

# 金融危机下带传染效应的违约预报<sup>①</sup>

谢尚宇<sup>1</sup>, 汪寿阳<sup>1</sup>, 周勇<sup>1, 2</sup>

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190; 2. 上海财经大学统计学系, 上海 200433)

**摘要:** 考虑多阶段状态变量的动态信息对违约风险的影响, 同时考虑宏观因素和公司个体因素来构建违约预报模型, 并且通过在状态变量中包含的行业因素来刻画行业间可能存在的信用传染效应; 建立违约风险强度中参数的极大似然估计和渐近性质, 进而建立条件违约概率期限结构的极大似然估计. 利用极大似然估计及其渐近性质考虑传染效应的显著性检验问题, 最后通过模拟研究比较文中所给出的两种估计方法和检验方法的表现.

**关键词:** 金融危机; 违约风险; 信用传染; 违约预报

**中图分类号:** F830.9; F830.99 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2011)01-0001-12

## 0 引言

从2008年美国的次贷危机中, 可以看到信用违约传染的严重后果. 这次金融危机是源于美国的房屋次级抵押贷款者违约引起贷款机构的破产, 以贷款为基础的衍生品价格下跌导致大量投资基金纷纷倒闭, 引发股市的剧烈震荡, 造成一连串的骨牌效应, 波及了全球的金融行业. 信用传染可以解释为某个公司违约导致对其它公司违约的影响. 在金融危机时期, 信用传染导致了风险的蔓延, 甚至一些看似不相关的行业也会受到波及和传染. 本文则是在次贷危机背景下, 从理论上研究了带信用传染的违约预报模型. 考虑到违约时间数据之间的相依性, 本文给出了两种方法估计违约风险强度模型中的参数, 进而给出条件违约概率期限结构的估计, 并且给出了所关心的信用传染效应是否存在的显著性检验.

公司的违约是随机相依的, 相依性主要有两个来源, 一是来自于宏观经济结构变动的周期违约相依性, 另一个是由于行业间的业务关系产生

的信用传染效应: 它通过微观渠道, 因债务人信用质量恶化导致其它债务人的信用质量恶化, 在经济危机时期会产生一系列蔓延事件和传染事件. 已有证据表明传染效应是确实存在的, 文献<sup>[1]</sup>指出, 基本的宏观经济变量的波动会因公司间的关联关系被放大. 典型的公司间的关联关系, 如借贷合同或其它一些法律约束关系: 母子公司结构, 同业拆借协议等; 它们为经济困境从一个公司直接到另一个公司提供了传染渠道. 有关银行间的传染效应研究可见<sup>[2]</sup>. 对于非金融行业也存在类似的传染机制, 例如商品的供应方和购买方的债务关联.

Duffie 等<sup>[3]</sup>提出了带有随机协变量过程的违约预报模型. 在该模型中, 假设  $X_t$  是包含宏观因素和公司特有因素的一个向量马氏过程, 例如  $X_t$  中的宏观因素可以是利率, S&P500 股票收益等反映宏观经济的指标变量, 公司个体因素可以是公司的违约距离 (DD), 公司的股票收益率等反映公司经营状况的指标变量. 则公司的违约强度  $\lambda_t$  可以表示为基础的状态变量过程  $X_t$  的函数, 记为

① 收稿日期: 2009-05-04; 修订日期: 2010-09-30.

基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(70825004); 国家自然科学基金重点资助项目(10731010); 国家自然科学基金委创新研究群体科学基金(10721101); 国家973项目子项目(2007CB814902); 上海财经大学“211工程”三期重点学科建设资助项目; 上海市重点学科建设资助项目(B803).

