

# 基于小波变换的多尺度跳跃识别与波动性估计研究<sup>①</sup>

王春峰, 姚 宁, 房振明

(天津大学管理学院金融工程研究中心, 天津 300072)

**摘要:** 研究了市场微观结构噪音与跳跃同时存在条件下均衡价格波动性的估计问题, 应用时间序列变点的小波分析方法, 对 2006~2007 年上证 50 指数成分股包含市场微观结构噪音和跳跃的高频价格采样数据的跳跃变差和积分波动性进行了有效的估计. 研究结果发现小波分析方法能够准确识别我国股市的价格跳跃, 并且跳跃变差与积分波动性的比值很大, 忽视跳跃的存在将会引起波动性的有偏估计, 表明在金融市场中应当使用均衡价格波动性进行风险管理和资产配置.

**关键词:** 市场微观结构噪音; 跳跃; 波动; 离散小波变换

**中图分类号:** F830.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)10-0063-06

## 0 引言

波动率是衍生产品定价、投资组合构建以及金融市场风险管理的关键变量, 波动率的准确估计一直是金融学研究领域的热点课题. 随着高频/超高频数据成为金融市场波动性研究的全新手段, Andersen 等<sup>[1]</sup>提出了基于高频数据的“已实现”波动率 (realized volatility, RV) 的概念, 这一全新的波动性计量方法提取了日内更加丰富的信息内容, 使传统波动性估计所需的样本周期大大缩短, 计算简便且精度提高.

然而, “已实现”波动率的理论基础受到了高频/超高频数据的严峻挑战. Ait-Sahalia 等<sup>[2]</sup>的研究表明, 实际证券市场中的高频/超高频数据包含了大量的市场微观结构噪音, 如交易的买卖价跃动 (bid-ask bounce)、不同步交易 (asynchronous trading)、流动性效应 (liquidity effects) 和闭市效应 (market closing effects) 等等, 它们将引起资产交易价格偏离均衡价格进而导致相关指标偏离信息的真实反映. 资产交易价格与均衡价格的不一致导致“已实现”波动率难以准确衡量资产均衡

价格的波动性.

为了降低市场微观结构噪音的干扰, 改善均衡价格波动性的估计精度, Zhang 等<sup>[3]</sup>在市场微观结构噪音服从 MA(1) 结构的前提下, 利用子采样的方法得到了均衡价格波动性的“二维尺度”估计量, 随后 Zhang 等<sup>[4]</sup>拓展了子采样的方法, 将“二维尺度”延伸至“多维尺度”. “多维尺度”均衡价格波动性的估计量得到了比较好的收敛率, 并且对于交易时间的噪音相依性是稳健的. Bandi 和 Russell<sup>[5]</sup>进一步使用超高频和低频的交易价格数据分别估计市场微观结构噪音与均衡价格过程的波动率, 然后根据这两种估计的波动率来平衡测量误差和市场微观结构误差, 以确定最优的采样频率. 但是, 上述研究都是在不考虑金融资产价格“跳跃”特征的前提下进行的, 而 Barndorff-Nielsen 和 Shephard<sup>[6-7]</sup>的研究表明不考虑金融资产价格的跳跃会降低波动性的估计精度, 因此, 在市场微观结构噪音和跳跃同时存在的条件下如何对波动性进行准确估计还有待于深入研究.

① 收稿日期: 2007-12-21 修订日期: 2009-09-10

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (70225002); 国家自然科学基金资助项目 (70771076).

