以 1年期储蓄存款利率为状态变量的跳跃型广义 Vasicek模型[①]

范龙振
(复旦大学管理学院, 上海 200433)

摘要: 1年期储蓄存款利率被认为是中国利率体系的基准利率,可将其作为影响市场利率期限结构的状态变量. 市场利率不同于官方利率,它们还受其他经济变量的影响. 这些其他经济变量对市场利率的影响用 1年期市场利率与 1年期储蓄存款利率的差别来反映,把它作为影响市场利率的另外一个状态变量. 分别用跳跃过程和均值回复过程描述这两个状态变量的变化. 在仿射模型的框架下,它们决定了市场利率期限结构. 本文给出了该模型下市场利率期限结构的分析表达式,并利用 MCMC方法对模型进行了实证分析. 实证表明该模型能够很好地拟合市场利率期限结构样本观测值的统计特征. 实证分析还发现,债券的超额回报率显著受官方利率调整风险和市场利率随机波动风险的影响.

关键词: 储蓄存款利率; 市场利率; 跳跃过程; 仿射模型; MCMC估计方法
中图分类号: F830.5; F062.5 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2010)10-0069-10

0 引 言

在西方发达国家,货币政策的中介目标为短期利率或者货币供给量,中长期利率由市场决定. 现代西方金融理论以这些货币政策为背景,形成了以预期假设为基础的利率期限结构和固定收益定价理论模型体系. 根据这些理论,中长期利率取决于对未来短期利率变化的预期和投资者对承受长期债券的利率风险、流动性风险等而要求的风险溢酬. 常见的利率模型如 Vasicek模型[1]、CIR模型[2]、affine模型[3]、HJM模型[4]和 BJM模型[5]都来自这些理论. 这些模型假定利率期限结构的变化取决于少数几个不可观测的状态变量,这些状态变量决定了短期利率,再在一定的风险溢酬形式假定下根据预期假设理论决定出长期利率,从而形成了利率期限结构的决定和动态变化模型.

这些典型的利率期限结构理论模型很难直接应用到我国债券市场,原因在于我国债券市场的利率期限结构决定机制与西方发达市场不完全相同. 我国央行直接制定了各个期限的储蓄存款、贷款利率. 特别是 1年期储蓄存款利率作为基准利率对市场利率影响很大. 研究适合中国债券市场的利率模型必须考虑中国市场的债券价格或市场利率决定机制. 本文假定决定债券价格和市场利率的基准利率不是短期利率,而是 1年期储蓄存款利率,它的变化服从跳跃型随机过程. 市场利率除受基准利率影响以外,还受通货膨胀率等其他经济变量的影响,这些其他变量对市场利率的影响用 1年期市场利率与 1年期储蓄存款利率的差别(简称利率差)来反映. 把它看成决定市场利率的另外一个状态变量,假定它的变化过程服从 Vasicek模型中的均值回复过程. 利率差和 1年期储蓄存款利率作为决定债券价格和市场利率的两

① 收稿日期: 2008-05-19; 修订日期: 2009-11-05.
基金项目: 教育部跨世纪优秀人才支持计划资助项目(NECT-05-0372); 国家自然科学基金资助项目(70971025).
作者简介: 范龙振(1965—), 男, 河南虞城人, 博士, 教授, Email: lzfan@fudan.edu.cn

个状态变量,在仿射(affine)模型的框架下,决定了各个期限的债券价格和市场利率.

国际学术界有较多相关研究. Balduzzi、Bertola、Foresi[6], Balduzzi、Bertola、Foresi、Klapper[7]利用计量模型讨论了美联储制定的联邦基金目标利率对市场利率期限结构的影响,并利用离散时间模型构造出一个简单的联邦基金利率影响下的利率期限结构模型. Anderson、Dillen、Sellin[8]把央行改变联邦基金目标利率作为一个货币政策信号,通过事件研究法讨论市场利率期限结构如何做出反应. 在利率模型下研究基准利率如何影响市场利率和债券价格的代表性文献为Piazzesi[9],他认为美联储决定的联邦基金目标利率影响了短期市场利率,而短期市场利率通过投资者的预期影响到中长期利率. 他直接把联邦基金目标利率作为一个状态变量,加入到以仿射模型为基本框架的利率模型中,发现在利率模型中加入该变量可以更准确地描述利率期限结构的变化,并可以提高对债券定价的准确性. 受Piazzesi启发,考虑中国官方利率的影响,讨论适合中国债券市场的利率期限结构模型. 与Piazzesi相同之处是都利用跳跃过程描述官方利率的变化,都用均值回复过程描述利率差的变化. 不同之处在于跳跃过程的描述方式不同;状态变量是1年期储蓄存款利率和1年期利率差,而不是短期目标利率和短期利率差. 不同的假定导致模型推导和估计方法都有所不同. 最重要的,本文是基于中国债券市场的利率决定机制提出的利率模型.