作者简介: 谢尚宇(1983—), 女, 黑龙江人, 硕博连读生. Email: xshyu@amss.ac.cn

$\lambda_i = \Lambda(X_i)$ ; 而由于其它非违约原因(如被收购或合并等)导致公司退出的强度为  $\alpha_i = A(X_i)$ . Duffie 等<sup>[3]</sup> 分别考虑了一个比例风险的违约强度模型和退出强度模型,即  $\lambda(x_i; \mu_0, \mu) = e^{\mu_0 + \mu^T x_i}$  和  $\alpha(x_i; v_0, \nu) = e^{v_0 + \nu^T x_i}$ , 其中  $X_i$  是包含宏观因素和公司特有因素的一个向量过程,  $(\mu_0, \mu^T)$  和  $(v_0, \nu^T)$  为未知的参数向量. 在对违约强度和退出强度的双随机假设下,公司在未来  $s$  年内违约的条件概率为

$$q(X_i, s) = E\left(\int_0^{t+s} e^{-\int_t^z (\lambda(u) + \alpha(u)) du} \lambda(z) dz \mid X_i\right) \quad (1)$$

所谓的双随机假设,就是在给定协变量过程  $X_i$  的条件下,违约时刻和退出时刻是相互独立的 Poisson 过程的首达时刻. 也就是说,公司的违约和退出是条件独立的,公司的风险来源为宏观因素和公司特有因素. 但是该双随机性假设在考虑信用传染时具有很大的局限性,例如在某个市场(或行业)中占有地位的大公司的违约或退出可能导致该市场(或行业)中其他公司的违约或退出,即公司间并不是条件独立的. 此时,公司间的相依性除了源于宏观因素和公司特有因素外,还来自于行业间的信用传染效应. Duffie 等<sup>[3]</sup> 的模型在通常的经济形势下是合适的,但是在金融危机时期,公司间的传染性在危机蔓延的过程中产生了重要影响. 如果忽略这种传染性,则会极大地导致违约相关性的低估,因而也将导致违约风险度量的不准确.

本文的主要贡献是引入信用传染效应,扩展了 Duffie 等<sup>[3]</sup> 的违约预报模型. 公司间的传染性是源于行业间的业务关系这一微观渠道传播的,引入行业因素(记为状态变量过程  $Y_i$ ) 来描述公司间可能存在的传染效应,提出了带信用传染效应的违约预报模型. 此时,公司的违约相依性源于宏观的周期相依性,也源于微观的行业间的信用传染性,本文所考虑的违约强度模型为

$$\lambda(t) = \exp(\delta + \alpha^T X(t) + \beta^T Y(t) + \gamma^T Z(t))$$

这里的状态变量过程  $X_i, Y_i, Z_i$  分别表示宏观变量、行业变量和公司特有变量三个风险来源. 不同于 Duffie 等<sup>[3]</sup> 的模型,这里引入了行业变量  $Y$  表示公司所属行业的特有因素,例如可考虑该行业中已违约公司占该行业中公司总数的比率、全

行业债务水平等,用来描述已违约公司对仍存活公司违约强度的影响.  $\beta$  为与信用传染相关的参数,  $\beta$  的大小反映了传染程度. 参数  $\beta$  也是文中最关心的兴趣变量,文中将在后面通过统计上的假设检验来验证信用传染的存在性:即微观的行业内部的因素是否会对其他公司个体的违约产生影响. 文章将在第二部分详细介绍该模型.

基于本文的带传染效应的违约预报模型,可以更准确的度量公司间的违约相依性,因此对如下问题的研究也具有重要的参考意义: 1) 信用衍生品的定价; 2) 组合风险度量,如在险价值 VAR 和预期不足 ES 等; 3) 金融风险的监控和预报等等.

### 0.1 信用违约传染的相关文献

关于信用传染性的研究最早可追溯到 Davis 和 Lo<sup>[4]</sup> 建立的债券组合传染效应的 DL 模型. 模型中假设了一个同质但不独立的组合,且组合中任一公司违约都可能影响组合中其它公司,而公司违约可以是自身的直接违约,或是由于组合中其他公司违约被传染导致的违约. 若  $p$  表示公司直接违约的概率,  $n$  为组合中的债券总数,传染参数  $q$  表示违约的公司传染其它公司的概率,则组合的预期违约率为  $E[DR] = 1 - (1 - p)(1 - pq)^{n-1}$ . 该方法直观上很容易理解,且容易推导组合的损失分布,但是在实际应用中存在很大的局限性. 首先,该模型仅在一个与其它组合没有任何关联的组合内部是成立的;其次,由预期违约率的公式可见,当组合中债券数目  $n$  随时间发生变动时,将导致参数无法解释;以及在处理大的组合时要计算一个二项式系数的和带来计算上的困难.

