考虑支付红利的可转债模糊定价模型及其算法①

张卫国, 史庆盛, 肖炜麟
(华南理工大学工商管理学院, 广州 510640)

摘要: 由于金融市场经常受到一些模糊不确定因素的影响,使得可转债定价具有模糊特征.本文研究了具有支付红利以及标的资产为美式期权的可转债模糊定价问题.在 Black-Scholes模型的基础上,提出了该类型可转债的模糊定价模型,它推广了传统的具有确定参数值的可转债定价模型.为了方便估计可转债价值,给出了具有三角模糊数形式的可转债定价公式.最后,选取实例分析和检验了该模糊定价方法的实用性.

关键词: 可转换债券; 支付红利; 美式期权; Black-Scholes模型; 模糊数
中图分类号: F830.91 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2010)11-0086-08

0 引 言

可转换债券是一种同时具有债券和期权特征的复杂金融衍生产品.国外可转债定价模型最早出现于 20世纪 60年代,这一时期研究的基本思路是首先设定未来某个时点可转债的价值等于其投资价值 (IV) 与转换价值 (CV) 的最大值,即 $\mathrm{Max}(IV, CV)$,然后贴现这个值作为可转债的现价.

到了 20世纪 70年代, Black等[1]提出了著名的 Black-Scholes公式,可转债定价理论有了很大的发展.这一时期,国外学者主要利用期权定价理论来研究可转债定价的合理模型.此后, Merton等[2]对期权定价理论进行了完善和推广.首先, Merton, Black和 Cox从公司价值的角度提供了一个关于可转债的定价模型;其次, Ingersoll[3]从股票期权的角度提供了一个关于可转债的定价模型,并且使用了 Black-Scholes定价模型; Brennan和 Schwarz[4]把期权定价模型的基本原则应用到了最普通的可转债的定价上,并在此基础上对可转债发行公司所采取的最优赎回政策进行了进一步的分析和研究.之后他们发展了 PDE和边界条件理论来给可转债在相当广泛的条件下进行定价,并且使用了有限差分法.然而,上述的研究均假设股票、无风险利率等参数为确定值, Wu[5-7], Yoshida[8]将模糊数学理论引入到期权定价中,并在 Black-Scholes期权定价模型的基础上,给出了期权模糊定价模型. Thiagarajah等[9]引入了二次适应模糊数,并给出了基于的 Black-Scholes模型的更为一般的期权模糊定价模型. Muzzioli[10]计算了风险中性的可能性分布,并给出了基于风险中性的美式期权价格计算公式. Thavaneswaran[11]应用期权的模糊加权可能性定价模型,描述了期权定价的误差.

在中国,由于可转债的发展尚在初级阶段,关于可转债定价方法的研究处于引进和消化吸收阶段.研究内容主要是引进国外期权定价的研究成果并充分考虑了我国的实际情况,例如:郑振龙和林海[13]构造了适应中国可转换债定价的模型,对中国的可转换债券的价格进行了研究.马超群和唐耿[14]针对我国可转债的存在的信用风险等实际情况,建立了二叉树定价模型,区分了可转债的权益部分和债券部分.另一方面,考虑到中国证

① 收稿日期: 2009-10-15; 修订日期: 2010-08-05.
基金项目: 教育部人文社会科学研究规划基金资助项目 07JA630048); 国家自然科学基金资助项目 (70825005).
作者简介: 张卫国(1963—), 男, 陕西安康人, 博士, 教授. Email: wgzhang@scut.edu.cn

券市场上不可流通股的转变问题, 顾勇和吴冲锋[15] 设计了一种基于回售条款的可转债退出模式, 对其定价方法进行了研究, 并在理论分析的基础上, 给出了定价的数值仿真算法以及具体的算例分析. 龚朴和何志伟[16] 则基于多期复合期权理论, 建立了可转换债券定价的控制方程. 韩立岩等[17] 将基于 PLS的美式期权定价方法拓展到了可转债的定价. 陈晓红等[18] 建立了一个关于公司价值的方程, 并由此间接得到可转债价值的方法. 杨立洪等[19] 以股票价格、随机利率、违约发生的概率作为可转换债券的基础变量, 运用无套利定价原理, 得出了可转换债券的三因素 PDE 定价模型.