国内学者对中国金融市场利率期限结构和债券定价已进行了较多的研究. 一些研究讨论了债券的风险管理问题. 王春峰、杨建林和蒋祥林[10]研究了含有违约风险的利率风险管理问题,推导了违约风险债券久期的一般公式,讨论了违约风险的存在对银行利率风险管理的影响. 杨宝臣、张玉桂和姜中锡[11]指出传统的久期和凸度在套期保值应用中不是最优的,并考虑国债期货与其最便宜交割债券之间价格关系推导了更精确的套期比率. 另一些研究讨论了中国债券市场的价格行为和投资策略. 黄玮强、庄新田[12]运用VAR模型,Granger因果检验,脉冲响应分析及协整检验对证券交易所国债指数和银行间国债指数的关联性进行了检验和分析,指出证券交易所国债市场的价格发现效率高于银行间国债市场的价格发现效率. 朱世武、陈健恒[13]利用央票的交易数据,实证研究了骑乘收益率曲线交易策略的风险和收益. 与本文密切相关的是关于中国债券市场利率模型的实证研究. 林海、郑振龙[14]利用跳跃过程对我国官方制定的利率进行实证分析,利用Vasicek模型,CIR模型对市场利率进行实证分析. 谢赤、吴雄伟[15]、朱世武、陈健恒[16],宋福铁、陈郎南[17],傅曼丽、屠梅曾和董荣杰[18]实证分析了一些常用的利率期限结构模型在中国债券市场的适用性. 范龙振[19]利用半参数方法分析了常见的短期利率模型能否描述上交所债券市场短期利率的统计性质. 刘金全、郑挺国[20]把CKLS模型推广到状态相依的CKLS模型,并用银行间同业拆借市场六组不同到期日的月度加权平均利率进行实证研究. 与本文类似,最近一些研究考虑了市场利率期限结构的跳跃特征和宏观经济变量对市场利率的影响. 张金清、周茂彬[21]发现中国市场的短期利率存在显著的均值回复特征和跳跃特征. 王春峰、吴启权和李晗虹[22]考虑了宏观经济变量对市场利率和债券价格的影响,利用仿射模型研究了债券期权的定价问题. 还有一些其他相关研究. 林海、郑振龙[23]对国内外利率期限结构研究文献作了非常全面的归纳和总结. 胡海鹏、方兆本[24]提出一种新的从债券交易数据中拟合利率期限结构的方法. 杨宝臣、李彪[25]利用利率模型对认股权证进行定价研究. 与这些研究不同,本文在市场利率期限结构的建模中纳入官方利率跳跃性变化的影响. 官方利率变化对市场利率有着直接关键的影响,以官方利率作为状态变量构造市场利率模型,一方面可以定量分析官方利率对市场利率期限结构的影响,另一方面也有助于更深入地把握市场利率的变化规律.

1 理论模型

假定1年期储蓄存款利率 r_t^d 的变化服从跳跃过程

$$dr_t^d = J_t dN_t \tag{1}$$

其中 N_t 是Poission过程,它代表了该官方利率的调整次数. 由于利率变动次数少,并且是一个复杂

的决策过程，假定跳跃过程的强度参数 h 为常数. J_t 是时间 t 该利率变化的大小. 由于利率变化事先无法完全预测，是一个随机变量，为方便，假定 J_t 服从正态分布，具有密度函数

$$f(J_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J}\exp\left[-\frac{(J_t-\alpha_J)^2}{\sigma_J^2}\right] \tag{2}$$

其中 α_J 是 1年期储蓄存款利率跳跃的平均大小，σ_J 是 1年期储蓄存款利率调整大小的标准差.

把 1年期储蓄存款利率 r_t^d 看成是整个利率体系的基准利率，因此把它看成是决定市场利率的状态变量. 市场利率除受基准利率的影响，还受其它因素的影响，如通货膨胀率、货币供给量、债券投资与储蓄存款的风险差异、交易成本不同等，用 1年期市场利率 $r_t^{(1)}$ 与 1年期储蓄存款利率 r_t^d 的差（简称利率差）反映其它经济因素对市场利率的影响. 利率差记为

$$s_t=r_t^{(1)}-r_t^d$$

借鉴 Vasicek模型的构造方法，假定 s_t 服从均值回复过程，即

$$ds_t=\kappa_s(\mu_s-s_t)dt+\sigma_s d\omega_t \tag{3}$$

由于假定决定债券价格、市场利率的状态变量为 1年期储蓄存款利率 r_t^d 和利率差 s_t，那么面值为 1的，期限为 τ 的零息票债券的价格可以记为 $P(r_t^d, s_t;\tau)$. 官方利率的调整，利率差的变动构成债券价格变动的两个风险源，债券的超额回报由他们的风险大小决定，因此假定随机贴现因子为

$$\frac{d\xi}{\xi}=-r_t dt-(\lambda_{0s}+\lambda_{1s}s_t)d\omega_t-\lambda_J(dN_t-h dt) \tag{4}$$

对式（4）解释如下. 如果不考虑风险及风险溢酬，所有资产的瞬时贴现率都是瞬时短期利率 r_t，也就是式（4）等式右边的第 1项. 根据本文的假定，债券受两个风险源的影响，利率差的随机波动风险和官方利率的跳跃风险，分别用 $d\omega_t$ 和 $dN_t-h dt$ 代表，投资者对这两类风险可能要求一定的风险溢酬. 假定投资者对第一类风险的单位风险要求的风险溢酬为 $\lambda_{0s}+\lambda_{1s}s_t$. 这是广义 Vasicek模型的一种假定，在标准的 Vasicek模型中，λ_{1s} 为 0，因此在式（4）右边增加了第 2项；由于官方利率的跳跃强度为 h，$E(dN_t)=h dt$，dN_t 具有趋势，而 $E(dN_t-h dt)=0$，$dN_t-h dt$ 为纯粹的随机波动，也即风险，假定投资者对这类风险的一单位要求的风险溢酬为 λ_J，式（4）右边就增加了第 3项. 假定 λ_J 为常数主要是为了简化问题. 在无套利定价框架下，可以证明随机贴现因子的存在，但没有规定风险溢酬的形式，作为仿射模型的一类，广义 Vasicek 模型一般假定风险溢酬是状态变量的线性函数[26]. 有了随机贴现因子的假定（4），根据随机贴现因子定价理论，债券的回报率满足定价方程

$$E_t\left(\frac{dP}{P}\right)-r dt=-E_t\left(\frac{dP}{P}\frac{d\xi}{\xi}\right) \tag{5}$$