Neu/Kühn<sup>[5]</sup> 提出了 NK 模型,将传染效应引入到 Credit Metrics-Like 的信用风险模型中,建立了传染效应和现代信用风险模型的联系. 在 DL 模型和 NK 模型的基础上, Daniel 和 Birker<sup>[6]</sup> 提出了基于因素模型的违约传染模型,将同一信用等级的公司分为具有传染性的公司是和被传染的公司,发现了传染效应的存在性,并且通过压力测试证明传染性会严重影响信用组合的损失分布. 该模型是已应用于 Credit Metrics 以及 Basel II 资本协议中流行的信用因素模型的扩展. 模型解决了 DL 模型数学运算上的困难,可以根据历史数据很好地估计参数,且适用于组合数目随时间变化的

情况. 这里引入的违约传染性是由于因果效应 (causal effect), 例如, 一个大的汽车公司的违约可能引起零部件供应商的财务困境, 然而反之, 汽车公司通常不会受某个供应商违约的影响, 即传染是单向的. 但是实际上存在互相传染的可能性, 因此, 该模型也存在一定的局限性.

上述关于信用风险组合的违约相关性研究主要是建立在 JP Morgan 的 Credit Metrics 或 Credit risk + 基础上, 通过在违约机制中假设某些因素相依性而得到模型的可处理性. 该类模型的一个缺点在于, 它并未考虑组合价值的动态性, 例如, Credit Metrics 是一个单期静态模型, Credit risk + 虽然考虑了连续时间的情形, 但是它只关注生存和违约信息, 而未考虑其它经济变量的动态信息. 因此, 在进行风险评估以及组合产品的定价时, 该类模型一般是很不准确的, 需要一种更精确的连续时间模型框架, 从而进行积极的风险管理以及对一篮子信用衍生品和 CDO 等产品交易的风险管理.

Jarrow 和 Turnbull<sup>[7]</sup> 首先考虑了公司违约的外生机制, 将违约看作是由一个外生的强度过程决定的随机事件, 提出了第一个约化模型. Lando<sup>[8]</sup> 扩展该方法到 Cox 模型, 该模型是基于对强度 (intensity) 或风险率 (hazard rate) 的建模.

## 0.2 信用违约传染的相关模型

目前存在一些引入相关性来扩展强度模型的方法, 一种是直接的引入违约强度的动态相关性, 但是这种方法通常会比经验相关性严重偏低, 但是对大的投资组合来说, 这个问题并不是很严重; 另一个缺点是很难推导解析形式的违约相关结构. Duffie 等<sup>[9]</sup> 假设债务人信用质量随时间的变动反映在他们违约强度的相关性中.  $\tau_i$  表示第  $i$  个公司的违约时间, 其强度过程为  $\lambda_i = X_i + Y_{C(i)} + Z$ . 其中  $Y_{C(i)}$  表示  $i$  公司所在部门  $C(i)$  的共同风险因素,  $Z$  是所有债务人共同的风险因素,  $X_i$  是  $i$  公司特有的异质因素,  $\{X, Y, Z\}$  是独立的, 且均为某个基本状态过程的仿射过程. 于是有如下指数仿射形式的解析解, 即对  $\forall s > 0$ , 有

$$\begin{aligned} p(\tau_i > t+s \mid F_t) &= E[\exp(\int_t^{t+s} -\lambda_i(u) du) \mid F_t] \\ &= \exp[A(s) + B_i(s)X_i(t) + \end{aligned}$$