上述研究在计算可转债期权价值时常常未考虑股票红利的支付. 根据戴锋等[20] 以及时均民和王桂兰[21] 的研究, 不考虑红利支付的美式看涨期权不宜提前执行. 故可直接运用 Black-Scholes模型对不支付股票红利的可转债进行定价. 另外, 现有关于模糊期权定价方面的研究文献[5,6,8] 也主要局限于欧式期权. 本文考虑了支付股票红利的可转债模糊定价问题. 首先, 对美式期权的理论价值进行了讨论, 并运用 Black-Scholes模型给出了美式期权的近似理论价值. 在此基础上, 提出了支付股票红利的可转债定价方法. 其次, 本文考虑了影响可转债定价的标的股票价格、贴现率、波动率以及无风险利率等主要因素变量的模糊性, 给出了支付红利的可转债模糊定价模型. 最后通过数值例子对可转债的理论价值进行具体分析, 数值结果显示了该模糊定价模型的可行性和优越性.

1　可转债价值分析及其传统定价模型

可转债与期权的价值结构不同, 因此, 需要先对可转债的价值构成和定价原理进行分析. 可转换债券一般由普通的公司债券与股票的买入期权复合而成, 同时具有公司或企业债券、股票和期权的有关特性, 在没有附加条款的情况下, 基础可转换债券的价值可以由普通债券的纯债券价值和买入期权的期权价值两部分构成. 其价值构成可以由以下公式表达:

可转债价值 = 纯债券价值 + 可转债包含的买入期权价值.

1.1　纯债券价值

纯债券价值是指若不考虑可转换债券的转换特征, 其在市场上能销售的价值. 它是可转换债券的最低限价. 也就是说, 可转换债券价格是不能低于其纯债券价值的. 纯债券价值用公式表示为:

$$B = \sum_{t=0}^{n} \frac{I}{(1+i)^{t+y}} + \frac{A}{(1=I)^{n+y}} \tag{1}$$

公式中各符号的含义如下: B 表示普通债券部分的价值; I 表示债券每年的利息; i 表示贴现率; A 表示债券的本金; n 表示从现在起至到期日的剩余年限的整年数; y 表示从现在起至下一次付息日不足一年的时间 (单位为年, $0 < y < 1$); $n+y$ 则表示从现在起至到期日的剩余年数.

1.2　期权价值

由于可转换债券赋予投资者以将其持有的债务按规定的价格和比例, 在规定的时间内转换成普通股的选择权. 因此可转债包含的买入期权为美式期权. 美式期权的定价问题是当前金融衍生产品定价面临的重要研究课题之一. 由于考虑了股票红利的支付, 因此在对可转债的期权价值进行计算时, 需要解决的第一个困难便是美式期权的路径依赖问题.

目前国内外关于期权的理论定价问题基本上都是建立在 B-S期权定价方法的基础之上. 同时 B-S定价模型的计算相对于蒙特卡洛模拟、有限差分方法、二叉树模型等较为方便, 且所需变量也很容易在市场上获得. 因此, 在本文中, 也运用修正的 B-S期权定价理论来近似计算可转债中期权的价格.

假定已知基准股票在期权有效期内某确定时刻 $\tau_k\ (k = 1, 2, \cdots, p)$ 支付确定的红利数额为 D_k, 其中, k表示股票在期权有效期内的第 k个付息日. 设 S_0为股票现在的初始价格, X为期权执行价格, T 为期权到期日, σ 为股票价格的波动率, r为无风险利率. 假设股票价格 S_0 由以下两部分构成: 一部分是对应于期权有效期内支付已知红利的无风险部分 $\bar{S}_0$, 另一个则是有风险部分 S. 无风险部分 $\bar{S}_0$就是从现在开始到期权到期日 T为止支付的所有红利按贴现率 i贴现到现在的现值. 这里假设有风险部分股票价格 S 的波动率还是等于

σ. 将两部分价值相加便得到对于美式期权价值的一个近似的求解. 在对美式期权价格进行计算时, 可以按照以下三个步骤进行

第一, 确定红利的支付时间和具体数额;

第二, 据上述的红利调整模型, 估算每个除息日的期权价值. 其中最大值就是美式买权的价值;

第三, 如果期限较短的欧式买权价值大, 则美式买权应该提前执行;

同样, 或将美式期权的价值分为两部分: 一部分是拥有美式期权到某一个除息日 τ_k 的价值 C_1, 这部分基于股票的有风险价值 S, 相当于与欧式买入期权的价值一致, 可使用 Black-Scholse模型对其进行定价; 另一部分为从该除息日 τ_k 开始包括该除息日到美式期权到期日 T为止支付的所有红利按照贴现率 i贴现到现在的现值 C_2.

在给定了红利的支付时间和具体的数额情况下, 对每一个除息日分别计算它的期权价格.

