_r^{NS} 关于 q 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}\pi_r^{NS}}{\mathrm{d}q} = E\min(X,q)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} - c + [p - aG(a)]\bar F(q)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\pi_r^{NS}}{\mathrm{d}q^2} = 2\bar F(q)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + E\min(X,q)\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}q^2} - [p - aG(a)]f(q)$$

得到 $\frac{\mathrm{d}^2\pi_r^{NS}}{\mathrm{d}q^2} < 0$, 结合 $\lim_{q\to 0}\frac{\mathrm{d}\pi_r^{NS}}{\mathrm{d}q} = p - aG(a) - c > 0$, $\lim_{q\to+\infty}\mathrm{d}\pi_r^{NS}/\mathrm{d}q = -c < 0$ 得到 π_r^{NS} 也是 q 的拟凹函数, 存在唯一 q_r^{NS} 使得 π_r^{NS} 达到最大. 通过式 (11) 可求出均衡销售价格 p_r^S, p_r^{NS}.

接着证明 2), 对 π_r^{NS} 关于 p 求导, 得

$$\mathrm{d}\pi_r^S/\mathrm{d}p = (\mathrm{d}\pi_r^S/\mathrm{d}q)/(\mathrm{d}p/\mathrm{d}q),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\pi_r^S}{\mathrm{d}p^2} = \frac{\mathrm{d}^2\pi_r^S/\mathrm{d}q^2 - (\mathrm{d}^2p^2/\mathrm{d}q^2)/(\mathrm{d}p/\mathrm{d}q)}{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}q)^2} < 0.$$

当 $p < p_r^S$, $\mathrm{d}\pi_r^S/\mathrm{d}q < 0$, 则 π_r^S 是 p 的递增凹函数; 相反, 当 $p \geqslant p_r^S$ 时, $\mathrm{d}\pi_r^S/\mathrm{d}q \geqslant 0$, 得到 π_r^S 是 p 的递减凹函数, 综合这两种情形, π_r^S 是 p 的拟凹函数. 用类似的方法得到 π_r^{NS} 也是 p 的拟凹函数. 证毕.

命题 **4**证明　对 $\Delta\pi_r$ 关于 q 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\pi_r}{\mathrm{d}q} = -\bar G(a)E\min(X,q)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} - p\bar G(a)\bar F(q) + s,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta\pi_r}{\mathrm{d}q^2} = -\bar G(a)E\min(X,q)\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}q^2} - 2\bar G(a)\bar F(q)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + p\bar G(a)f(q) > 0$$

一阶边界条件为

$$\lim_{q\to 0}\frac{\mathrm{d}\Delta\pi_r}{\mathrm{d}q} = s - p\bar G(a),$$

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\mathrm{d}\Delta\pi_r}{\mathrm{d}q} = s > 0$$

1) 当 $\bar G(a) < \bar G(a^*) = s/p$ 时, 有 $-p\bar G(a) + s > 0$, 得到 $\Delta\pi_r$ 是 q 的递增凸函数; 2) 当 $\bar G(a) \geqslant s/p$ 时, 有 $-p\bar G(a) + s \leqslant 0$, 则存在 q^*, 当 $q < q^*$ 时, $\mathrm{d}\Delta\pi_r/\mathrm{d}q < 0$, 当 $q \geqslant q^*$ 时, $\mathrm{d}\Delta\pi_r/\mathrm{d}q \geqslant 0$, 所以, $\Delta\pi_r$ 是 q 的拟凸函数.

证毕.