作者简介: 王春峰 (1966-), 男, 河北人, 教授, 博士生导师. Email: cfwang@tju.edu.cn

小波分析是一种窗口的大小固定、形状可变的时频局部化信号处理方法,即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率,在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率.因此,小波变换既可以处理平稳信号,还适合处理非平稳信号、突变信号、具有孤立奇异性的信号和自适应信号.近年来,小波分析已引入到经济领域并得到广泛应用.如 Wang<sup>[8]</sup>使用小波检测了美国 1953年到 1991年月股回报的跃点, Ramsey和 Zhang<sup>[9]</sup>、Percival和 Gencay<sup>[10-11]</sup>将其引入汇率波动建模等金融时间序列分析领域,取得了很好的效果.在国内,樊智、张世英<sup>[12]</sup>、徐梅、张世英<sup>[13]</sup>、许启发等<sup>[14]</sup>也开始将小波分析应用于金融波动性建模及相关应用领域的研究,以解决传统计量方法所无法解决的问题.这些学者的研究表明小波分析在经济领域中的应用是有效和可行的.

本文将时间序列变点的小波分析方法应用于波动性的测量,利用小波变换数学显微镜的特点和频域带通的特征识别金融资产交易价格中的跳跃,进而使用仅含微观结构噪音的调整数据估计了积分波动性,提高了均衡价格波动性的估计精度.研究结果发现小波分析方法能够准确识别我国股市的价格跳跃,且跳跃变差与积分波动性的比值很大,忽视跳跃的存在将会引起波动性的有偏估计,表明在金融市场中应当使用均衡价格波动性进行风险管理和资产配置.

### 1 小波分析

根据 William s<sup>[15]</sup>,凡满足如下容许性条件的函数  $\phi(t)$  称为小波母函数,对小波母函数作伸缩和平移,得

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(t) &= 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad j = 1, 2, \dots, \\ k &= 1, \dots, 2^j \end{aligned} \quad (1)$$

小波变换的一个重要特征是它能表征信号的奇异性.例如,如果函数  $f$  在某点是指数  $\alpha$  Holder 连续的,则靠近该点在位置  $k2^{-j}$  处的小波系数  $\phi_{j,k}(t)$  衰减阶数为  $2^{-j(\alpha+1/2)}$ ,而当函数  $f$  在某点有一个跳跃时,那么靠近该点在位置  $k2^{-j}$  处小波系数  $\phi_{j,k}(t)$  的上界是  $2^{-j/2}$  乘以一个正数.利用小波

变换的这个特征就可以将跳跃从资产交易价格中分离进而分别估计跳跃变差与积分波动性.

高频价格采样数据  $Y_t$  可以分解为均衡价格  $X_t$  与市场微观结构噪音  $\varepsilon_t$  之和,即

$$Y_t = X_t + \varepsilon_t \quad t \in [0, 1] \quad (2)$$

其中,  $Y_t$  和  $X_t$  均为对数价格,  $t_i = i/n, i = 0, \dots, n, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \varepsilon_i$  具有有限四阶矩且独立于  $X_t$ .

由于金融资产均衡价格具有跳跃的特征,因而均衡价格  $X_t$  可以表示为

$$X_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{l=1}^{N_t} L_l \quad (3)$$

其中,  $W_t$  为标准的布朗运动,  $N_t$  为时刻  $t$  内  $X$  的累计跳跃数量,  $L_l$  为跳跃规模.

进一步有均衡价格过程  $X$  的二次变差为

$$[X, X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{l=1}^{N_t} L_l^2 \quad (4)$$

其中,  $\Theta = \int_0^1 \sigma_s^2 ds$  为积分波动性,  $\Psi = \sum_{l=1}^{N_1} L_l^2$  为跳跃变差.

基于 Jianqing Fan和 Yazhen Wang<sup>[16]</sup> 的研究,如果  $X_{j,k}, Y_{j,k}$  和  $\varepsilon_{j,k}$  分别为  $X_t, Y_t$  和  $\varepsilon_t$  的小波系数,则有

$$\begin{aligned} Y_{j,k} &= X_{j,k} + \varepsilon_{j,k}, \quad k = 1, \dots, 2^j, \\ j &= 1, \dots, \log_2(n) \end{aligned} \quad (5)$$