式（5）来自于 Cochrane[27] 第 363页的公式（19.14）. 随机贴现因子定价模型是一般形式的定价模型，市场无套利机会加上一些比较容易满足的条件，式（5）就应该满足. 不同的定价模型在于对 ξ 作了具体的假定. 本文对 ξ 的假定来自仿射模型的假定[18]. 把债券价格 $P(r_t^d, s_t;\tau)$ 代入定价模型式（5），并根据状态变量，随机贴现因子的表达式（1），（3），（4），利用 Ito引理，得到债券价格满足方程

$$\frac{-P_\tau(r_t^d, s_t;\tau)+P_s(r_t^d, s_t;\tau)\kappa_s(\mu_s-s_t)+\frac{1}{2}\sigma_s^2P_{ss}(r_t^d, s_t;\tau)+hE[P(r_t^d+J_t, s_t;\tau)-P(r_t^d, s_t;\tau)]}{P}-r$$
$$=\frac{P_s(r_t^d, s_t;\tau)}{P}\sigma_s(\lambda_{0s}+\lambda_{1s}s_t)+h\lambda_J\frac{E[P(r_t^d+J_t, s_t;\tau)-P(r_t^d, s_t;\tau)]}{P} \tag{6}$$

Vasicek模型是一类特殊的仿射模型，按照仿射模型的假定，假定瞬时短期利率是状态变量的线性函数

$$r_t=c_0+c_1r_t^d+c_2s_t \tag{7}$$

状态变量的形式（1），（3），随机贴现因子的形式（4）和短期利率的形式（7）决定了债券价格，可猜测债券价格也具有仿射模型的形式

$$P(r_t^d, s_t;\tau)=\exp[-A(\tau)-B_1(\tau)r_t^d-B_2(\tau)s_t] \tag{8}$$

把式（8）代入式（6），整理得

$$-[-A'(\tau)-B_1'(\tau)r_t^d-B_2'(\tau)s_t]-B_2(\tau)[\kappa_s(\mu_s-s_t)-\sigma_s(\lambda_{0s}+\lambda_{1s}s_t)]+\frac{1}{2}\sigma_s^2B_2^2(\tau)-(c_0+c_1r_t^d+c_2s_t)+$$

$$h(1-\lambda_J)\mathrm{E}[\exp(-B_1(\tau)J_t)-1]=0 \quad (9)$$

虽然式(9)的最后一项可以计算出精确的分析表达式,但为了简单化,用泰勒展开方法给出其近似的分析表达式,即

$$\mathrm{E}[\exp(-B_1(\tau)J_t-1]=-\alpha_J B_1(\tau)+\frac{1}{2}(\alpha_J^2+\sigma_J^2)B_1^2(\tau) \quad (10)$$

式(9)和(10)结合,得到

$$\begin{aligned}&[-A'(\tau)-B_1'(\tau)r_t^d-B_2'(\tau)s_t]+\\&B_2(\tau)[\kappa_s(\mu_s-s_t)-\sigma_s(\lambda_{0s}+\lambda_{1s}s_t)]-\\&\frac{1}{2}\sigma_s^2B_2^2(\tau)+(c_0+c_1r_t^d+c_2s_t)-h(1-\lambda_J)\times\\&\left[-\alpha_JB_1(\tau)+\frac{1}{2}(\alpha_J^2+\sigma_J^2)B_1^2(\tau)\right]=0\end{aligned} \quad (11)$$

把式(11)等式左边看成变量 r_t^d, s_t的函数,它们的系数以及剩余项都应该为 0,也就是

$$B_1'(\tau)=c_1 \quad (12a)$$

$$B_2'(\tau)=-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)B_2(\tau)+c_2 \quad (12b)$$

$$\begin{aligned}A'(\tau)=&(\kappa_s\mu_s-\sigma_s\lambda_{0s})B_2(\tau)-\\&\frac{1}{2}\sigma_s^2B_2^2(\tau)+c_0-h(1-\lambda_J)\times\\&\left[-\alpha_JB_1(\tau)+\frac{1}{2}(\alpha_J^2+\sigma_J^2)B_1^2(\tau)\right]\end{aligned} \quad (12c)$$

在到期日,债券价格等于面值 1,因此

$$P(r_t^d,s_t;0)=\exp[-A(0)-B_1(0)r_t^d-B_2(0)s_t]=1$$

等价的

$$A(0)=B_1(0)=B_2(0)=0 \quad (13)$$

1年期市场利率等于 1年期储蓄存款利率 r_t^d 加上利率差 s_t,1年期市场利率也是面值为 1的 1年期零息票债券价格的对数的负数,因此

$$-\ln[P(r_t^d,s_t;1)]=A(1)+B_1(1)r_t^d+B_2(1)s_t=r_t^d+s_t$$

等价的

$$A(1)=0,\ B_1(1)=1,\ B_2(1)=1 \quad (14)$$

根据式(12a)和边界条件式(13),(14),得到 $B_1(\tau)$的解为

$$B_1(\tau)=\tau \quad (15)$$

根据式(12b),和边界条件式(13),(14),得到 $B_2(\tau)$的解为

$$B_2(\tau)=\frac{1}{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)]}\times\{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)\tau]\} \quad (16)$$

