

# 基于节点局域特征的复杂网络上相继故障模型<sup>①</sup>

王建伟, 荣莉莉, 王 铎

(大连理工大学系统工程研究所, 大连 116024)

**摘要:** 为了更好地探讨复杂网络抵制相继故障的全局鲁棒性, 基于节点的局域特征, 并紧紧围绕负荷这一影响连锁故障发生和传播最重要的物理量以及节点崩溃后的动力学过程, 提出了带有可调参数的相继故障模型. 数值模拟获得了复杂网络抵制相继故障的鲁棒性与模型中参数的关系以及网络的平均度对相继故障的影响. 此外, 基于不同网络图的分析以及理论解析的推导, 数值模拟结论也得到了验证.

**关键词:** 相继故障; 复杂网络; 负荷; 局域特征

**中图分类号:** N941.3   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1007-9807(2010)08-0042-09

## 0 引言

近年来, 复杂网络上的相继故障已经成为新兴的研究热点. 这是由于人们已经越来越意识到网络稳定性与安全性问题的重要性. 相继故障是指复杂网络中的一些节点或者边由于负载过大崩溃后, 会通过节点或者边之间的耦合(连接)关系, 造成“流”在节点或者边上重新分布, 进而引发其他节点或者边发生故障, 产生连锁反应, 并可能最终导致相当一部分节点甚至整个网络的崩溃. 因此, 节点或边的崩溃就会像瘟疫一样在整个网络上传播开来, 造成对网络的严重破坏. 例如 2008 年初我国南方电力网络的崩溃、北美电力网大崩溃事故<sup>[1]</sup>、因特网阻塞<sup>[2]</sup>、交通网络拥堵<sup>[3]</sup>以及 20 世纪 90 年代末爆发的亚洲经济危机等都可以从某种程度上认为是因相继故障所导致的灾难. 因此, 基于现实网络上相继故障特点, 建立比较普适的相继故障模型, 并基于模型探讨相继故障动力学特性, 已成为预防和控制相继故障的有效手段.

相继故障模型的构建主要需解决 3 个方面的

问题: 节点上初始负荷的定义; 节点崩溃后负荷重新分配的动力学过程; 节点能力与初始负荷之间的关联. 近几年来, 针对上述 3 个问题, 许多研究者对相继故障的控制与预防策略<sup>[4-7]</sup>、电力传输网络上的干扰<sup>[8]</sup>、描述相继故障现象的模型<sup>[9-17]</sup>、袭击策略的探讨<sup>[18-22]</sup>、网络抵制相继故障的优化<sup>[23-25]</sup>等进行了广泛的研究, 并得到了许多有价值的结论. 然而, 在以往的大多数研究中, 节点上的负荷基本上都定义为节点的度或介数(需要网络的全局信息); 崩溃节点上负荷的重新分配, 大多数按照最短路径的路由策略原则, 这就要求每个节点必须具有全局的网络信息. 而实际上, 现实的大多数网络, 一方面, 全局信息的获得是非常困难的; 另一方面, 仅仅依据节点本身度来定义节点上的负荷又过于简单(如图 1 所示). 因此, 寻求简单而有效的负荷赋予方式以及比较实际的负荷重新分配的原则是至关重要的.

最近, Wang 等<sup>[16]</sup>采用网络中每条边上初始负荷为边两个断点度乘积函数的形式, 并基于加权流局域重新分配的原则, 提出了简单的复杂网络边上的相继故障模型. 受他们思想的启发, 为了

① 收稿日期: 2008-08-21; 修订日期: 2009-09-13.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70771016, 70571011).

作者简介: 王建伟(1978—), 男, 辽宁阜新人, 博士生. Email: wjd@yahoou.cn

降低介数获取的复杂性, 并提高仅仅应用节点本身度的实用性, 本文提出了新的赋予节点初始负荷的度量方法. 新方法基于节点的局域特征, 不仅考虑了节点本身的度, 而且也关注了节点的邻居节点度对节点负荷的影响, 如图 1 所示. 由于网络中节点的介数与节点本身的度及它邻居节点的度总和乘积具有正相关的特性<sup>[26-27]</sup>, 因此, 新方法既符合了以往基于负荷的相继故障模型的研究, 又具有实际应用的简洁性. 在此基础上, 采用崩溃节点负荷局域择优重新分配的原则, 提出了带有可调参数的相继故障模型. 依据度量网络鲁棒性

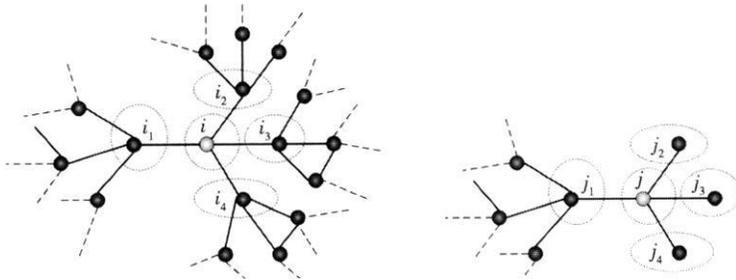


图 1 节点的局域特征对节点负荷的影响

Fig 1 Effect of node local characteristic for node load

## 1 相继故障模型

相继故障模型的构建主要需解决 3 个方面的问题: 节点初始负荷的定义; 节点崩溃后的动力学过程; 节点能力与初始负荷之间的关联. 对应这 3 个方面, 并鉴于上述的思想, 相继故障模型构建如下:

1) 为简便起见, 定义网络中节点  $i$  的初始负荷  $L_i$  为

$$L_i = \beta(k_i \sum_{m \in \Gamma_i} k_m)^\alpha \quad (1)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  是可调参数, 控制着节点初始负荷的强度.  $k_i$  和  $k_m$  分别表示为节点  $i$  和节点  $m$  的度, 而  $\Gamma_i$  则表示为节点  $i$  的邻居节点的集合.