1.2.1 美式期权有风险价值

由于美式期权有风险价值不包含股票的红利, 故可直接使用 Black-Scholes模型对其进行定价, 于是, 持有到除息日 τ_k 的美式期权有风险价值为

$$C_1 = C(S, \tau_k) = SN(d_1) - Xe^{-r\tau_k}N(d_2) \tag{2}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau_k}{\sigma\sqrt{\tau_k}} \tag{3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau_k} \tag{4}$$

其中, S是股票的风险价值, σ是连续复利的股票收益率的年金波动率, r是连续复利的无风险利率.

1.2.2 美式期权无风险价值

美式期权无风险价值为从除息日 τ_k 开始包括该除息日到美式期权到期日 T 为止, 各个红利支付日所支付的红利按照贴现率 i贴现到购买期权的初始时刻的现值

$$C_2 = \sum_{m=k}^{p} \frac{D_m}{(1+i)^{\tau_m}} \tag{5}$$

于是, 在 τ_k 执行的美式期权的价格为

$$C_k = C_1 + C_2 = SN(d_1) - Xe^{-r\tau_k}N(d_2) + \sum_{m=k}^{p} \frac{D_m}{(1+i)^{\tau_m}} \tag{6}$$

美式期权的价格为

$$C = \max(C_E, C_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, p) \tag{7}$$

其中, C_E 表示不支付股利条件下期权的价值(此时美式期权与欧式期权的价值一致)

$$C_E = C(S, T) = SN(d_1^E) - Xe^{-rT}N(d_2^E) \tag{8}$$

$$d_1^E = \frac{\ln(S/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2^E = d_1^E - \sigma\sqrt{T}$$

1.3 可转债价值

基于前面分析, 可转债的价格为

$$\overline{CB} = B + NC = \sum_{t=0}^{n} \frac{I}{(1+i)^{t+y}} + \frac{A}{(1+i)^{n+y}} + N\max[SN(d_1^E) - Xe^{-rT}N(d_2^E), SN(d_1) - Xe^{-r\tau_k}N(d_2) + \sum_{m=k}^{p} \frac{D_m}{(1+i)^{\tau_m}}] \quad (k = 1, 2, \cdots, p) \tag{9}$$

其中, B 表示普通债券部分的价值, 由式(1)确定, C为可转债的期权价值, 由式(7)确定, N为每份可转债可以转换的股份数.

特别地, 当 $D_k = 0 (k = 1, 2, \cdots, p)$, 即不考虑股票红利支付时, $C_2 = \sum_{m=k}^{p} \frac{D_m}{(1+i)^{\tau_m}} = 0$, 则美式期权的最佳执行时间为到期日, 即 $C_k = C_1 = C_E$, 故有 $C = \max(C_E, C_k) = C_E$, 可转债的价格为 $\overline{CB} = B + NC_E$

因此, 在不考虑股票红利的情况下, 可转债中期权部分的价值可直接使用 B-S公式进行计算.

以上给出了非模糊环境下的可转债定价方法, 可转债定价公式中参数变量选择了确定值. 然而, 由于现实中股票的价格是处于不断变动的状态, 并且在利用市场数据对无风险利率、贴现率以及股票波动率进行估计时也往往因为数据的不充分、不准确和估计模型的缺陷而造成估计不准确或者难以估计. 另外, 这些参数变量的获取常常受到投资者的个人经验和偏好等主观因素的影响具有模糊性, 所以由其所得到的模型结果也相应地具有模糊性.

因此, 选择一个确定的模型参数来对可转债进行定价是不合理的, 投资者在未来短期内的投资决策应用中也存在困难. 针对这个问题, 下文考虑了各个参数变量的模糊性, 并给出了可转债模糊定价模型.

2　可转债模糊定价模型

Wu[5,6] 和 Yoshida[8] 最早将模糊数学理论引入到期权定价中, 并在 Black-Scholes期权定价模型的基础上, 给出了期权模糊定价模型. 与文献[5,6,8] 不同, 本文进一步将模糊数学理论应用到考虑支付红利的可转债定价问题中.

前面提到选择确定的模型参数来对可转债进行定价是不合理的, 因此, 考虑支付红利情况下可转债定价模型(9)中股票的价格 S, 贴现率 i, 波动率 σ 以及无风险利率 r 等变量的模糊性, 并推导出具有红利支付情况的可转债模糊定价公式. 有关模糊数学理论的一些基本定义及相关理论详见参考文献[22-23].