$$B_{C(i)}(s)Y_{C(i)}(t) + B_Z(s)Z(t)]$$

其中系数  $A(s)$  和  $B(s)$  的计算是获得上述解析解的关键. Duffie 等<sup>[9]</sup> 通过求解一个广义黎卡提 (Riccati) 方程计算  $A(s)$  和  $B(s)$ . 然后再应用分散得分方法, 进行 CDO 的风险分析. 这个模型与本文提出的模型并不同, 因为这里对系数  $A(s)$  和  $B(s)$  并不是直接由此模型来计算而是通过假定的仿射过程来求解, 不是由模型本身进行参数估计, 因此对违约传染的风险因素的分析是不可行的, 同时这个模型假定条件太强, 要求强度过程为  $\lambda_i = X_i + Y_{C(i)} + Z$  是一个线性加性模型, 且要求  $\{X, Y, Z\}$  是相互独立的. 在本文中这些假设都可以放宽.

Jarrow 和 Yu<sup>[10]</sup> 发展了 Davis 的传染模型, 引入了交易方风险 (counterparty risk) 的概念. 由于金融突发事件, 导致强度过程并不是服从一个连续扩散过程, 文章中引入了一个跳过程来捕捉由于突发事件导致违约强度的相依变动, 而突发事件通常出现风险聚集现象. 尽管这种方法直观性很吸引人, 但是由于引入跳过程, 增加了解析的复杂性, 使得仅刻画边际分布时就已经很困难了, 同时在实际中无法很好地解释.

上述方法为了具有解析上的可处理性, 通常是在假设强度过程  $\lambda_i$  为一类仿射过程下研究的, 即假设强度过程是线性依赖于某个仿射状态过程, 然而现实中更可能的是非线性关系. 线性相关性仅仅是相依性结构的一部分, 它往往忽略了蔓延事件和传染事件, 并且只根据相关性难以建立起联合损失分布.

Alexander<sup>[11]</sup> 基于强度模型的框架下, 使用一个马尔科夫跳过程 (或称多阶段分布) 引入传染效应建模组合的动态相依性. 该方法假设公司的违约强度为  $\lambda_{i,j} = \alpha_i + \sum_{j \neq i} b_{i,j} 1_{\{\tau_j \leq t\}}, t \leq \tau_i$ . 此模型表明, 在无违约发生时, 违约强度为常数,  $j$  公司违约导致  $i$  公司违约强度大小为  $b_{i,j}$  的跳度,  $b_{i,j} > 0$  ( $< 0, = 0$ ) 表明正的 (负的, 无) 相关性, 其大小反映了  $j$  公司违约对  $i$  公司传染性的大小. 在上述强度模型假设的基础上, 利用矩阵分析的方法, 推导关于边际及联合生存分布、违约相关性, 以及预期违约时间等重要的量, 这些变量在风险组合管理中是非常重要的.

在下一节中将给出本文所提出的带信用传染的违约预报模型。所提出的模型属于久期模型，是一个连续时间的建模框架，不但关注生存和违约信息，还考虑了其它经济变量的动态信息对违约的影响，同时将信用传染效应引入到模型中。

## 1 信用传染下的违约预测模型

信用风险研究的一个重要应用就是构建违约预报模型，关于违约概率的实证研究可追溯到 Beaver<sup>[12]</sup> 的单变量分析和 Altman<sup>[13]</sup> 的 Z-Score 模型，随后的一些研究见<sup>[14-15]</sup> 等；第二代的违约预报模型是建立于定量响应模型，典型的有 logit 模型<sup>[16-17]</sup> 和 probit 模型，以及其他一些非参数方法，如聚类分析<sup>[18]</sup>、神经网络<sup>[19]</sup>；目前的研究主要是基于久期分析，这类方法主要是应用 Cox 的比例风险模型。本节所提出的模型即是属于久期模型。