2) 崩溃节点  $i$  上的负荷将依据下面的择优概率重新分配到它的邻居节点  $j$  上

$$\begin{aligned} \Pi_j &= \frac{\beta(k_j \sum_{m \in \Gamma_j} k_m)^\alpha}{\sum_{n \in \Gamma_i} \beta(k_n \sum_{j \in \Gamma_n} k_j)^\alpha} \\ &= \frac{(k_j \sum_{m \in \Gamma_j} k_m)^\alpha}{\sum_{n \in \Gamma_i} (k_n \sum_{j \in \Gamma_n} k_j)^\alpha} \end{aligned} \quad (2)$$

的新指标, 探讨了 Barabási 和 Albert<sup>[28]</sup> 无标度网络 (BA)、Watts 和 Strogatz<sup>[29]</sup> 小世界网络 (WS)、Newman 和 Watts<sup>[30]</sup> 小世界网络 (NW) 与 Erdős 和 Rényi<sup>[31]</sup> 随机网络 (ER) 上的全局相继故障现象. 数值模拟获得了 4 种网络达到最强抵制相继故障鲁棒性时参数的值, 并发现了 4 种网络抵制相继故障的鲁棒性与网络的平均度存在一定关联性. 此外, 数值模拟结果也得到了理论解析的验证. 相信本文的工作对更深入地探讨现实网络中连锁灾难的诱因和关键节点的保护具有更实际的应用价值.

因此, 根据 2) 的原则, 当节点  $i$  崩溃后, 它的邻居节点  $j$  收到的额外负荷  $\Delta L_{ji}$  为

$$\Delta L_{ji} = \beta(k_i \sum_{m \in \Gamma_i} k_m)^\alpha \times \frac{(k_j \sum_{m \in \Gamma_j} k_m)^\alpha}{\sum_{n \in \Gamma_i} (k_n \sum_{j \in \Gamma_n} k_j)^\alpha} \quad (3)$$

3) 节点能力与初始负荷之间的正比例关系. 在现实生活的网络中, 每个节点处理负荷的能力通常受到成本的限制, 因此, 很自然地假设网络中节点  $j$  的能力  $C_j$  正比于它的初始负荷, 即

$$C_j = TL_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

这里  $T$  的值大于等于 1 为网络的能力容许参数, 表示节点处理增加的负荷从而抵抗干扰的能力.  $T$  值越大, 一个节点的能力越大, 网络投入的总成本就越多. 因此, 寻求投入最少的成本, 而使网络达到最强抵制相继故障的鲁棒性, 是模型应用研究的重点所在.

由于网络中的每个节点处理最大负荷的能力都有一定限制, 所以, 对于节点  $j$  来说, 当它所收到的负荷加上本身边上的初始负荷大于它的处理能力时, 即  $L_j + \Delta L_{ji} > C_j$ , 节点  $j$  将失效, 并导致负荷

的进一步重新分配,从而可能会触发其他节点的瘫痪,形成连锁故障.为更好地探讨网络上的相继故障现象,初始仅仅移除一个节点  $i$  并在相继故障结束后计算  $CF_i$  (这里的  $CF_i$  表示为由节点  $i$  所导致的失效节点的数量),很显然,  $0 \leq CF_i \leq N - 1$  为了量化整个网络的鲁棒性,采用失效节点的归一化指标,即

$$CF_N = \frac{\sum_{i \in N} CF_i}{N(N-1)} \quad (4)$$

在相继故障模型中,对于较大  $T$  的值,任一节点的失效都不能够导致邻居节点的崩溃;而当  $T$  的值很小时,任一节点的失效都将会导致网络全局的崩溃,因此,提出新的度量指标,即关键阈值  $T_c$ .当  $T \geq T_c$  时,由于网络中每个节点有能力来处理额外的负荷,所以,没有相继故障发生,系统将保持它的正常的功能;而当  $T < T_c$ .由于每个节点的能力是有限的,  $CF_N$  突然从 0 迅速增长,并导致整个网络或部分网络失效.因此,这里的  $T_c$  是网络避免相继故障的采用节点能力的最小值.显然,  $T_c$  值越小,网络抵制相继故障的鲁棒性越强.

## 2 网络的生成

网络的拓扑结构在研究动力学过程中扮演着重要角色,所以,考虑一些典型的拓扑网络来更好地理解与控制因相继故障导致的灾难是至关重要的.本文主要聚焦在 4 种典型的复杂网络上,网络的描述如下:

1) (BA) 无标度网络 (Barabási和 Alber<sup>[28]</sup>). 网络的构造算法如下:

① 增长 从具有  $m_0$  个节点的网络开始,每次引入 1 个新的节点,并且连到  $m$  个已存在的节点上,这里  $m \leq m_0$ ;

② 优先连接 1 个新节点与已经存在的节点  $i$  相连接的概率  $\Pi_i$  与节点  $i$  的度  $k_i$ 、节点  $j$  的度  $k_j$  之间满足如下关系

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

网络的平均度  $\langle k \rangle = 2m$ .