式(15),(16)代入式(11c),并根据边界条件式(13),(14)得到

$$\begin{aligned}A(\tau)=&\frac{(\kappa_s\mu_s-\sigma_s\lambda_{0s})}{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)]}\times\\&\left\{\tau-\frac{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)\tau]}{\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s}\right\}-\\&\frac{1}{2}\frac{\sigma_s^2}{(1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)])^2}\times\\&\left[\tau-2\frac{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)\tau]}{\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s}+\right.\\&\left.\frac{1-\exp[-2(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)\tau]}{2(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)}\right]+\\&c_0\tau+h(1-\lambda_J)\left\{\frac{1}{2}\alpha_J\tau^2-\right.\\&\left.\frac{1}{6}(\alpha_J^2+\sigma_J^2)\tau^3\right\}\end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned}c_0=&\frac{(\kappa_s\mu_s-\sigma_s\lambda_{0s})}{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)]}\times\\&\left\{1-\frac{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)]}{\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s}\right\}+\\&\frac{1}{2}\frac{\sigma_s^2}{(1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)])^2}\times\\&\left[1-2\frac{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)]}{\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s}+\right.\\&\left.\frac{1-\exp[-2(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)]}{2(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)}\right]-\\&h(1-\lambda_J)\left\{\frac{1}{2}\alpha_J-\frac{1}{6}(\alpha_J^2+\sigma_J^2)\right\}\end{aligned} \quad (18)$$

由于期限为 τ的利率 $r_t^{(\tau)}$ 和期限为 τ的面值为 1的零息票债券的价格具有关系

$$r_t^{(\tau)}=-\frac{1}{\tau}\ln P(r_t^d,s_t;\tau) \quad (19)$$

根据式(8)及前面的推导,可以导出期限为 τ的利率为

$$\begin{aligned}r_t^{(\tau)}&=\frac{A(\tau)}{\tau}+\frac{B_1(\tau)}{\tau}r_t^d+\frac{B_2(\tau)}{\tau}s_t\\&=\frac{A(\tau)}{\tau}+r_t^d+\frac{1-\exp[-\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)\tau]}{1-\exp[-(\kappa_s+\lambda_{1s}\sigma_s)]}\frac{1}{\tau}s_t\end{aligned} \quad (20)$$

式(20)说明,在此利率模型下,官方利率的调整导致各个期限的市场利率作相应调整,调整的幅度一样.

2 模型估计方法

观测数据是 1年期储蓄存款利率和 1、2、3、4、5年期市场利率. 数据为月度数据, 数据时间间隔长度是 $\Delta t = 1/12$, 共有 $T = 120$个时间序列数据. 为了利用数据估计模型的各个参数, 需要对连续时间表达的利率模型离散化.

储蓄存款利率服从跳跃型随机过程, 由于储蓄存款利率调整次数不频繁, 为方便, 假定一个月最多调整一次. 也就是储蓄存款利率的变化为

$$r^d_{t+\Delta t} = r^d_t + J_{t+\Delta t} \times \eta_{t+\Delta t} \tag{21}$$

其中

$$J_{t+\Delta t} \sim N(\mu_J, \sigma^2_J)$$

$$\eta_{t+\Delta t} \sim \begin{cases} 1 & h\Delta t \\ 0 & 1 - h\Delta t \end{cases}$$

根据式(3), 1年期利率差满足时间序列关系

$$s_{t+\Delta t} = s_t e^{-\kappa_s \Delta t} + \mu_s(1 - e^{-\kappa_s \Delta t}) + \sigma_s e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} d\omega_s \tag{22}$$

因此一年期利率差服从正态分布

$$s_{t+\Delta t} \sim N(E_t(s_{t+\Delta t}), \quad \mathrm{var}_t(s_{t+\Delta t})) \tag{23}$$

条件数学期望和方差分别为

$$E_t(s_{t+\Delta t}) = s_t e^{-\kappa_s \Delta t} + \mu_s(1 - e^{-\kappa_s \Delta t})$$

$$\mathrm{var}_t(s_{t+\Delta t}) = \sigma^2_s e^{-2\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{2\kappa s} ds = \sigma^2_s \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}$$

假定市场利率的观测值 $y^{(\tau)}_t$ 含有随机误差, 随机误差可能是利率期限结构的拟合误差, 也可能是市场随机供求造成的, 随机误差记为 $\varepsilon^{(\tau)}_t$, 即观测到的市场利率与模型产生的市场利率满足关系

$$y^{(\tau)}_t = r^{(\tau)}_t + \varepsilon^{(\tau)}_t = \frac{A(\tau)}{\tau} + r^d_t + \frac{1 - \exp[-(\kappa_s + \lambda_{1s}\sigma_s)\tau]}{1 - \exp[-(\kappa_s + \lambda_{1s}\sigma_s)]} \times \frac{1}{\tau} s_t + \varepsilon^{(\tau)}_t \quad (\tau = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{24}$$

假定随机误差 $\varepsilon^{(\tau)}_t$ $(\tau = 1, 2, 3, 4, 5)$ 相互独立同分布, 服从正态分布, 即

$$\varepsilon^{(\tau)}_t \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon) \quad (\tau = 1, 2, 3, 4, 5)$$

模型参数多, 涉及到不可观测的状态变量 $\{s_t: t = 1, 2, \ldots, T\}$, 对估计方法和估计技巧要求高, 本文拟采用 MCMC方法进行估计. MCMC方法实际上是一种贝叶斯估计方法, 它要求对未知参数的先验分布做出假定.