$X_t$  的跳跃位置可以使用如下的门限值  $D_n$  估计.如果对于某个  $k$  满足  $|Y_{j,k}| > D_n$ , 则跳跃位置为  $\tau = k2^{-j}$ , 其中  $D_n = d \sqrt{2 \ln n}, d = \{ |Y_{j,k}|, k = 1, \dots, 2^j \} / 0.6745$

### 2 基于小波变换的跳跃变差和积分波动性估计

为了估计均衡价格过程  $X_t$  的跳跃变差,首先需要估计跳跃规模. Jianqing Fan 和 Yazhen Wang<sup>[16]</sup> 的研究表明,对  $X_t$  中每一个估计的跳跃位置  $\hat{\tau}_l$ , 选择小的临近区域  $\hat{\tau}_l \pm \delta_l$ , 其中  $\delta_l > 0$  则跳跃规模  $L_l = X_{\tau_l} - X_{\tau_l}$  可以使用下式来计算,  $\hat{L}_l = \hat{Y}_{\tau_l + \delta_l} - \hat{Y}_{\tau_l - \delta_l}$ , 其中  $\bar{Y}_{\tau_l + \delta_l}$  和  $\bar{Y}_{\tau_l - \delta_l}$  分别为  $Y_t$  在  $[\tau_l - \delta_l, \tau_l + \delta_l]$  和  $[\tau_l - \delta_l, \tau_l]$  的平均值.进一步有  $X_t$  的

跳跃变差为

$$\hat{\Psi} = \sum_{i=1}^q (\bar{Y}_{\tau_i} - \bar{Y}_{\tau_{i-1}})^2 \quad (6)$$

同样, 为了估计均衡价格过程  $X_t$  的积分波动性, 应该剔除高频价格采样数据中的跳跃成分, 则仅包含市场微观结构噪音的调整高频价格采样数据为

$$\hat{Y}_{t_i}^* = Y_{t_i} - X_{t_i}^d = Y_{t_i} - \sum_{\tau \leq t_i} \hat{L}_b \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

根据 Zhang 等<sup>[4]</sup> 的研究, 多时间尺度跳跃调整的已实现波动率 (Jump-adjusted multiple time scale realized volatility, 简记为  $\text{MSRV}$ ) 为

$$\hat{\Theta} = \sum_{m=1}^M a_m [Y^*, Y^*]^{(K_m)} + \zeta ([Y^*, Y^*]^{(K_1)} - [Y^*, Y^*]^{(K_M)}) \quad (8)$$

其中,  $M$  是整数,  $K_m = m + C$ ,  $C$  为  $n^{1/2}$  的整数部分,

$$a_m = \frac{12(m + C)(m - M/2 - 1/2)}{M(M^2 - 1)},$$

$$\zeta = \frac{(M + C)(C + 1)}{(n + 1)(M - 1)^2}$$

$$[Y^*, Y^*]^{(K)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{nK} (Y_{t_k+k}^* - Y_{t_k+(j-1)K}^*)^2$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{n-K} (Y_{t_i+K}^* - Y_{t_i}^*)^2$$

### 3 我国股票市场跳跃变差与积分波动性的特征研究

与发达国家证券市场相比, 我国股票市场的历史发展较短, 总体的优质上市资源比较缺乏, 立法和执法环境也有待于进一步改进, 市场通常带有较浓厚的投机色彩, 市场价格波动相对较大, 可能导致我国股市的交易价格偏离资产的均衡价格, 进而影响均衡价格波动性的估计精度. 因此, 本文对我国股市跳跃变差和积分波动性的特征进行了研究, 以便为监管者完善市场交易机制和投资者进行风险管理提供一定的实证数据.