将可转债定价公式(9)中股票的价格、贴现率、波动率以及无风险利率都看成模糊数 $\tilde{S}$、$\tilde{i}$、$\tilde{\sigma}$ 及 $\tilde{r}$, 可得支付红利的可转债模糊定价公式

$$\begin{aligned}\widetilde{CB} &= \tilde{B} \oplus N \otimes \tilde{C} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\tilde{1}_{\{I\}}}{(\tilde{1}_{\{1\}} + \tilde{i})^{\tilde{1}_{\{t+y\}}}} \oplus \\ &\quad \frac{\tilde{1}_{\{A\}}}{(\tilde{1}_{\{1\}} + \tilde{i})^{\tilde{1}_{\{n+y\}}}} \oplus \tilde{1}_{\{N\}} \otimes \max(\tilde{S} \otimes \\ &\quad \tilde{N}(\tilde{d}_1^E) \ominus \tilde{1}_{\{X\}} \otimes e^{-\tilde{r}\otimes\tilde{1}_{\{T\}}} \otimes \tilde{N}(\tilde{d}_2^E), \tilde{S} \otimes \\ &\quad \tilde{N}(\tilde{d}_1) \ominus \tilde{1}_{\{X\}} \otimes e^{-\tilde{r}\otimes\tilde{1}_{\{\tau_k\}}} \otimes \tilde{N}(\tilde{d}_2) \oplus \\ &\quad \sum_{m=k}^{p} \frac{D_m}{(1+\tilde{i})^{\tilde{1}_{\{\tau_m\}}}}) \end{aligned} \tag{10}$$

其中, $k = 1, 2, \cdots, p$

$$\tilde{d}_1^E = [\ln(\tilde{S} \oslash \tilde{1}_{\{X\}}) \oplus (\tilde{r} \oplus \tilde{\sigma}^2 \oslash \tilde{1}_{\{2\}}) \otimes \tilde{1}_{\{T\}}] \oslash (\tilde{\sigma} \otimes \sqrt{\tilde{1}_{\{T\}}}),$$

$$\tilde{d}_2^E = \tilde{d}_1^E \ominus \tilde{\sigma} \otimes \sqrt{\tilde{1}_{\{T\}}},$$

$$\tilde{d}_1 = [\ln(\tilde{S} \oslash \tilde{1}_{\{X\}}) \oplus (\tilde{r} \oplus \tilde{\sigma}^2 \oslash \tilde{1}_{\{2\}}) \otimes \tilde{1}_{\{\tau_k\}}] \oslash (\tilde{\sigma} \otimes \sqrt{\tilde{1}_{\{\tau_k\}}}),$$

$$\tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 \ominus \tilde{\sigma} \otimes \sqrt{\tilde{1}_{\{\tau_k\}}}$$

其中 $\oplus$、$\ominus$、$\otimes$、$\oslash$ 表示模糊四则运算[22,23], $\tilde{1}_{\{m\}}$ 为确定数 m 的模糊表示.

运用模糊运算理论[22-23], 可知可转债价格 $\widetilde{CB}$ 是一个模糊数.

三角模糊数是最常见的典型模糊变量之一, 由于具有形式简单、容易构造和计算等特点而得到最为广泛的应用. 下面假设股票的价格 $\tilde{S}$、贴现率 $\tilde{i}$、波动率 $\tilde{\sigma}$ 以及无风险利率 $\tilde{r}$ 都是三角模糊数, 且有: $\tilde{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $\tilde{i} = (i_1, i_2, i_3)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3)$. 其中, S_k, i_k, σ_k, $r_k (k = 1, 2, 3) \in R$ 且已知.

由三角模糊数的定义[22-23], 可得 $\tilde{S}$、$\tilde{i}$、$\tilde{\sigma}$ 及 $\tilde{r}$ 的 α-截集分别为

$$\tilde{S}_\alpha = [(1-\alpha)S_1 + \alpha S_2, (1-\alpha)S_3 + \alpha S_2],$$

$$\tilde{i}_\alpha = [(1-\alpha)i_1 + \alpha i_2, (1-\alpha)i_3 + \alpha i_2],$$

$$\tilde{\sigma}_\alpha = [(1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2, (1-\alpha)\sigma_3 + \alpha\sigma_2],$$

$$\tilde{r}_\alpha = [(1-\alpha)r_1 + \alpha r_2, (1-\alpha)r_3 + \alpha r_2].$$

容易得到可转债价格 $\widetilde{CB}$ 的 α-截集的上下界为

$$(\widetilde{CB})_\alpha^- = (\tilde{B})_\alpha^- + N(\tilde{C})_\alpha^- \tag{11}$$

$$(\widetilde{CB})_\alpha^+ = (\tilde{B})_\alpha^+ + N(\tilde{C})_\alpha^+ \tag{12}$$