### 1.1 计量模型

Duffie 等<sup>[3]</sup> 在约化模型框架下，引入了公司特有变量（异质因素）和宏观经济变量的动态信息来预测条件违约概率的期限结构，该模型中的基本状态变量过程  $X_t$  是包含宏观因素和公司个体因素的向量过程，不失一般性，可假设其服从马尔科夫过程。其中  $X_t$  中的宏观因素可以是利率，S&P500 股票收益等反映宏观经济的指标变量，公司个体因素可以是公司的违约距离（DD），公司的股票收益率等反映公司经营状况的指标变量。进一步假设公司的违约强度过程为  $\lambda_t = A(X_t)$ ，而由非违约的其它原因（如被收购或兼并）导致的退出强度为  $\alpha_t = A(X_t)$ ，则在双随机假设下，公司在未来  $s$  年内违约的条件概率可表示为

$$p(T < t + s \mid F_t) = q(X_t, s) = E\left(\int_t^{t+s} e^{-\int_t^u (\lambda(u) + \alpha(u)) du} \lambda(u) du \mid X_t\right)$$

其中  $T$  表示公司违约前的存在时间， $F_t$  表示截止到时刻  $t$  的观测信息。在双随机假设下，即在给定

状态变量  $X_t$  的条件下，公司间的违约和退出时间是条件独立的，公司间的相关性仅仅是由于它们的违约强度依赖共同的宏观变量。然而双随机假设并没有考虑微观内一个公司的违约可能导致对其它公司违约的影响，但这种违约相关性在实际中是存在的。例如一个在某个市场中占有重要地位的大公司违约，可能会导致其它相关公司的违约。在 2008 年的次贷危机中，也可以看到这种影响，美国次贷机构的违约，导致一些投资银行、基金、证券公司信用质量的变动，这也正是前面介绍的信用传染效应。由于忽略了可能存在的传染效应，该模型<sup>[3]</sup> 通常会低估公司间的违约相关性，进而导致公司间联合违约强度估计的极大偏差。

下面给出本文提出的带信用传染的违约预报模型。为了克服 Duffie 模型由于忽略了可能存在的信用传染效应导致相关性的低估，在状态变量中包含行业特有因素来刻画行业间可能存在的信用传染效应来扩展 Duffie 等<sup>[3]</sup> 的模型，即公司间的违约相关性既源于共同的宏观经济变量的影响，也源于微观的行业共同因素的影响（该风险源导致了传染性）。此时的违约强度模型如下<sup>②</sup>：

$$\lambda_{i,j}(t) = \exp(\delta_j + \alpha^T X(t) + \beta^T Y_j(t) + \gamma^T Z_{i,j}(t)) \quad (2)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, J$  表示不同的行业类型， $i = 1, 2, \dots, n_j$  表示第  $j$  个行业中观测到的公司个体数。为简单不妨令  $n_1 = \dots = n_J = n$ ； $Y_j$  表示  $j$  行业特有因素，例如可考虑该行业已违约公司占该行业公司总数的比率，全行业总负债等，用来描述已违约公司对仍存活公司违约强度的影响； $(Y_1, \dots, Y_J)$  由于受共同的宏观变量的影响，未必是独立的。 $\beta$  为与信用传染相关的参数， $\beta$  的大小反映了传染程度，当  $\beta > 0$ ，违约强度向正的方向变动，也就是为正的传染性；这里的参数  $\beta$  也是文中最关心的兴趣变量，文中将在后面通过统计上的假设检验来验证信用传染的存在性；即微观的行业内部的因素是否会对其他公司个体的违约风险产生影

② 若  $X$  和  $Y$  是线性相关的，可以用通常处理共线性的方法消除共线性；若  $X$  和  $Y$  是非线性相关的，假设  $y = g(x)$ ，其中  $g(\cdot)$  是未知函数，代入模型 (2)，然后两边取对数，此时模型变为如下的部分线性的加速失效时间模型： $\log(\lambda_{i,j}) = \delta_j + \alpha^T X(t) + \beta^T g(X(t)) + \gamma^T Z_{i,j}(t) \triangleq \delta_j + f(X) + \gamma^T Z_{i,j}(t)$  模型变得更加复杂，涉及到非参数的估计方法，且不易于解释。统计上对该类模型已有很多相关研究，但在金融中并没有采用，因为非参数除了不好解释外，还增加了计算的困难；特别是对高维的风险因素  $X_t$ ，实际中这个风险因素也通常都是高维的，因此本文不予考虑。故所提出的模型中可以考虑  $X$  和  $Y$  的非线性相关性，但无须对相关性的结构作任何假设。