#### 3.1 样本数据的选取与初步分析

应用上面介绍的方法估计中国股票市场的跳跃变差与积分波动性, 数据为上证 50 指数所包含股票的 1 分钟高频价格, 时间跨度为 2006-10-10 ~ 2007-01-12 若在 2006-10-10 以后上市的公司则以其上市日为样本起始日, 数据来自

#### “钱龙”系统

通过对上证 50 指数成分股的研究表明, 已实现波动率随采样频率的提高并不趋近于二次变差, 表明我国股市的高频 / 超高频交易数据存在大量市场微观结构噪音. 例如, 图 1 描述了 2006-10-11 中国联通已实现波动率与采样时间间隔 (采样时间间隔以分钟为单位) 的关系, 从图 1 中可以清晰的看出, 中国联通已实现波动率的估计值随着采样频率的提高显著增加, 表明中国联通的高频价格采样数据存在大量市场微观结构噪音.

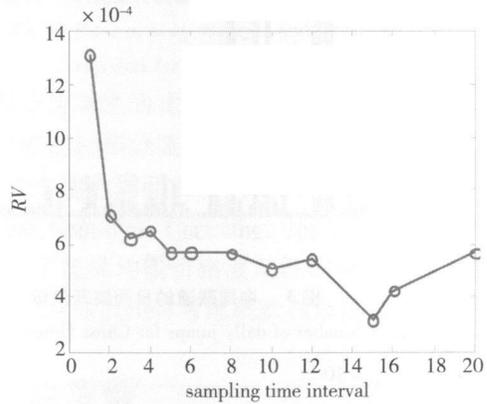


图 1 已实现波动率与采样时间间隔的关系  
Fig. 1 RV as a function of sampling time interval

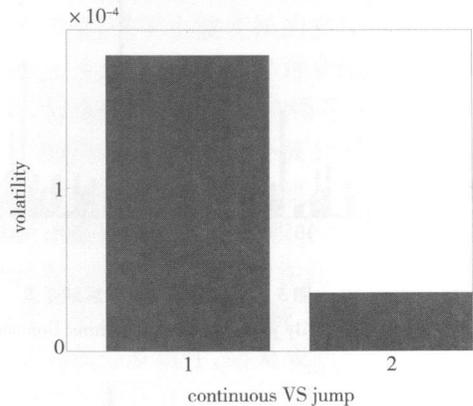


图 2 连续和跳跃条件下分别估计的波动性  
Fig. 2 Estimated volatilities under continuity and jump

同样, 交易过程中市场信息的到达有可能使高频价格采样数据包含跳跃, 由于 2006-10-11 中国联通的高频价格采样数据在两个位置可能存在跳跃, 我们使用 Zhang 等<sup>[4]</sup> 的方法采用 5 min 到 15 min 11 个采样频率的收益分别计算了三个子区间内的多时间尺度已实现波动率 (multiple-time scale realized volatility) 并求和. 如果中国联通的高频价格采样数据不存在跳跃, 则

在连续和跳跃条件下分别计算的波动性应该是相等的. 然而, 从图 2中可以看出, 中国联通连续条件下计算的波动性远远大于跳跃条件下的波动性, 表明中国联通的高频价格采样数据确实存在跳跃. 通过对其它样本数据的研究也表明了这一点, 即中国股票市场的高频价格采样数据存在跳跃.

### 3 2 我国股票市场跳跃变差和积分波动性的估计与相关分析

为了叙述上的方便, 下面我们分别具体介绍上证 50指数成分股中两只具有代表性的股票中国联通和中国银行, 采样时间分别为 65天和 66天, 其它股票的研究结果也是相似的. 在 *Matlab* 语言环境下, 经编程计算, 得到各有关结果.