官方利率 r^d_t 的变化过程涉及三个未知参数 α_J, σ_J, h. α_J 反映了利率调整平均大小, 由于样本区间包含升息和降息两个时间段, 利率可能上调, 也可能下调, α_J应该在 0附近. 因此假定参数 α_J的先验分布为正态分布, 并假定先验分布的均值为 0, 标准差为 1, 即

$$\alpha_J \sim N(0, 1)$$

与一般贝叶斯分析方法相同, 假定精度参数 $1/\sigma^2_J$ 服从 Gamma分布, 即

$$1/\alpha^2_J \sim \mathrm{Gamma}(0.01, \ 0.01)$$

$h/12$是一个月内利率调整的概率, 在 0到 1之间, 由于利率调整次数较少, $h/12$应该比较小, 假定 $-\ln[1/(h/12) - 1]$ 服从正态分布, 即

$$-\ln[1/(h/12) - 1] \sim N(-10, 100)$$

1年期利率差 s_t 的变化模型中有三个未知参数 κ_s, μ_s, σ_s. 其中 κ_s 反映 s_t 的均值回复速度, 从理论上讲, $\kappa_s > 0$, 如果 s_t的持续性较强, 均值回复速度参数就会比较小. 对于利率来说, 变化的持续性一般比较强, 从图 2可以看出观测到的利率差 $y^{(1)}_t - r^d_t$ 的持续性很强, 事实上它的一阶自回归的滞后项的回归系数为 0.96, 因此假定 κ_s 的先验分布服从正态分布, 但限定它的取值在 0到 1之间, 用 Winbugs语言[28] 的表达方式, 假定先验分布为

$$\kappa_s \sim N(0.2, 1) I(0, 1)$$

μ_s 是利率差 s_t 的长期均值, 根据样本观测值中 1年期市场利率和 1年期储蓄存款利率的差别大小, 假定它服从如下正态分布

$$\mu_s \sim N(0.5, 100)$$

σ_s 是利率差的波动率, 与一般假定一样, 假定 $1/\sigma^2_s$ 的先验分布为 Gamma分布

$$1/\sigma^2_s \sim \mathrm{Gamma}(0.1, 0.1)$$

σ_ε 是市场利率的观测误差的标准差, 假定 $1/\sigma^2_\varepsilon$ 服从 Gamma分布

$$1/\sigma^2_\varepsilon \sim \mathrm{Gamma}(0.01, 0.01)$$

最后是三个风险溢酬参数 λ_0, λ_1, λ_J, 对他们的正负号不作假定, 因此假定他们服从零均值的正态

分布, 并具有较大的方差, 即

$$\lambda_{0s} \sim N(0, 10)$$

$$\lambda_{1s} \sim N(0, 10)$$

$$\lambda_{y} \sim N(0, 10)$$

最后需要说明的是, 先验分布一般假定参数的取值在一个很大的范围内, 也就是避免对参数的取值作比较具体的设定. 另外样本较大时, 估计结果受先验分布的影响很小.

3 实证结果及其讨论

本文使用的样本数据为月度数据, 从 1998年 1月至 2007年 12月, 数据来自复旦大学中国固定收益研究中心. 具体来讲, 计算过程如下: 把每月末的上海证券交易所债券交易价格数据 (来自 wind数据库), 输入到 Matlab中利率期限结构拟合函数 termfit 该函数只有一个参数需要自己选取, 也就是拟合的利率曲线的光滑度 (smoothing), 选取范围从 0到 1. 由于中国债券市场国债数量较少, 特别在样本早期, 因此选取光滑度参数为 0.9. 市场利率期限结构和 1年期储蓄存款利率的样本数据见图 1. 可以看到, 在 1998年至 2000年这一段降息期和 2005年至 2007年这一段升息期期间, 1年期市场利率和 1年期储蓄存款利率变化非常一致. 在 2001年到 2004年这一段时间, 官方利率调整次数较少, 1年期市场利率和 1年期储蓄存款利率差别相对较大. 表 1给出了市场利率期限结构和 1年期储蓄存款利率的基本统计特征. 可以看到, 随着期限增加, 市场利率的平均值增加, 波动率降低, 市场利率有明显的峰度, 不服从正态分布, 并表现出很高的序列相关性.

表 1 市场利率, 1年期储蓄存款利率的基本统计特征

Table 1 Basic statistics of market interest rates, one-year deposit interest rate

期限 (年)	均值	标准差	偏度	峰度	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_6	ρ_{12}
	市场利率								
1	2.63	0.94	1.64	6.06	0.89	0.78	0.68	0.50	0.19
2	2.91	0.92	1.44	5.40	0.90	0.80	0.70	0.50	0.15
3	3.16	0.91	1.20	4.65	0.92	0.82	0.72	0.50	0.11
4	3.37	0.91	1.02	4.07	0.93	0.83	0.73	0.51	0.07
5	3.53	0.90	0.93	3.73	0.93	0.84	0.75	0.51	0.05
	储蓄存款利率								
1	2.25	1.05	1.82	5.00	0.93	0.86	0.81	0.62	0.29

注: ρ_i: i = 1, 2, 3, 6, 12 代表滞后 i阶的自相关系数.