上面公式中的 $(\tilde{B})_\alpha^-$ 和 $(\tilde{B})_\alpha^+$, $(\tilde{C})_\alpha^-$ 和 $(\tilde{C})_\alpha^+$ 分别是 $\tilde{B}$、$\tilde{C}$ 的 α-截集的左右端点, 且有

$$(\tilde{B})_\alpha^- = \sum_{t=0}^{n} \frac{I}{(1+(1-\alpha)i_3 + \alpha i_2)^{t+y}} + \frac{A}{(1+(1-\alpha)i_3 + \alpha i_2)^{n+y}} \tag{13}$$

$$(\tilde{B})_\alpha^+ = \sum_{t=0}^{n} \frac{I}{(1+(1-\alpha)i_1 + \alpha i_2)^{t+y}} + \frac{A}{(1+(1-\alpha)i_1 + \alpha i_2)^{n+y}} \tag{14}$$

$$(\tilde{C})_\alpha^- = \max((\tilde{C}_E)_\alpha^-, (\tilde{C}_k)_\alpha^-) \tag{15}$$

$$(\tilde{C})_\alpha^+ = \max((\tilde{C}_E)_\alpha^+, (\tilde{C}_k)_\alpha^+) \tag{16}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, p), \ \forall \alpha \in [0, 1]$$

其中, $(\tilde{C}_E)_\alpha^-$ 和 $(\tilde{C}_E)_\alpha^+$, $(\tilde{C}_k)_\alpha^-$ 和 $(\tilde{C}_k)_\alpha^+$ 分别是 $\tilde{C}_E$、$\tilde{C}_k$ 的 α-截集的左右端点,

$$(\tilde{C}_E)_\alpha^- = ((1-\alpha)S_1 + \alpha S_2)N((\tilde{d}_1)_\alpha^-) - X e^{-((1-\alpha)r_1+\alpha r_2)T} N((\tilde{d}_2)_\alpha^+) \tag{17}$$

$$(\tilde{C}_E)_\alpha^+ = ((1-\alpha)S_3 + \alpha S_2)N((\tilde{d}_1)_\alpha^+) - X\,e^{-((1-\alpha)r_3+\alpha r_2)T}N((\tilde{d}_2)_\alpha^-) \tag{18}$$

$$(\tilde{C}_k)_\alpha^- = ((1-\alpha)S_1+\alpha S_2)N((\tilde{d}_{k1})_\alpha^-) - X\,e^{-((1-\alpha)r_1+\alpha r_2)\tau_k}N((\tilde{d}_{k2})_\alpha^+) + \sum_{m=k}^{p}\frac{D_m}{(1+(1-\alpha)r_3+\alpha r_2)^{\tau_m}}) \tag{19}$$

$$(\tilde{C}_k)_\alpha^+ = ((1-\alpha)S_3+\alpha S_2)N((\tilde{d}_{k1})_\alpha^+) - X\,e^{-((1-\alpha)r_3+\alpha r_2)\tau_k}N((\tilde{d}_{k2})_\alpha^-) + \sum_{m=k}^{p}\frac{D_m}{(1+(1-\alpha)r_1+\alpha r_2)^{\tau_m}}) \tag{20}$$

其中，

$$(\tilde{d}_1)_\alpha^- = \frac{\ln(((1-\alpha)S_1+\alpha S_2)/X) + ((1-\alpha)r_1+\alpha r_2 + ((1-\alpha)\sigma_1+\alpha\sigma_2)^2/2)T}{((1-\alpha)\sigma_3+\alpha\sigma_2)\sqrt{T}}$$

$$(\tilde{d}_1)_\alpha^+ = \frac{\ln(((1-\alpha)S_3+\alpha S_2)/X) + ((1-\alpha)r_3+\alpha r_2 + ((1-\alpha)\sigma_3+\alpha\sigma_2)^2/2)T}{((1-\alpha)\sigma_1+\alpha\sigma_2)\sqrt{T}}$$

$$(\tilde{d}_2)_\alpha^- = (\tilde{d}_1)_\alpha^- - ((1-\alpha)\sigma_3+\alpha\sigma_2)\sqrt{T}$$

$$(\tilde{d}_2)_\alpha^+ = (\tilde{d}_1)_\alpha^+ - ((1-\alpha)\sigma_1+\alpha\sigma_2)\sqrt{T}$$

$$(\tilde{d}_{k1})_\alpha^- = \frac{\ln(((1-\alpha)S_1+\alpha S_2)/X) + ((1-\alpha)r_1+\alpha r_2 + ((1-\alpha)\sigma_1+\alpha\sigma_2)^2/2)\tau_k}{((1-\alpha)\sigma_3+\alpha\sigma_2)\sqrt{\tau_k}}$$