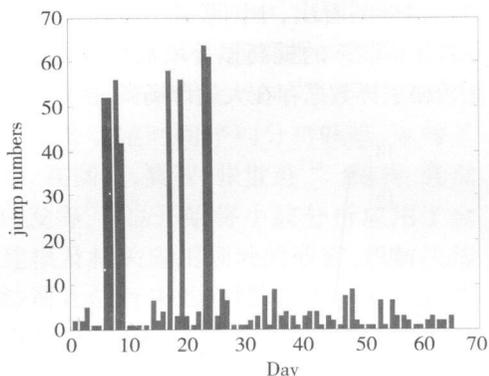


图 3 中国联通的日间跳跃数量

Fig. 3 Number of daily jumps for China Unicom

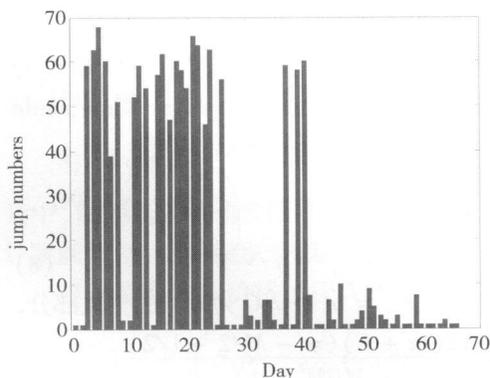


图 4 中国银行的日间跳跃数量

Fig. 4 Number of daily jumps for China Bank

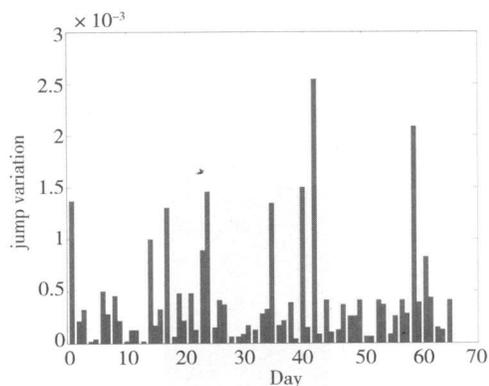


图 5 中国联通的日间跳跃变差

Fig. 5 Daily jump variation for China Unicom

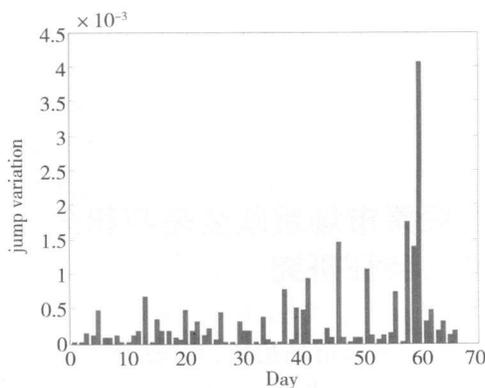


图 6 中国银行的日间跳跃变差

Fig. 6 Daily jump variation for China Bank

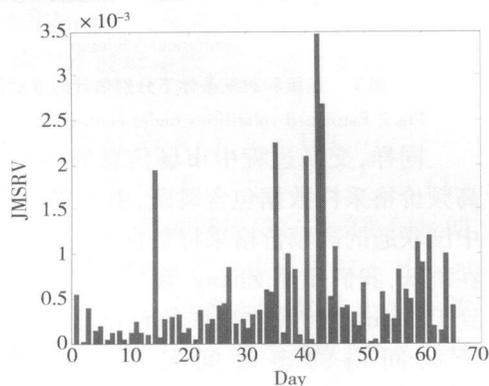


图 7 中国联通的日间积分波动性

Fig. 7 Daily integrated volatility for China Unicom

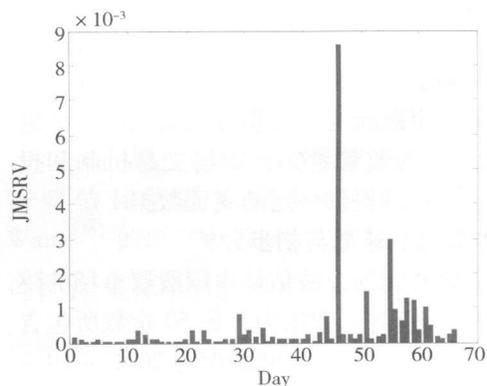


图 8 中国银行的日间积分波动性

Fig. 8 Daily integrated volatility for China Bank

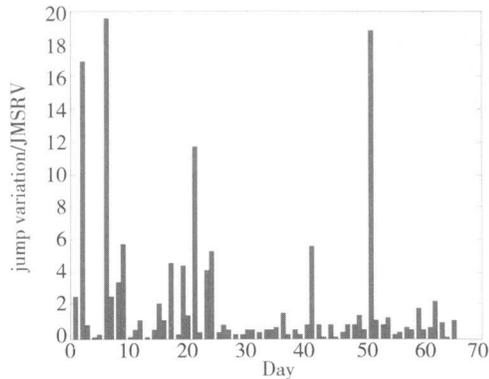


图 9 中国联通跳跃变差与积分波动性的比  
Fig. 9 Ratio of jump variation and integrated volatility for China Unicom