2) (WS) 小世界网络 (Watts和 Strogatz<sup>[29]</sup>).

网络的构造算法如下:

① 从规则图开始 考虑含有  $N$  个节点的最近邻耦合网络,它们围成 1 个环,其中每个节点都与它左右相邻的各  $m$  节点相连;

② 随机化重连 以概率  $p$  随机地重新连接网络中的每个边,即将边的一个端点保持不变,而另一个端点取为网络中随机选择的一个节点.其中规定,任意两个不同的节点之间至多只能有 1 条边,并且每一个节点都不能有边与自身相连.

网络的边数为  $mN$ ; 网络的平均度  $\langle k \rangle = 2m$ .

3) (NW) 小世界网络 (Newman和 Watts<sup>[30]</sup>). 网络的构造算法如下:

① 从规则图开始 考虑含有  $N$  个节点的最近邻耦合网络,它们围成一个环,其中每个节点都与它左右相邻的各  $m$  节点相连;

② 随机化加边 以概率  $p$  在随机选取的一对节点之间加上一条边.其中,任意两个不同的节点之间至多只能有一条边,并且每一个节点都不能有边与自身相连.

网络的边数为  $mN + qN(N-1)/2$  网络的平均度  $\langle k \rangle = 2m + q(N-1)$ .

4) (ER) 随机网络 (Erdős和 Rényi<sup>[31]</sup>). 网络的构造算法如下:

① 初始条件  $N$  个孤立节点;

② 随机化加边 所有的节点对之间以概率  $p$  加边.

网络的边数为  $pN(N-1)/2$  网络的平均度  $\langle k \rangle = p(N-1)$ .

## 3 相继故障模型分析

在 4 种典型的网络中,为了对比研究不同网络拓扑结构上相变点  $T_c$ .采用了相同的网络规模  $N = 1000$  平均度  $\langle k \rangle = 4$  并且每一个结果都是在 20 个不同生成网络上相继故障数值模拟的平均结果.在相继故障模拟研究中,考虑到参数  $\beta$  并不会影响网络上的全局相继故障现象,因此,在数值模拟中忽略了参数  $\beta$  的取值.

### 3.1 参数 $\alpha$ 和 $T_c$ 之间的关联

在图 2 的子图 (b) 中,基于 4 种典型网络上参数  $\alpha$  和  $T_c$  之间的对比,可以得出:当  $\alpha = 0.5$  时,

4种网络都达到了最强的抵制相继故障的鲁棒性。为探讨不同拓扑结构对相继故障的影响,在  $\alpha = 0.5$  时,进一步对比了 4 种类型网络上  $T$  与  $CF_N$  之间的关系,如图 2 的子图 (a) 所示。可以看到,WS 网络表现出了比 BA、NW 以及 ER 网络更强的鲁棒性。WS 网络抵制相继故障的强鲁棒性主要源自于两个方面:节点度之间较小的差异性以及网络鲁棒性的度量方法。在网络规模有限性和少量网络连边(平均度较小)的情况下,WS 网络的演化机制导致了节点度之间的相似性,并使得网络中每个节点崩溃后产生的后果趋于一致;而对于 BA 网络而言,节点的最大度与最小度之间存在很大的差异,同时, NW、ER 网络又存在较大的不确定性,使得一旦度大的节点崩溃将更易于导致整个网络引发连锁故障。因此,在有限网络规模与较小平均度情况下,更均匀的网络将具有更强的抵制相继故障的鲁棒性。

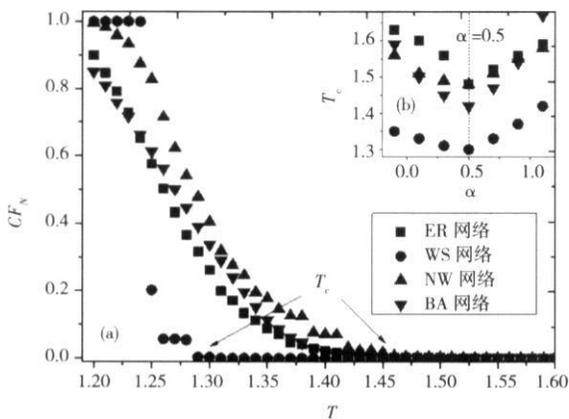
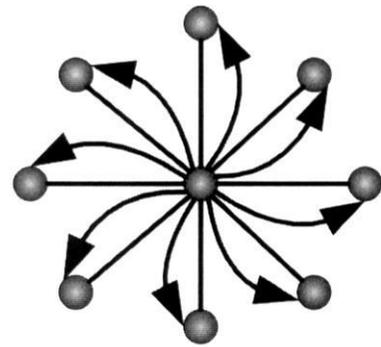


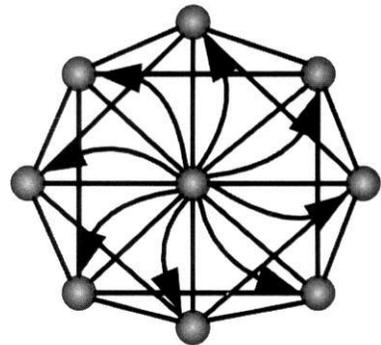
图 2 4种典型网络上参数  $\alpha$  和  $T_c$  之间的关系