$$(\tilde{d}_{k1})_\alpha^+ = \frac{\ln(((1-\alpha)S_3+\alpha S_2)/X) + ((1-\alpha)r_3+\alpha r_2 + ((1-\alpha)\sigma_3+\alpha\sigma_2)^2/2)\tau_k}{((1-\alpha)\sigma_3+\alpha\sigma_2)\sqrt{\tau_k}}$$

$$(\tilde{d}_{k2})_\alpha^- = (\tilde{d}_{k1})_\alpha^- - ((1-\alpha)\sigma_3+\alpha\sigma_2)\sqrt{\tau_k}$$

$$(\tilde{d}_{k2})_\alpha^+ = (\tilde{d}_{k1})_\alpha^+ - ((1-\alpha)\sigma_1+\alpha\sigma_2)\sqrt{\tau_k}$$

针对各模糊数为三角模糊数的情况下给出了支付红利的可转债模糊价格的计算公式. 在实际应用当中，通常需要解决以下两个问题

第一，给定隶属度 α后，如何计算出模糊价格的 α-截集，即隶属度 α所对应的价格区间；

第二，给定可转债价格 $\tilde{CB}$ 的一个参考价格 $\overline{cb}$，如何计算其置信度 $\alpha = \tilde{CB}(\overline{cb})$.

投资者通过解决第一个问题，便可以根据预先设定好的隶属度 α来确定自己所能接受的价格波动区间；通过解决第二个问题，便可以根据他们对隶属度 α的要求来确定在 t时刻，$\overline{cb}$是否可以被接受作为可转债的价格. 文献[5-6]对两个问题的求解算法进行了讨论，这里不再重复.

为了说明该模糊定价模型相比传统定价模型的优越性，在上述模型中令 $S_1 = S_2 = S_3$，$i_1 = i_2 = i_3$，$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$，$r_1 = r_2 = r_3$，则三角模糊数 $\tilde{S}$、$\tilde{i}$、$\tilde{\sigma}$和 $\tilde{r}$ 变为确定数，相应的模型计算结果与采用确定参数的传统定价方法得到的结果相同. 这就表明，该模糊定价模型是传统定价模型的一种推广，具有更强的适用性.

另一方面，投资者在进行投资决策时，通常受到其个人经验和偏好等因素的影响，带有很强的主观性，是很难精确量化的，若强制性地把模糊性的问题简化为“精确性”来进行处理，反而会降低处理问题的精确度，采用模糊数进行归类分析和判断更实用方便.

本文所提出的可转债模糊定价模型能够为投资者提供一个主观判断（即隶属度 α）和可转债预期价格之间的双向映射. 从而增强了投资决策的灵活性，避免了投资者因忽略模型参数的模糊不确定性所造成的风险.

3 数值例子

为了对模型的应用进行更好的说明，下面将选用数值例子对上述支付红利的可转债模糊定价模型进行实现和检验. 结合数值例子来探讨可转换债券理论价值的确定.

假设现有一种可转债，其面值为 100美元，票面

年利率 0.8%, 存续期限 5年. 转股价格为每股 10美元, 即 $X = 10$, 且股票价格、连续复利率、无风险利率、股价波动率分别为模糊数: $\tilde{S} = (9.400, 10.00, 10.60)$, $\tilde{i} = (0.030, 0.0386, 0.042)$, $\tilde{r} = (0.025, 0.030, 0.036)$, $\tilde{\sigma} = (0.280, 0.3036, 0.320)$. 且已知其股票现在起第 12, 24, 36, 48, 60个月分别有一次股票付息日, 每次付利息 0.5美元.

运用可转债模糊定价公式以及三角形模糊数的性质, 运用 matlab编程可以计算得出可转债的最佳转换时间为第 11个月, 设可转换模糊价格为 $\tilde{CB}_0$, 下表列出了部分给定的可转债价格 $\overline{cb}$ 所对应的置信度 $\tilde{CB}_0(\overline{cb})$

表 1 可转债价格 cb 所对应的置信度 $\tilde{CB}_0(\overline{cb})$

Table 1 Belief degrees for convertible bonds prices

可转债价格 $\overline{cb}$	132.6551	133.7041	135.2652	135.7042	136.2105	137.6104	138.8917
隶属度 $\tilde{CB}_0(\overline{cb})$	0.875	0.918	0.982	1.0	0.979	0.921	0.868

例如, 价格为 133.7041美元的可转换债券对应的置信度为 0.918. 因此, 如果投资者可以接受 0.918的置信度, 则可以接受 133.7041美元作为可转换债券的价格. 如果可转换债券价格为 135.7042, 它的置信度便是 1, 这时认为 $S_0 = 10.00$, $i = 0.386$, $= 0.3036$, $r = 0.030$.