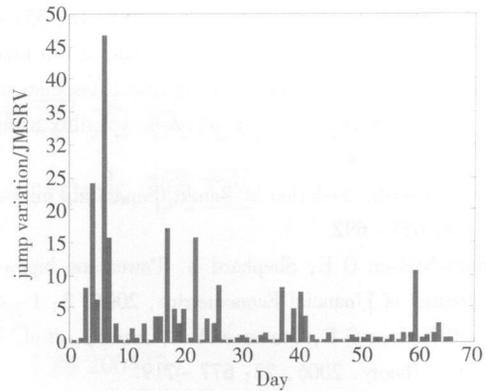


图 10 中国银行跳跃变差与积分波动性的比  
Fig. 10 Ratio of jump variation and integrated volatility for China Bank

图 3和图 4给出了样本期内中国联通和中国银行的日间跳跃数量. 从图中可以看出, 中国联通和中国银行的日间跳跃数量很多, 表明我国股票市场的高频 / 超高频价格数据确实存在跳跃特征, 这与 *Barndorff-Nielsen*和 *Shephard*<sup>[6-7]</sup> 的研究是一致的. 例如, 样本期内中国联通的日间跳跃数量超过 30 次的天数为 8 天, 占样本期总天数的 12.3%, 这一统计结果表明中国联通近似每两周就会发生一次大规模的跳跃. 因此, 在估计中国股市的积分波动性时, 如果不考虑跳跃的影响, 将会引起非常大的偏差.

图 5和图 6给出了根据式 (6) 计算的样本期内中国联通与中国银行日间跳跃变差的结果, 进一步证实了我国股票市场的高频 / 超高频价格数据存在跳跃特征. 其中, 中国银行日间跳跃变差在样本期内的最大值超过了 0.004, 表明跳跃在波动率的估计中占有非常重要的位置. 图 7和图 8分别给出了中国联通与中国银行根据式 (8) 计算的样本期内多时间尺度跳跃调整的已实现波动率的结果. 从图中可以看出, 跳跃变差在总的波动性中贡献比例相当高.

为了进一步量化跳跃变差的贡献比例, 本文计算了样本期内跳跃变差与积分波动性的比值, 图 9和图 10分别为中国联通和中国银行跳跃变差

与积分波动性的比值图. 中国联通与中国银行跳跃变差超过积分波动性的天数分别为 24 天和 29 天, 样本期内跳跃变差与积分波动性的比值很高表明忽视跳跃的存在将会引起波动性的有偏估计. 为了提高均衡价格波动性的估计精度, 在计算波动性时应该同时考虑跳跃和市场微观结构噪音.

## 4 结束语

本文引入了一种估计金融资产均衡价格波动性的新方法: 基于小波变换的多尺度跳跃识别与波动性估计方法. 该方法针对金融资产高频 / 超高频数据具有市场微观结构噪音和跳跃的双重特征, 应用时间序列变点的小波分析方法将跳跃从金融资产交易价格中分离, 直接使用跳跃调整的高频价格采样数据估计了积分波动性, 提高了均衡价格波动性的估计精度. 在此方法的基础上, 文章估计了中国股票市场上证 50 指数成分股的跳跃变差和积分波动性, 结果表明中国股票市场的跳跃变差与积分波动性的比值很高, 忽视跳跃的存在将会引起波动性的有偏估计. 至于这一方法在金融市场风险管理中的实际效果如何, 还有待于进一步的研究探讨. 当然, 这也将是作者下一步的研究目标.