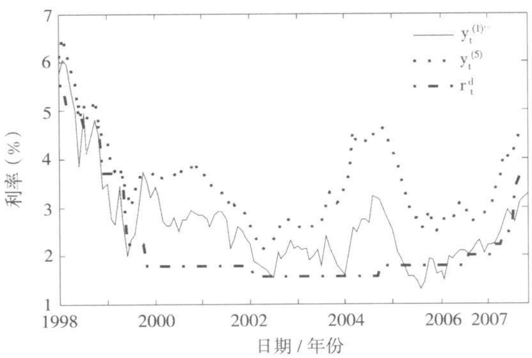

图 1 1年期, 5年期市场利率 ($y_t^{(1)}$, $y_t^{(5)}$) 和扣除利息税后的 1年期储蓄存款利率 (r_t^d)

Fig. 1 One-year, five-year market interest rates ($y_t^{(1)}$, $y_t^{(5)}$) and one-year deposit interest rate after tax(r_t^d)

利用 MCMC方法对利率模型进行估计，采用 Winbugs[19] 语言进行编程，模拟 1万次，利用后 6 000次的模拟值计算参数均值、标准差、置信度为 95% 的置信区间. 参数的估计值如表 2.在表 2中，参数的模拟值的均值相当于参数的估计值，模拟值的标准差相当于参数估计值的标准差，最后两列分别为模拟值 2.5% 的分位数和模拟值 97.5% 的分位数，相当于参数的置信度为 95% 的置信区间. h = 1.645相当于一个月内 1年期储蓄存款利率跳跃的概率为 0.14.利率差 s_t 的均值回复系数为 κ_s = 0.35，说明利率差相对于利率本身，具有较快的均值回复速度(在单因子 Vasicek利率模型的实证分析中，这一项参数往往小于 0.2). 利率差 s_t 的长期均值参数 μ_s 为正，但不显著，同时利率差具有非常显著的波动率. 1年期储蓄存款利率跳跃大小 J_t 的均值 μ_J 为负，但很小，不显著；跳跃大小的波动率较大，显著的不为 0.市场利率观测值的随机误差 $\{\varepsilon_t: t = 1, 2, \cdots, T\}$ 的标准差 σ_ε 虽然显著的不为 0，但相对于官方利率调整幅度的波动率 σ_J 和利率差的波动率 σ_s 来讲很小. 最后看风险溢酬参数. λ_{0s} 为负，但不显著；λ_{1s} 为负，显著不为 0，λ_J 的估计值为 1.956，显著的为正. 说明 1年期储蓄存款利率代表的官方利率的波动是债券风险溢酬的重要来源.

表 **2**　参数的估计值

Table 2 Estimated values of parameters

	均值	标准差	2.50%	97.50%
h	1.645	0.367	1.069	2.567
κ_s	0.350	0.211	0.033	0.717
μ_s	0.096	0.297	−0.504	0.665
σ_s	0.795	0.051	0.695	0.900
λ_{0s}	−0.190	0.434	−0.924	0.696
λ_{1s}	−0.544	0.274	−1.059	−0.146
μ_J	−0.016	0.244	−0.294	0.756
σ_J	0.766	0.178	0.526	1.115
λ_J	1.956	0.434	1.331	2.969
σ_ε	0.177	0.006	0.166	0.188

利率差 s_t 作为隐含状态变量在模型模拟估计时，也给出了模拟值，模拟 1万次的后 6千次的模拟值的平均值见图 2.图 2还给出了 1年期市场利率观测值与 1年期储蓄存款利率的差 $y_t^{(1)} - r_t^d$，两者变化具有类似的形状，表现出很高的相关系数.

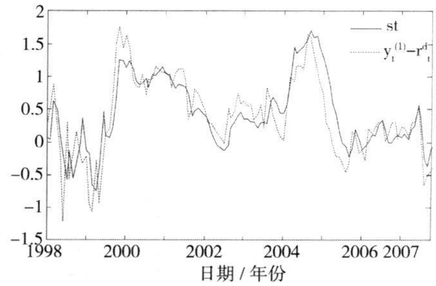

图 **2**　利率差的估计值和观测值的比较

Fig. 2 Comparison of estimated spread and actual spread

根据参数的估计值和状态变量的估计值，利用式(20)，可以计算出模型给出的利率，模型给出的利率期限结构如图 3.可以看到，无论是升息期还是降息期，模型给出的利率期限结构都是上扬的利率期限结构(upward yield curve)，与市场利率期限结构的样本观测值形状一致. 图 1和图 3作比较，模型产生的利率期限结构与市场利率期限结构具有类似的形状. 但也有明显的差别，特别是 1年期市场利率，样本观测值与利率模型产生的利率相比较，波动更大. 这意味着两种可能性，第一种可能是样本观测值有随机误差，就像模型参数估计值告诉我们的那样；第二种可能性是模型没有完全刻画出市场利率的特征，模型还有待改进. 为了进一步考察模型的拟合效果，表 3给出了利率模型产生的利率期限结构的统计特征. 比较表 1和表 3，市场利率期限结构观测值的统计特征与模型产生的利率期限结构的统计特征基本相同. 说明模型较好的拟合了市场利率期限结构. 如果要比较它们的细微差异，可以看到，模型产生的 5年期利率的平均值高出 5年期市场利率观测值的平均值 10个基本点(basis point). 模型产生的利率期限结构的标准差与市场利率期限结构观测值的标准差基本相同，但 1年期利率的标准差稍低一点. 模型给出的利率期限结构与市场利率期限结构样本观测值的偏度、峰度也基本一致，模型给出的利率期限结构短期利率的偏度、峰度稍小一点，但长期利率的偏度、峰度稍大一点. 两个利率期限结构的自相关系数基本相同.

上述给出的利率模型对市场利率期限结构观测值拟合效果的另外一种办法是与没有把官方利率的变化考虑进来的传统的 Vasicek模型作比

较. 在传统的 Vasicek模型下, 市场利率服从正态分布, 不可能拟合市场利率期限结构样本观测值的偏度和峰度特征. 在这方面本文给出的模型与传统的 Vasicek模型比较, 是一个明显的改进.