响;  $X$  和  $Z_{i,j}$  分别表示影响所有公司的宏观变量以及公司的特有变量(注意此时的  $X$  不同于 Duffie 等<sup>[3]</sup> 模型中的  $X$ , 这里仅表示宏观状态变量过程). 定义参数  $\theta = (\alpha^T \beta^T \gamma^T)^T$  为所有公司共同的参数, 故可以使用公司的时间序列数据和截面数据估计参数  $\theta$ ;  $\delta_j$  表示不同行业的基础风险率是不同的; 本文主要感兴趣的是  $Y$  对风险率  $\lambda$  的影响, 即传染效应.

注意到, Duffie 等<sup>[3]</sup> 的模型中未考虑行业因素  $Y$  对违约强度的影响, 因此可能导致违约相关性的低估. 在本文所提出的模型 (2) 中, 解释变量之间可能存在一定的关系, 因此, 在实际应用中首先需要对解释变量进行相关性检验, 如果存在线性相关性, 那么可以应用通常处理共线性的方法剔除这种相关性. 如果检验并不存在共线性, 此时模型和模型的推断方法就可以直接应用了.

现考虑如何估计风险强度模型 (2) 中的参数及进行检验. 下面给出两种估计方法, 首先是忽略个体的相关性给出一个简单的估计方法, 即工作独立 (working independence) 的极大似然估计; 但由于忽略了行业之间的相关性, 得到的估计并不是最有效的, 在上述得到的工作独立的极大似然估计的基础上, 给出第 2 种加权平均的估计方法, 这种方法能够充分地利用行业间的相关性, 可以用来改善参数估计的效率. 在这里, 本文提出的方法并不需要像通常方法 (例如 Copula 方法) 那样假设行业的相关性, 从而避免了模型误判的问题. 而相关性的体现是通过估计间的相关性来自动给出, 即由协方差矩阵体现出行业和个体间的相关性.

### 1.2 Working Independence 的极大似然估计

由于共同的宏观变量  $X_i$  的影响, 所有观测样本是相关的. 首先考虑忽略行业间相关性的情形, 即不同行业公司的违约时间是独立的. 考虑边际模型, 给出工作独立 (简记为 Ind) 的估计方法. 基于 Cai 等<sup>[20]</sup> 中处理多元失效时间数据的方法, 首先对给定的行业  $j$ , 考虑如下的边际风险强度模型

$$\lambda_i^j(t) = \exp(\delta_j + \alpha_j^T X(t) + \beta_j^T Y_j(t) + \gamma_j^T Z_i^j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

其中记  $W_i^j = (X^T(t), Y_j^T(t), Z_i^T(t))$  为定义在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上马氏过程, 这里的马氏过程

假设仅仅是为了简化, 当然也可以考虑更一般的状态相依性. 标记  $j$  表示仅利用了第  $j$  个行业的边际数据. 假设  $N(t)$  为记录公司是否违约的计数过程, 其违约强度过程为基本状态过程  $W_i$  的函数, 记为  $\lambda_i = \lambda(W_i; \mu)$ ;  $M(t)$  表示公司由于其它非违约原因导致退出的计数过程, 其退出强度过程记为  $\alpha_i = \alpha(W_i; v)$ , 即这里假设违约强度和退出强度依赖不同的参数. 定义停时  $\tau = \inf\{t : N(t) + M(t) > 0\}$  表示公司的停止 (可能是由于违约或其它非违约导致的退出) 时间;  $T = \inf\{t : N(t) > 0, M(t) = 0\}$  表示公司的违约时间;  $S = \inf\{t : M(t) > 0, N(t) = 0\}$  表示公司由于其它非违约原因的退出时间.