## 参考文献:

- [1] Andersen T G, Bollerslev T, Diebold F X, et al. The distribution of realized exchange return volatility [J]. *Journal of Financial Economics* 2001, 61(1): 43-76
- [2] Ait-Sahalia Y, Mykland P, Zhang L. How often to sample a continuous time process in the presence of market microstructure

- noise[ J]. *Review of Financial Studies*, 2005, 18: 351–416
- [ 3] Zhang L, Mykland P, Åit-Sahalia Y. A tale of two time scales: determining integrated volatility with noisy high-frequency data[ J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2004, forthcoming
- [ 4] Zhang L. Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multiscale approach[ J]. *Bernoulli*, 2006, 12(6): 1019–1043
- [ 5] Jeffrey R Russell, Federico M Bandi. Separating microstructure noise from volatility[ J]. *Journal of Financial Economics*, 2006, 79: 655–692
- [ 6] Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps (with discussions) [ J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2004, 2: 1–48
- [ 7] Barndorff-Nielsen O E, Graversen S E, Jacod J, et al. Limit theorems for realized bipower variation in econometrics[ J]. *Econometric Theory*, 2006, 22: 677–719
- [ 8] Wang Y. Jump and sharp cusp detection by wavelets[ J]. *Biometrika*, 1995, 82(2): 385–397
- [ 9] Ramsey J B, Zhang Z. The analysis of foreign exchange data using wavelet dictionaries [ J]. *Journal of Empirical Finance*, 1997, 4: 341–372
- [ 10] Percival D B, Walden A T. *Wavelet methods for time series analysis*[ M ]. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2000
- [ 11] Gencay R, Selcuk F, Whitcher B. Scaling properties of foreign exchange volatility[ J]. *Physica A*, 2001, 289: 249–266
- [ 12] 樊智, 张世英. 非线性协整建模研究及沪深股市实证分析 [ J]. *管理科学学报*, 2005, 2: 73–77.  
Fan Zhi, Zhang Shiying. Study on modeling of nonlinear cointegration and empirical analysis of China's stock markets[ J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 2: 73–77. (in Chinese)
- [ 13] 徐梅, 张世英. 基于小波分析的金融波动分析 [ J]. *系统工程理论与实践*, 2005, 2: 1–10  
Xu Mei, Zhang Shiying. Analysis of financial volatility based on wavelet analysis[ J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2005, 2: 1–10 (in Chinese)
- [ 14] 许启发, 张世英. 多分辨持续及协同持续研究 [ J]. *系统工程理论与实践*, 2007, 2: 36–45  
Xu Qifa, Zhang Shiying. Research on multi-resolution persistence and common persistence[ J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2007, 2: 36–45. (in Chinese)
- [ 15] Williams T M. Practical use of distributions in network analysis[ J]. *Journal of Operation Research Society*, 1992, 3: 265–270
- [ 16] Fan Jianqing, Wang Yazhen. Multiscale jump and volatility analysis for high frequency financial data[ J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2007, 14: 1349–1362

## Research of multi-scale jump identification and volatility estimation based on wavelet transform

WANG Chunfeng, YAO Ning, FANG Zhenming

Financial Engineering Research Center, School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China

**Abstract** This paper studies how to estimate the volatility of asset equilibrium price with jump and market microstructure noise existing at the same time. Employing the wavelet method of time series change-point analysis, jump variations and integrated volatilities are estimated using high frequency price sampling data which contain market microstructure noise and jumps for the individual firms of Shanghai 50 index during 2006~2007. We find that price jumps of Chinese stock market are accurately identified by wavelet transform method and the ratios of jump variations and integrated volatilities are large. Ignoring the existence of jump will lead to biased estimation of volatility, indicating that the volatility of equilibrium price should be used for risk management and asset allocation in financial market.

**Keywords** market microstructure noise; jump volatility; discrete wavelet transform