表 3 模型估计的利率期限结构的统计特征

Table 3 Basic statistics of yield curve estimated with the model

期限(年)	均值	标准差	偏度	峰度	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_6	ρ_{12}
1	2.64	0.89	1.41	5.17	0.92	0.83	0.73	0.52	0.14
2	2.89	0.89	1.36	5.06	0.92	0.83	0.73	0.51	0.13
3	3.18	0.90	1.31	4.94	0.92	0.82	0.73	0.51	0.12
4	3.45	0.90	1.25	4.80	0.92	0.82	0.72	0.50	0.11
5	3.65	0.91	1.19	4.66	0.92	0.82	0.72	0.49	0.09

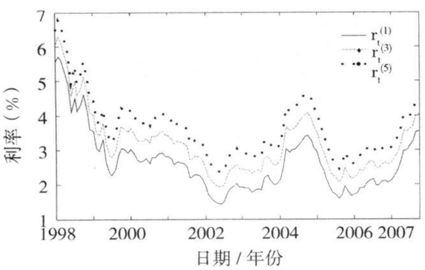

图 3 模型给出的利率期限结构

Fig. 3 Yield curve estimated with the model

4 结束语

由于 1年期储蓄存款利率被认为是中国利率体系的基准利率, 对市场利率有很大影响, 本文把它作为影响市场利率期限结构的状态变量. 市场利率不同于官方利率, 它还受其它经济变量的影响. 这些其它经济变量对市场利率的影响用 1年期市场利率与 1年期储蓄存款利率的差别来反映, 把它作为影响市场利率或债券价格的另外一个状态变量. 假定这两个状态变量分别服从跳跃过程和均值回复过程, 它们决定了债券的价格和市场利率期限结构. 在仿射模型的框架下, 给出了市场利率期限结构的分析表达式. 并以 1998年至 2007年的利率期限结构月度数据为样本, 通过 Winbugs语言编程利用 MCMC方法对模型进行了实证分析. 模型能够很好地拟合利率期限结构样本观测值的均值、标准差、偏度、峰度特征, 以及利率期限结构样本观测值的序列相关性特征. 利率模型无论在升息周期和降息周期, 都能够产生上扬的利率期限结构, 与样本观测值一致. 模型的参数估计结果还表明, 债券的超额回报率显著受官方利率跳跃风险的影响和 1年期市场利率与储蓄存款利率差大小的影响.

上述模型在构造上有一定理论创新, 虽然与 Piazzesi[9] 有很多相同之处, 但这里强调一下不同之处. 第一, 官方利率的描述方式不同, 上述模型用一个随机变量描述官方利率的调整大小, 可以同时描述升息和降息期官方利率的变化大小. 第二, 状态变量是 1年期储蓄存款利率和 1年期市场利率差, 而不是短期目标利率和短期利率差, 导致模型推导和估计方法都有所不同. 与 Piazzesi[9] 相比, 创新点是给出了市场利率期限结构的分析表达式, 不是是对市场利率期限结构拟合的精确度还有欠缺, 需要进一步的完善.

参 考 文 献:

[1] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal Financial Economics, 1977, 5(1): 177 - 188.

[2] Cox J, Ingersoll J, Ross S. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 2(53): 385 - 407.

[3] Duffie D, Kan R. A yield-factor model of interest rates[J]. Mathematical Finance, 1996, 6(4): 379 - 406.

[4] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology[J]. Econometrica, 1992, 60(1): 77 - 105.

[5] Brace A, Gatarek D, Musiela M. The market model of interest rate dynamics[J]. Mathematical Finance, 1997, 4(2):

227- 155.

[6] Balduzzi P, Bertola G, Foresi S. A model of target changes and the term structure of interest rate[J]. Journal of Monetary Economics, 1997, 39(2): 223- 249.

[7] Balduzzi P, Bertola G, Foresi S, et al. Interest rate targeting and the dynamics of short rates[J]. Journal of Money, Credit and Banking, 1998, 30(1): 26- 50.

[8] Anderson M, Dillen H, Sellin P. Monetary policy signaling and movements in the term structure of interest rates[J]. Journal of Monetary Economics, 2006, 53(8): 1815- 1855.

[9] Piazzesi M. Bond yield and the federal reserve[J]. Journal of Political Economy, 2005, 113(2): 311- 328.

[10] 王春峰，杨建林，蒋祥林. 含有违约风险的利率风险管理[J]. 管理科学学报，2006, 9(2): 53- 60.
Wang Chun-feng, Yang Jian-lin, Jiang Xiang-lin. Management of interest rate risk with default risk[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(2): 53- 60. (in Chinese)

[11] 杨宝臣，张玉桂，姜中锡. 基于凸度的套期保值模型及分析[J]. 管理科学学报，2005, 8(6): 69- 73.
Yang Bao-chen, Zhang Yu-gui, Jiang Zhong-xi. Convexity based hedge with Treasury futures: Model and numerical analysis[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(6): 69- 73. (in Chinese)

[12] 黄玮强，庄新田. 中国证券交易所国债和银行间国债指数的关联性分析[J]. 系统工程，2006, 24(7): 62- 66.
Huang Wei-qiang, Zhuang Xin-tian. The linkage analysis is between the bourse and inter-bank national debt indices of China[J]. Systems Engineering, 2006, 24(7): 62- 66. (in Chinese)

[13] 朱世武，陈健恒. 积极债券投资策略实证研究[J]. 统计研究，2006, 6(3): 56- 60.
Zhu Shi-wu, Chen Jian-heng. Empirical study on active investment strategy[J]. Statistical Research, 2006, 6(3): 56- 60. (in Chinese)