下面表格列出了 $\tilde{CB}_0$ 部分置信度较高的 α-截集区间:

表 2 模糊价格 $\tilde{CB}_0$ 对应的 α-截集区间

Table 2 α-level set intervals of the fuzzy price $\tilde{CB}_0$

隶属度 α	截集区间 $(\tilde{CB}_0)_\alpha$	隶属度 α	截集区间 $(\tilde{CB}_0)_\alpha$
1.0	[135.7042, 135.7042]	0.95	[134.4847, 136.9101]
0.99	[135.4604, 135.9453]	0.94	[134.2408, 137.1515]
0.98	[135.2165, 136.1864]	0.93	[133.9968, 137.3930]
0.97	[134.9725, 136.4276]	0.92	[133.7529, 137.6345]
0.96	[134.7286, 136.6688]	0.91	[133.5089, 137.8762]

如上表, 同理若 α = 0.95, 这就意味着可转换债券位于价格区间 [134.4847, 136.9101]的置信度为 0.95. 也即是说, 如果投资者满足于 α = 0.95的置信度, 那么就可以从区间 [134.4847, 136.9101]中任意选取一个值作为期权价格以供使用参考.

以上数据显示了该可转债在 11个月后执行的价值, 因为此时可转债的价值最大. 实际上, 可转债的纯债券价值是随着可转债执行时间的加长而越来越大的, 但是由于受可转债期权价值变化的影响, 使得可转债的价值并不是按照时间而上升的. 如果把上面例子中的票面年利率改为 1.8%, 通过计算会发现, 可转债的期权部分最佳执行时间为可转债的到期日, 也就是 5年后, 这是因为票面年利率的提高使得可转债的纯债券价值增加了, 因此该部分价值对可转债价值的影响也相应地加强了.

4 结束语

当前普遍采用的可转债定价方法都没有考虑股票红利的支付, 而且也忽略了股票价格, 股票波动率以及无风险利率等因素的模糊不确定性, 从而可能导致投资决策失误. 本文考虑了股票红利支付对可转债价格的影响, 同时也考虑了连续复利率、无风险利率、股票价格、股价波动率的模糊性, 并在 B-S期权定价理论的基础上, 运用模糊集合论对可转债进行了定价, 推导出基于模糊集合论的可转债定价模型.

本文使用的方法增强了投资决策的灵活性, 可避免因忽略其模糊不可确定性所造成的风险. 数值算例表明: 该方法比传统的可转债定价方法更加合理且实际可操作性更强. 伴随着我国金融体系的一步步完善, 我国证券市场对各种金融衍生品的定价理论要求越来越高, 可以预见, 该模糊定价模型必将有着更为广泛的应用.

参 考 文 献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-659.

[2] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rate[J]. Journal of Finance, 1974, 29(2): 449-470.

[3] Ingersll J E. A contigent-claims valuation of convertible securities[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(3): 289-321.

[4] Brennan M J, Schwartz E. Convertible bonds: Valuation and optimal strategies for call and conversion[J]. The Jouranl of Finance, 32(5): 1699-1715.

[5] Wu H C. Pricing European options based on the fuzzy pattern of Black-Scholes formula[J]. Computers and Operations Research, 2004, 31(7): 1069-1081.

[6] Wu H C. European option pricing under fuzzy environment[J]. International Journal of Intelligent System, 2005, 20(1): 89-102.

[7] Wu H C. Using fuzzy sets theory and Black-Scholes formula to generate pricing boundaries of European options[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 185(1): 136-146.

[8] Yoshida Y. The valuation of European options in uncertain environment[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 145(2): 221-229.

[9] Thiagarajah K, Appadoo S S, Thavaneswaran A. Option valuation model with adaptive fuzzy numbers[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(5): 831-841.

[10] Muzzioli S, Reynaerts H. American option pricing with imprecise risk-neutral probabilities[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2007, (13): 140-147.

[11] Thavaneswaran A, Appadoo S S, Paseka A. Weighted possibilistic moments of fuzzy numbers with applications to GARCH modeling and option pricing[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, (49): 352-368.

[12] Don M. An introduction to derivatives and risk management, 6th Edition[M]. Mason, ohio: Thomson South-Western, 2004, 133-167.