Fig. 2 Relation between  $\alpha$  and  $T_c$  on four typical networks

再通过两个不同的网络图来解释这种现象,如图 3 所示, b 图对比于 a 图可以认为是较为均匀的网络(a 图最大度为 8 最小度为 1;而 b 图最大度为 8 最小度为 5)。当参数  $\alpha = 0.5$  时,依据模型中节点初始负荷的定义方法和崩溃节点上负荷的局域择优重新分配的原则,对比了两种网络度最大节点的失效对其邻居节点的影响。在 a 图中,当中心节点崩溃后,为了避免邻居节点产生连锁故障,能力容许参数  $T$  的最小取值为 0.353 6 而对于 b 图,能力容许参数  $T$  的最小取值仅为 0.235 7。可见,相对于不均匀的网络而言,更为均匀的网络将具有更强的抵制相继故障的鲁棒性。



(a) 较为不均匀网络中度大节点的崩溃



(b) 较为均匀网络中度大节点的崩溃

图 3 不同类型网络抵制相继故障的鲁棒性的对比

Fig. 3 Comparison among robustness against cascading failures of different networks

### 3.2 平均度对复杂网络上相继故障的影响

复杂网络上不同的拓扑特性对其上的物理行为都具有着重要影响,其中,网络平均度就是非常重要的指标。为进一步分析平均度与网络鲁棒性之间的关系,采用相同的网络规模  $N = 1000$  并在可调参数  $\alpha = 0.5$  的情况下,探讨了 4 种复杂网络上平均度  $\langle k \rangle$  与关键阈值  $T_c$  的关联性,如图 4 所示。

从图 4 中可以得出一个结论:关键阈值  $T_c$  与网络的平均度  $\langle k \rangle$  是负相关的,即:平均度  $\langle k \rangle$  越大,  $T_c$  值就越小,网络抵制相继故障的鲁棒性越强。在复杂网络上传播临界值理论的研究中,也可以看到类似结论,即:复杂网络上的传播临界值与网络平均度成反比关系<sup>[32]</sup>。结论的相似性也表明了网络上病毒传播行为与相继故障演化具有相似的动力学特征。

为比较直观地了解网络平均度在相继故障中所扮演的角色,通过 4 个具有不同网络平均度的网络图(如图 5 所示),对比避免相继故障浮现所需最小能力容许参数  $T$  的值。图 5 中,4 种图的网

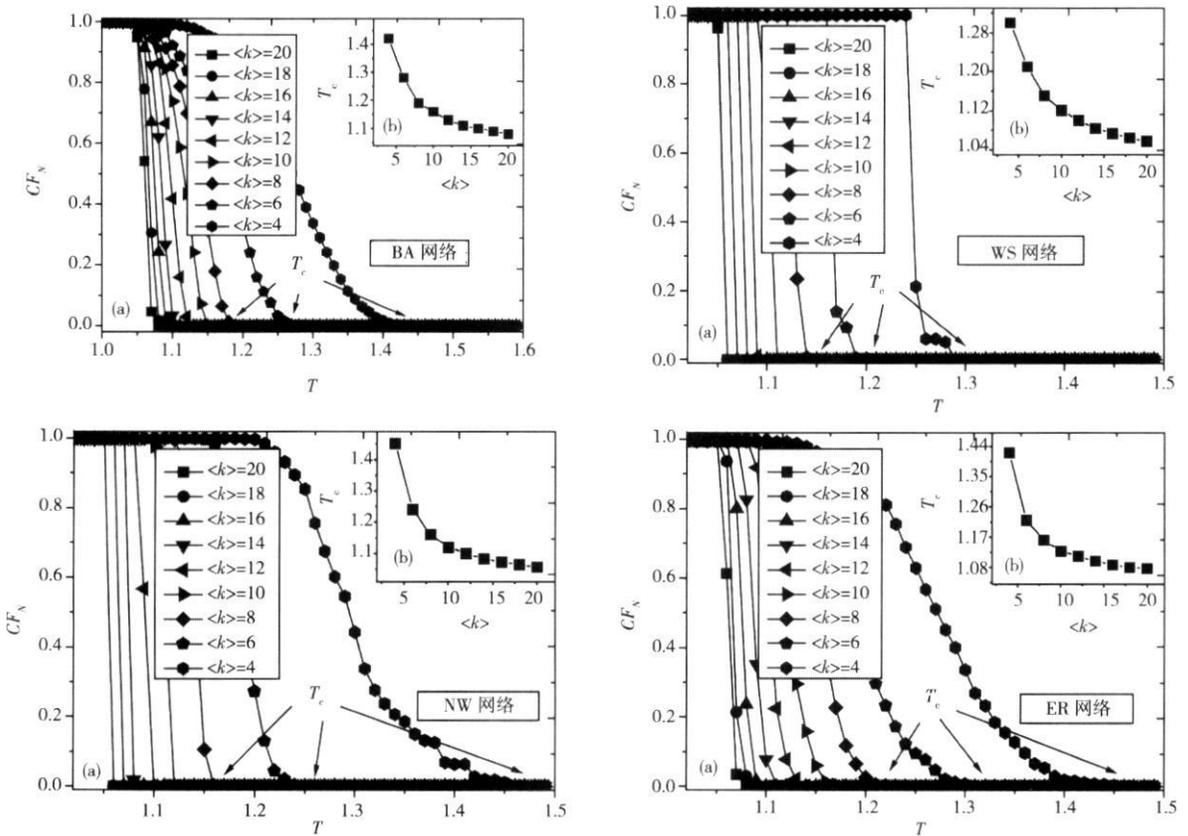


图 4 4种网络上平均度与关键阈值  $T_c$  之间的关系

Fig 4 Relation between average degrees of four networks and critical threshold  $T_c$ .