[14] 林 海，郑振龙. 中国利率动态模型研究[J]. 财经问题研究，2005, (9): 45- 49.
Lin Hai, Zheng Zhen-long. Dynamic interest rate model for Chinese market[J]. Research on Financial and Economic Issues, 2005, (9): 45- 49. (in Chinese)

[15] 谢 赤，吴雄伟. 基于 Vasicek和 CIR模型中的中国货币市场利率行为实证分析[J]. 中国管理科学，2002, 10(3): 22- 25.
Xie Chi, Wu Xiong-wei. An empirical analysis of the interest rate behavior in Chinese monetary market using the Vasicek and CIR Models[J]. Chinese Journal of Management Science, 2002, 10(3): 22- 25. (in Chinese)

[16] 朱世武，陈健恒. 交易所国债利率期限结构实证研究[J]. 金融研究，2003, (10): 63- 73.
Zhu Shi-wu, Chen Jian-heng. Empirical study of treasury bonds term structure in bourse[J]. Journal of Finance in China, 2003, (10): 63- 73. (in Chinese)

[17] 宋福铁，陈浪南. 卡尔曼滤波法模拟和预测沪市国债期限结构[J]. 管理科学，2006, 19(6): 81- 88.
Song Fu-tie, Chen Lang-nan. Using Kalman filter approach to simulate and estimate the term structure of interest rates in Shanghai Stock Exchange[J]. Management Science in China, 2006, 19(6): 81- 88. (in Chinese)

[18] 傅曼丽，屠梅曾，董荣杰. Vasicek状态空间模型与上交所国债利率期限结构实证[J]. 系统工程理论方法应用，2005, 14(5), 2005: 458- 461.
Fu Man-li, Tu Mei-zeng, Dong Rong-jie. Vasicek state space model and empirical study on the yield cure in the SSE[J], Systems Engineering Theory, Methodology and Applications, 2005, 14(5), 2005: 458- 461. (in Chinese)

[19] 范龙振. 短期利率在上交所债券市场的实证分析[J]. 管理科学学报，2007, 10(2): 80- 89.
Fan Long-zhen. Empirical analysis of short interest rate models with half-year interest rate in the Shanghai Stock Exchange[J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10(2): 80- 89. (in Chinese)

[20] 刘金全，郑挺国. 利率期限结构的马尔科夫区制转移模型与实证分析[J]. 经济研究，2006, (11): 82- 91.
Liu Jin-quan, Zheng Ting-guo. Markov regime switching model and empirical analysis of the term structure of interest rates[J]. Economic Research, 2006, (11): 82- 91. (in Chinese)

[21] 张金清，周茂彬. 中国短期利率跳跃行为的实证研究[J]. 统计研究，2008, 25(1): 59- 64.
Zhang Jin-qing, Zhou Mao-bin. Empirical research on the jump behavior of Chinese short rate[J]. Statistical Research, 2008, 25(1): 59- 64. (in Chinese)

[22]王春峰，吴启权，李晗虹．考虑宏观变量仿射期限结构下附息债券期权定价研究[J]．预测，2007，26(6)：30－35.
Wang Chun-Feng, Wu Qi-Quan, Li Han-Hong. Research on coupon bond derivatives with affine term structure with macro-variables[J]. Forecasting, 2007, 26(6): 30－35. (in Chinese)

[23]林 海，郑振龙．利率期限结构研究述评[J]．管理科学学报，2007，10(1)：79－98
Lin Hai, Zheng Zhen-long. Term structure of interest rate: Selected literature review[J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10(1): 79－98 (in Chinese)

[24]胡海鹏，方兆本．中国利率期限结构平滑样条拟合改进研究[J]．管理科学学报，2009，12(1)：101－110
Hu Hai-peng, Fang Zhao-ben. Research on improving smoothing spline method to fit Chinese term structure of interest rates [J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(1): 101－110. (in Chinese)

[25]杨宝臣，李 彪．基于最优动态利率模型的认股权证定价模型研究[J]．系统工程学报，2009，24(3)：264－271.
Yang Bao-chen, Li Biao. Research on warrant pricing based on optimal dynamic interest rate model[J]. Journal of Systems Engineering, 2009, 24(3): 264－271. (in Chinese)

[26] Dai Q, Singleton K. Expectation puzzles, time-varying risk premia, affine models of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 2002, 65(3): 415－441.

[27] Cochrane J. Asset Pricing[M]. Princeton: Princeton Press, 2001

[28] Spiegelhalter D, Thomas A, Best N, et al. Winbugs User Manual[R]. www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs, 2003.

Generalized Vasicek model with jump type one-year deposit rate as state variable

FAN Long-zhen

School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract Because one-year deposit interest rate is considered as the benchmark rate for the system of Chinese interest rates, it is assumed as a state variable to affect market rates. Market rates are different from the official interest rates, and they are affected by other economic variables. The effects of these economic variables are assumed to be represented by the difference in one-year market rate and one-year deposit rate. The difference is assumed as another state variable. The one-year deposit rate is assumed to follow a jump process, and the difference is assumed to follow a mean-reverting model. In the framework of affine model, the yield curve of market rates is determined by the two state variables. The closed-form solutions for market interest rates are obtained, and then MCMC is used as estimation methodology to test the model empirically. The empirical results indicate that the model fits the statistical characteristics of the sample data very well. The empirical results also show that bond excess returns are significantly related to jump risk of the deposit interest rate and volatile of market interest rate.

Key words deposit interest rate; market interest rate; jump process; affine model; MCMC