[13] 郑振龙, 林 海. 中国可转换债券定价研究[J]. 厦门大学学报, 2004, (2): 93-99.
Zheng Zhenlong, Lin Hai. On the pricing of convertible bonds in China[J]. Journal of Xiamen University, 2004, (2): 93-99. (in Chinese)

[14] 马超群, 唐 耿. 引入信用风险的可转债定价模型及其实证研究[J]. 系统工程, 2004, 22(8): 69—73.
Ma Chaoqun, Tang Geng. Binomial tree pricing model of convertible bond and its empirical research[J]. Systems Engineering, 2004, 22(8): 69-73. (in Chinese)

[15] 顾 勇, 吴冲锋. 基于回售条款的可换股债券的定价研究[J]. 管理科学学报, 2001, 8(4): 9-15.
Gu Yong, Wu Chongfeng. Study on putable convertible exchangeable bond(PCEB) pricing[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 8(4): 9-15. (in Chinese)

[16] 龚 朴, 何志伟. 可转换公司债券复合期权定价方法[J]. 系统工程理论方法应用, 2006, 15(1): 32-38.
Gong Pu, He Zhiwei. Pricing convertible bonds based on compound option model[J]. Systems Engineering: Theory Methodology Application, 2006, 15(1): 32-38. (in Chinese)

[17] 韩立岩, 牟 晖, 王 颖. 基于偏最小二乘回归的可转债定价模型及其实证研究[J]. 中国管理科学, 2006, 14(4): 81-87.
Han Liyan, Mou Hui, Wang Ying. Convertible bond pricing model based on partial least square method and its empirical research[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(4): 81-87. (in Chinese)

[18] 陈晓红, 吴小瑾, 彭 佳. 一种新的基于公司价值的可转债定价方法[J]. 系统工程学报, 2007, 22(1): 34-39.
Chen Xiaohong, Wu Xiaojin, Peng Jia. New pricing method of convertible bond based on company value[J]. Journal of Systems Engineering, 2007, 22(1): 34-39. (in Chinese)

[19]杨立洪，蓝雁书，曹显兵．在随机利率情形下可转换债券信用风险定价模型探讨[J]．系统工程理论与实践，2007，(9)：17－23

Yang Lihong，Lan Yanshu，Cao Xianbing．Study on the pricing model of convertible bonds with default risk and interest rate[J]．Systems Engineering-Theory & Practice，2007，(9)：17－23．(in Chinese)

[20]戴　锋，丁　锐，秦子夫．无分红股票期权的构造定价模型[J]．管理科学学报，2005，8(5)：55－60．

Dai Feng，Ding Rui，Qin Zifu．Structure models for options pricing on non-dividend-paying stocks[J]．Journal of Management Sciences in China，2005，8(5)：55－60．(in Chinese)

[21]时均民，王桂兰，屈　庆．"无分红美式看涨期权不宜提前执行"的新的证明[J]．系统工程，2004，22(1)：108－110

Shi Junmin，Wang Guilan，Qu Qing．A new proof for"executing the no-dividend American call before maturity is not optimal"[J]．Systems Engineering，2004，22(1)：108－110．(in Chinese)

[22]曹炳元．应用模糊数学与系统[M]．北京：科学出版社，2005．68－81．

Cao Bingyuan．Application of Fuzzy Mathematics and Systems[M]．Beijing：Science Press，2005．68－81．(in Chinese)

[23]杨纶标，高英仪．模糊数学理论及应用[M]．第 4版，广州：华南理工大学出版社，2006，69－81．

Yang Lunbiao，Gao Yingyi．Theory and Application of Fuzzy Mathematics[M]．4th editin Guangzhou：South China University of Technology Press，2006．69－81．(in Chinese)

Fuzzy pricing model of convertible bonds with dividends payment and its algorithm

ZHANG Wei-guo，SHI Qing-sheng，XIAO Wei-lin

School of Business Administration，South China University of Technology，Guangzhou 510640，China

Abstract　As the financial market is often affected by some fuzzy factors，the pricing of convertible bonds shows features of fuzzy uncertainty．This paper researches the fuzzy pricing problem of convertible bonds with the payment of dividends and American option characteristics of underlying asset．The fuzzy pricing model of the convertible bonds was proposed based on the Black-Scholes model，which can be regarded as a natural extension of the traditional pricing models with the determined parameter values．Then，the specific pricing formulas with triangular fuzzy variables are given to estimate conveniently convertible bonds values．Finally，an example is shown to analyze and test the usefulness of the proposed fuzzy pricing method．

Key words　convertible bonds；payment dividends；American options；Black-Scholes model；fuzzy number