状态变量信息是在一些离散时刻  $t_1, t_2, \dots, t_{N(t)}$  观测的, 对给定的行业  $j$ , 在  $t$  时刻可获得的观测信息记为  $F_t^j = \{X(s), Y_j(s) : s \leq t\} \cup F_{1,t}^j \cup F_{2,t}^j \cup \dots \cup F_{n,t}^j$ , 其中  $F_{i,t}^j = \{1_{S_i^j < u} 1_{T_i^j < u} Z_i^j(u) : t_i^0 \leq u \leq H_i^j\}$ ,  $S_i^j(t) = S_i^j \wedge t$ ,  $T_i^j(t) = T_i^j \wedge t$ ,  $H_i^j(t) = \min(\tau_i^j, t)$ ,  $H_i^j$  表示停止观测公司信息时刻;  $W^j = \{(X(s), Y_j(s)) : s \leq t\} \cup \{Z_i^j(s) : t_i^0 \leq s \leq H_i^j\}_{i=1}^n$ ,  $S^j(t) = (S_1^j(t), \dots, S_n^j(t))$ .

在双随机假设下 (这里的双随机假设是指, 在给定状态过程  $W^j$  下, 公司的违约时间和退出时间是条件独立的), 观测信息的似然函数可以分解为边际分布和条件分布的乘积, 即

$$f(F_t^j; \psi, \phi) = f(W^j; t; \psi) \times f(S^j(t), T^j(t) | W^j; \phi) \quad (4)$$

其中  $f(W^j; t; \psi)$  表示状态变量信息的似然函数,

$$f(S^j(t), T^j(t) | W^j; \phi) = \prod_{i=1}^n G_{i,t}^j(\phi) \mathcal{G}_{i,t}^j(\phi) = \exp\left(-\int_{t_i^0}^{H_i^j} (\lambda_i^j(u) + \alpha_i^j(u)) du\right) (I_{\{H_i^j=t\}} + \lambda_i^j(W(T_i^j); \mu_j) I_{\{T_i^j(t) < t\}} + \alpha_i^j(W(S_i^j); v_j) I_{\{S_i^j(t) < t\}}) \cdot \exp\left(-\int_{t_i^0}^{H_i^j} \lambda_i^j(u) du\right) (I_{\{H_i^j \neq T_i^j\}} + \lambda_i^j(W(T_i^j); \mu_j) I_{\{H_i^j = T_i^j\}}) \cdot \exp\left(-\int_{t_i^0}^{H_i^j} \alpha_i^j(u) du\right) (I_{\{H_i^j \neq S_i^j\}} + \alpha_i^j(W(S_i^j); v_j) I_{\{H_i^j = S_i^j\}})$$

由于违约强度  $\lambda(W_i; \mu)$  和退出强度  $\alpha(W_i; v)$  依赖不同的参数假设, 故似然函数可改写为

$$f(S^j(t), T^j(t) | W^j; \phi) = \prod_{i=1}^n G_{i,t}^j(\phi) \equiv$$

$$f^j(S^j(t), T^j(t) | W^j, \mu_j) \times f^j(S^j(t), T^j(t) | W^j, \nu_j) \quad (5)$$

其中表示只与违约强度参数  $\mu_j = (\delta_j, \alpha_j^T, \beta_j^T, \gamma_j^T)^T$  相关的似然函数为

$$f^j(S^j(t), T^j(t) | W^j, \mu_j) = \prod_{i=1}^n \exp(-\int_0^{H_i^j} \lambda_i^j(u) du) (I_{\{H_i^j \neq \tau_j^j\}} + \lambda_i^j(W(T^j); \mu_j) I_{\{H_i^j = \tau_j^j\}}) \quad (6)$$

而对退出强度有相似表示

$$f^j(S^j(t), T^j(t) | W^j, \nu_j) = \prod_{i=1}^n \exp(-\int_0^{H_i^j} \alpha_i^j(u) du) (I_{\{H_i^j \neq s_j^j\}} + \alpha_i^j(W(S^j); \nu_j) I_{\{H_i^j = s_j^j\}}) \quad (7)$$