网络平均度  $\langle k \rangle$  分别为: 2 3 4和 5 并且, 每个子图中节点都具有相同的度. 当参数  $\alpha = 0.5$  时, 依据模型中节点初始负荷的定义方法和崩溃节点上负荷的局域择优重新分配的原则, 探讨了节点  $j_1, j_2, j_3$  和  $j_4$  的崩溃分别对其邻居节点的影响. 为了避免邻居节点产生连锁故障, 通过计算发现网络

图 (a), (b), (c) 和 (d) 所需最小能力容许参数  $T$  的值分别为: 0.5 0.33 0.25 和 0.2 可见, 网络的平均度越大, 能力容许参数  $T$  的值就越小, 因此, 网络抵制相继故障的鲁棒性也就越强. 平均度大的网络具有的强鲁棒性主要是由于网络较多的连接边使得崩溃节点拥有了更多的能够分担重新分

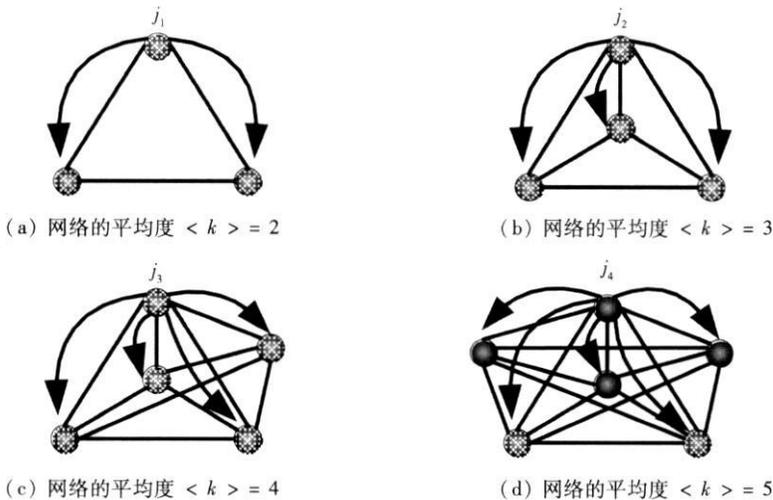


图 5 网络平均度对能力容许参数  $T$  的影响

Fig 5 Effect of network average degree for parameter  $T$ .

配的负荷的邻居节点,如图 5 所示, (a), (b), (c) 和 (d) 中节点  $j_1, j_2, j_3$  和  $j_4$  的负荷的重新分配将分别有 2 个, 3 个, 4 个和 5 个邻居分担, 所以, 平均度大导致的更多的分担额外负荷的邻接边使得网络具有了更强的抵制相继故障的鲁棒性。

### 4 理论解析

在数值模拟中, 相继故障模型得到了一些有价值的结论, 而这些结论的正确性还得需要从理论的角度进行验证. 考虑到节点  $i$  的失效对其邻居节点  $j$  的影响, 基于相继故障模型中节点能力的限制及崩溃节点上负荷的局域择优重新分配的原则, 当节点  $i$  失效后, 为避免相继故障的发生, 对于其中的一个节点  $j$  来说, 下面的条件应该被满足

$$L_j + \Delta L_{ji} < C_j \tag{5}$$

根据  $L_j$  和  $\Delta L_{ji}$  的定义, 上面的不等式 (5) 可以细化为

$$\beta(k_j \sum_{m \in \Gamma_j} k_m)^\alpha + \beta(k_i \sum_{n \in \Gamma_i} k_n)^\alpha \times \frac{(k_j \sum_{m \in \Gamma_j} k_m)^\alpha}{\sum_{n \in \Gamma_i} (k_n \sum_{f \in \Gamma_n} k_f)^\alpha} < T \beta(k_j \sum_{m \in \Gamma_j} k_m)^\alpha \tag{6}$$

不等式 (6) 可以简化为

$$1 + \frac{(k_i \sum_{m \in \Gamma_i} k_m)^\alpha}{\sum_{n \in \Gamma_i} (k_n \sum_{f \in \Gamma_n} k_f)^\alpha} < T \tag{7}$$

依据网络的度及概率知识, 可以得知

$$\sum_{n \in \Gamma_i} k_n = \sum_{k'=k_{min}}^{k_{max}} k_i P(k' | k_i) k' \tag{8}$$

这里的  $P(k' | k_i)$  表示度为  $k_i$  节点的邻接点度为  $k'$  的条件概率, 并满足归一化条件和平衡条件

$$\begin{cases} \sum_k P(k' | k_i) = 1 \\ k_i P(k' | k_i) P(k_i) = k' P(k_i | k') P(k') \end{cases} \tag{9}$$

由于 BA, WS, NW 和 ER 网络都具有度度无关的特性, 因此, 由归一化条件和平衡条件, 可知  $P(k' | k_i) = k' P(k') / \langle k \rangle$ . 所以, 可以获得等式 (8) 的另一种表达方式

$$\sum_{n \in \Gamma_i} k_n = \sum_{k'=k_{min}}^{k_{max}} \frac{k' P(k') k'}{\langle k \rangle} = \frac{k_i \langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \tag{10}$$

同理

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \Gamma_i} k_n^\alpha &= k_i \sum_{k'=k_{min}}^{k_{max}} \frac{k' P(k') k'^\alpha}{\langle k \rangle} \\ &= \frac{k_i \langle k^{\alpha+1} \rangle}{\langle k \rangle} \end{aligned} \tag{11}$$

因此, 不等式 (7) 可以表达为

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(k_i \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle})^\alpha}{\sum_{n \in \Gamma_i} (k_n \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle})^\alpha} &= 1 + \frac{k_i^{2\alpha}}{\sum_{n \in \Gamma_i} k_n^{2\alpha}} \\ &= 1 + \frac{k_i^{2\alpha-1} \langle k \rangle}{\langle k^{2\alpha+1} \rangle} \\ &< T \end{aligned} \tag{12}$$

分析不等式 (12), 关键阈值  $T_c$  可以分别考虑  $\alpha < 0.5$ ,  $\alpha = 0.5$  和  $\alpha > 0.5$  共 3 种情况下获得, 即

$$T_c = \begin{cases} 1 + \frac{k_{min}^{2\alpha-1} \langle k \rangle}{\langle k^{2\alpha+1} \rangle}, & \alpha < 0.5 \\ 1 + \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}, & \alpha = 0.5 \\ 1 + \frac{k_{max}^{2\alpha-1} \langle k \rangle}{\langle k^{2\alpha+1} \rangle}, & \alpha > 0.5 \end{cases} \tag{13}$$

其中,  $k_{min}$  和  $k_{max}$  分别表示网络中节点的最大度和最小度. 在数值模拟中, 发现当相继故障模型中参数  $\alpha = 0.5$  时, 4 种网络都达到了最强的鲁棒性. 为证明这一结论, 对比参数  $\alpha = 0.5$  时与其他两种情况下的关键阈值  $T_c$  的值. 为方便对比, 考虑  $\alpha < 0.5$  情况下的  $T_c - 1$  的值, 即

$$\begin{aligned} T_c - 1 &= \frac{k_{min}^{2\alpha-1} \langle k \rangle}{\langle k^{2\alpha+1} \rangle} = \frac{k_{min}^{2\alpha-1} \langle k \rangle}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{2\alpha+1}} \\ &= \frac{\langle k \rangle}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^2 (\frac{k_i}{k_{min}})^{2\alpha-1}} \times \frac{\langle k \rangle}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^2} \\ &= \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \end{aligned} \tag{14}$$

由公式 (12) 的推导可见

$$T_c(\alpha < 0.5) > T_c(\alpha = 0.5)$$

同理, 也可以得到

$$T_c(\alpha > 0.5) > T_c(\alpha = 0.5)$$

显然, 当  $\alpha = 0.5$  时, 4 种复杂网络都达到了最强的抵制相继故障的鲁棒性. 因此, 数值模拟中得到结论也得到了验证. 此外, 从上述的分析中也可以看到, 关键阈值  $T_c$  的获得仅与网络的度度无关特性有关, 而与实际网络的度分布无关. 所以, 结论

具有了更大的推广价值。

在  $\alpha = 0.5$  的情况下, 进一步探讨  $T_c$  的值与网络平均度的关联性. 由于 WS, NW 和 ER 网络度分布的同质性, 所以, 对于这些网络而言,  $\langle k^2 \rangle \approx \langle k \rangle^2$ , 因此

$$T_c^{WS, NW, ER} (\alpha = 0.5) = 1 + \frac{1}{\langle k \rangle} \quad (15)$$

基于公式 (15), 可以获得在上述的 3 种网络中,  $T_c$  的值与网络的平均度是反比例关系. 而对于有限规模的 BA 网络来说, 它的度分布近似为

$$P(k) = 2m^2 k^{-3}$$

根据 BA 模型的演化机制, 这里的  $m = k_{min}$ , 因此, 可以通过下面的计算获得  $\langle k^2 \rangle$  的值

$$\begin{aligned} \langle k^2 \rangle &= \int_{k_{min}}^{k_{max}} P(k) k^2 dk \\ &= \int_{k_{min}}^{k_{max}} 2k_{min}^2 k^{-3} k^2 dk \\ &= 2k_{min}^2 \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^{-1} dk \\ &= 2k_{min}^2 (\ln k_{max} - \ln k_{min}) \end{aligned}$$

根据 BA 模型

$$\begin{aligned} \int_{k_{min}}^{\infty} P(k) dk &= 1/N \Rightarrow \\ \int_{k_{min}}^{\infty} 2m^2 k^{-3} dk &= 1/N \Rightarrow \end{aligned}$$

$$k_{max} = \sqrt{N} k_{min}$$

因此

$$\begin{aligned} \langle k^2 \rangle &= 2k_{min}^2 (\ln \sqrt{N} k_{min}) - \ln k_{min} \\ &= K_{min}^2 \ln N \end{aligned}$$

所以, 可以获得

$$T_c^{BA} (\alpha = 0.5) = 1 + \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = 1 + \frac{\langle k \rangle}{k_{min}^2 \ln N} \quad (16)$$

在 BA 模型中,  $\langle k \rangle = 2k_{min}$ , 所以, 公式 (13) 可以表示为

$$T_c^{BA} (\alpha = 0.5) = 1 + \frac{4}{\langle k \rangle \ln N} \quad (17)$$

从公式 (17) 可以看出, 关键阈值  $T_c$  与网络平均度  $\langle k \rangle$  的倒数呈现比例递减关系, 这也从理论分析的角度验证了数值模拟中得到的结果.

在不同网络平均度  $\langle k \rangle$  的情况下, 对比数值模拟和理论解析的结果, 如图 6 所示.

从图 6 中可以发现, 理论解析较好地拟合了数值模拟的结果, 但也存在一定的差异. 这种差异主要源自于两个方面: 一方面, 理论解析中的一些近似, 例如: WS, NW 和 ER 网络中  $\langle k^2 \rangle \approx \langle k \rangle^2$  等增加了理论评估的误差; 另一方面, 则由于数值模拟中关键阈值  $T_c$  评估值的近似. 总之, 数值模拟中获得的结论都得到了理论解析的验证.

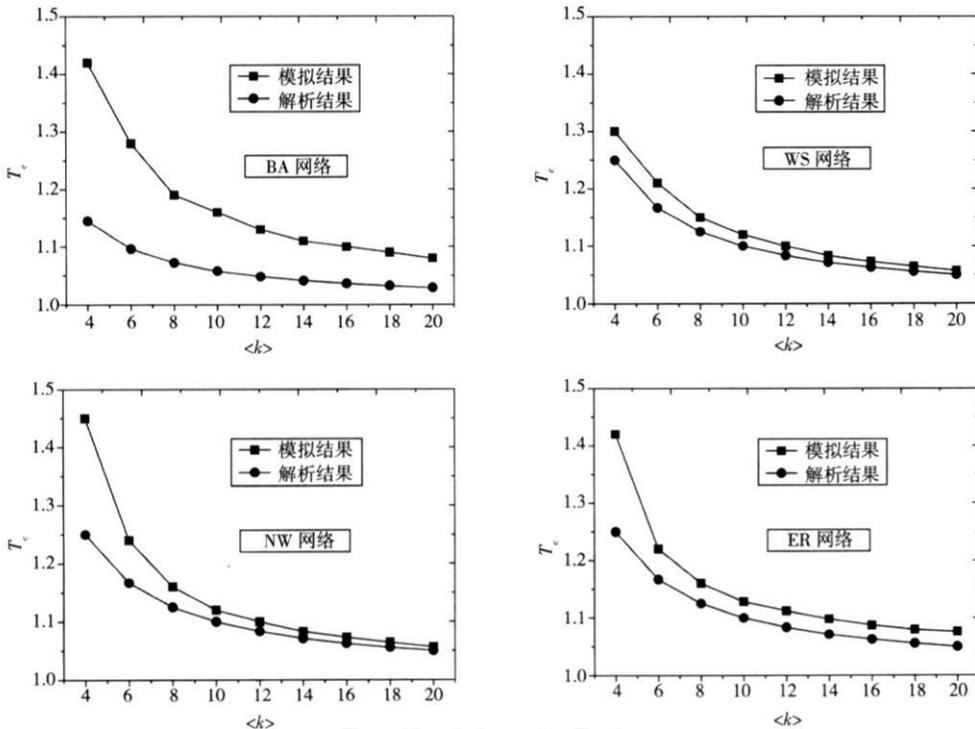


图 6 理论解析与模拟结果的对比

Fig 6 Comparison between theoretical analysis and numerical results

## 5 结束语

本文的研究具有以下特点:

- 1) 网络的负载量通常由介数或者度这两个量来估计, 考虑到一方面介数需要了解网络的全局信息, 而另一方面度又过于简单, 本文提出了一种新的网络节点初始负荷的度量方法;
- 2) 基于不同网络图的分析, 比较直观地解释了数值模拟中所获得的结论;
- 3) 基于理论解析的推导, 验证了数值模拟结

论的正确性, 并从理论解析中发现本文结论仅与网络的度无关特性有关, 而与实际网络的度分布无关. 所以, 结论具有了更大的推广价值.

本文从数值模拟和理论解析两个角度探讨了网络的拓扑及模型中的参数对网络抵制相继故障鲁棒性的影响, 并获得了 4 种网络达到最强抵制相继故障鲁棒性时模型中参数的值. 相继故障模型中最优参数的选择为更好地控制和保护因相继故障导致的各种灾难提供了新的诠释. 希望本文的工作对于现实网络中探讨相继故障的预防及有效保护具有更实际的参考价值.

## 参考文献:

- [1] Motter A E. Cascade control and defense in complex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, 93(9): 098701-1-098701-4
- [2] Goh K I, Kahng B, Kim D. Fluctuation-driven dynamics of the internet topology[J]. *Phys Rev Lett*, 2002, 88(10): 108701-1-108701-4
- [3] 程琳, 王炜. 拥堵交通网络模型和增强拉格朗日乘子算法[J]. *管理科学学报*, 2006, 9(5): 18-27.  
Cheng Lin, Wang Wei. Equilibrium model and augmented Lagrange multiplier solution for congested traffic network[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(5): 18-27. (Chinese)
- [4] 陈振毅, 汪小帆. 无标度网络中的拥塞及其控制[J]. *系统工程学报*, 2005, 20(2): 132-138.  
Chen Zhenyi, Wang Xiaofan. Congestion and decongestion in scale-free networks[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2005, 20(2): 132-138. (Chinese)
- [5] Moreno Y, Pastor-Satorras R, Vázquez A, et al. Critical load and congestion instabilities in scale-free networks[J]. *Europhys Lett*, 2003, 62(2): 292-298
- [6] Huang L, Lai Y-C, Chen G R. Understanding and preventing cascading breakdown in complex clustered networks[J]. *Phys Rev E*, 2008, 78(3): 036116-1-036116-5
- [7] Sun H J, Zhao H, Wu J J. A robust matching model of capacity to defense cascading failure on complex networks[J]. *Physica A*, 2008, 387(25): 6431-6435
- [8] Dobson I, Carreras B A, Lynch V E, et al. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization[J]. *CHAOS*, 2007, 17(2): 026103-1-026103-13
- [9] Li P, Wang B H, Sun H, et al. A limited resource model of fault-tolerant capability against cascading failure of complex network[J]. *Eur Phys J B*, 2008, 62(1): 101-104
- [10] Wu J J, Sun H J, Gao Z Y. Cascading failures on weighted urban traffic equilibrium networks[J]. *Physica A*, 2007, 386(1): 407-413
- [11] Bao Z J, Cao Y J, Ding L J, et al. Dynamics of load entropy during cascading failure propagation in scale-free networks[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(36): 5778-5782
- [12] Buzna L, Peters K, Ammoser H, et al. C. Efficient response to cascading disaster spreading[J]. *Phys Rev E*, 2007, 75(5): 056107-1-056107-7
- [13] Zheng J F, Gao Z Y, Zhao X M. Modeling cascading failures in congested complex networks[J]. *Physica A*, 2007, 385(2): 700-706
- [14] Heide D, Schläfer M, Greiner M. Robustness of networks against fluctuation-induced cascading failures[J]. *Phys Rev E*, 2008, 77(5): 056103-1-056103-5
- [15] Wang X F, Xu J. Cascading failures in coupled map lattices[J]. *Phys Rev E*, 2004, 70(5): 056113-1-056113-5
- [16] Wang W X, Chen G R. Universal robustness characteristic of weighted networks against cascading failure[J]. *Phys Rev E*, 2008, 77(2): 026101-1-026101-5
- [17] Watts D J. A simple model of global cascades on random networks[J]. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 2002, 99(9):

5766

- [ 18] Zhao L, Park K, Lai Y C, et al. Tolerance of scale-free networks against attack-induced cascades[ J]. *Phys Rev E*, 2005, 72(2): 025104-1—025104-4.
- [ 19] Ricard V S, Martí R C, Bemat C M, et al. Robustness of the European power grids under intentional attack[ J]. *Phys Rev E*, 2008, 77(2): 026102-1—026102-7.
- [ 20] Zhao L, Park K, Lai Y C. Attack vulnerability of scale-free networks due to cascading breakdown[ J]. *Phys Rev E*, 2004, 70(3): 035101-1—035101-4.
- [ 21] Wang JW, Rong L L. Edge-based-attack induced cascading failures on scale-free networks[ J]. *Physica A*, 2009, 388(8): 1731-1737.
- [ 22] Wang JW, Rong L L, Zhang L, et al. Attack vulnerability of scale-free networks due to cascading failures[ J]. *Physica A*, 2008, 387(26): 6671-6678.
- [ 23] Hin D H, Motter A E. Fluctuation-driven capacity distribution in complex networks[ J]. *New J Phys*, 2008 (10): 053022-1—053022-19.
- [ 24] Ash J, Newth D. Optimizing complex networks for resilience against cascading failure[ J]. *Physica A*, 2007 (380): 673-683.
- [ 25] Simonsen L, Buzna L, Peters K, et al. Transient dynamics increasing network vulnerability to cascading failures[ J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 100(21): 218701-1—218701-4.
- [ 26] Macdonald P J, Ahnass E, Barabási A L. Minimum spanning trees of weighted scale-free networks[ J]. *Europhys Lett*, 2005, 72(2): 308.
- [ 27] Holme P, Kim B J, Yoon C N, et al. Attack vulnerability of complex networks[ J]. *Phys Rev E*, 2002, 65(5): 056109-1—056109-14.
- [ 28] Barabási A-L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[ J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.
- [ 29] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[ J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [ 30] Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model[ J]. *Phys Lett A*, 1999, 263: 341-346.
- [ 31] Erdős P, Rényi A. On the evolution of random graphs[ J]. *Publ Math Inst Hung Acad Sci*, 1960, 5: 17-60.
- [ 32] Pastor S R, Vespignani A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[ J]. *Phys Rev E*, 2001, 63(6): 066117-1—066117-8.

## Model for cascading failures on complex networks based on local characteristics of nodes

WANG Jian-wei, RONG Li-li, WANG Duo

Institute of Systems Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

**Abstract** To better explore the universal robustness against cascading failures on complex networks, closely focusing on the load which is the most important physical quantity that can affect the occurrence and spread of cascading failure, and dynamic process after a node fails, a cascading model with tunable parameters is proposed based on the local characteristic of a node. We obtain numerically the relation between the robustness against cascading failures on complex networks and parameters in the model, and discuss the effect of the average degree of a network for cascading failures. In addition, simulation results also are verified by the analysis of the different network graphs and the theory.

**Key words** cascading failure; complex network; load; local characteristic