此密度函数是只与退出强度参数  $\nu_j$  相关的似然函数。

因此极大化似然函数(4) 等价于分别极大化  $f(W^j, t; \psi)$  和式(5)。同时,极大化式(5) 等价于分别极大化(6) 和(7) 式。因此对给定的行业  $j$ , 可以获得状态变量参数  $\psi$ , 退出强度参数  $\nu_j$  以及违约强度参数  $\mu_j$  的极大似然估计如下:

$\hat{\psi} = \arg \sup_{\psi} f(W^j, t; \psi), \hat{\nu}_j = \arg \sup_{\nu_j} f^j(S^j(t), T^j(t) | W^j, \nu_j)$ , 且  $\hat{\mu}_j = \arg \sup_{\mu_j} f^j(S^j(t), T^j(t) | W^j, \mu_j)$ , 这里参数  $\mu_j = (\delta_j, \alpha_j^T, \beta_j^T, \gamma_j^T)^T$  为  $p + 1$  维, 从而得到工作独立 (Ind) 下的参数极大似然估计, 对每个给定的  $j = 1, 2, \dots, J$ 。下面的定理 1 给出了工作独立的极大似然估计渐近性质。

**定理 1** 假设参数  $\psi, \nu$  及  $\mu$  的空间是紧的, 它们的密度函数是二阶连续可微的, 并且三阶导数由一个可积函数所控制, 则有  $\hat{\psi}, \hat{\nu}_j$  和  $\hat{\mu}_j$  是渐近正态分布的。特别地,

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_j - \mu_j) \xrightarrow{D} N(0, I^j(\mu_j)^{-1}) \quad (8)$$

其中渐近方差  $I^j(\mu_j)^{-1} = (\sigma_{kl})_{k, l=1, \dots, p+1}$  其逆矩阵(也称信息阵)为  $I^j(\mu_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n S_i''(\mu_j)$ ,  $S_i(\mu_j)$  是式(6) 取对数得到对数似然函数  $S(\mu_j) = \sum_{i=1}^n S_i(\mu_j) = \log(f^j(S^j(t), T^j(t) | W^j, \mu_j))$ ,  $S_i(\mu_j) = - \int_0^{H_i^j} \exp(W_j(t), \mu_j) dt + \ln\{I_{\{H_i^j \neq \tau_j^j\}} +$

$\exp(W_j(t), \mu_j) I_{\{H_i^j = \tau_j^j\}}\}$ , 记  $W_{ij}(t) = (X^T(t), Y_j^T(t), Z_i^T(t))$ , 同时可以得到信息阵  $I^j(\mu_j)$  的估计  $I_n^j(\hat{\mu}_j) = \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n S_i''(\hat{\mu}_j)$ 。

定理 1 给出了极大似然估计的渐近正态性, 据此可以进行假设检验和构造置信区间。事实上, 定理中所要求的技术条件和普通的极大似然一样是可以放松的。由定理的结果, 可以很方便地估计出违约强度函数(即可计算违约风险), 也可获得退出强度的估计和状态变量时序相依结构的估计, 并利用这些估计进行违约预报。由密度函数的可测性和极大似然的不变性, 所获得的违约强度, 退出强度以及状态变量结构参数估计仍为极大似然估计, 因此, 它们的渐近分布仍为正态分布, 从而可以构造出这些函数的置信区间。同时根据此极限分布, 也可以很容易的给出方差的相合估计, 对所感兴趣的参数进行假设检验。

事实上, 利用边际模型得到的边际参数估计, 再通过简单加权平均可以给出共同参数的估计。这等价于把所有数据应用到联合似然获得的估计, 因为假定了边际模型间的独立性。

### 1.3 加权平均估计

上面给出了参数的工作独立的极大似然估计, 该估计是相合的和渐近正态的。但是由于忽略了不同行业间违约时间的相关性, 所得到的估计并不是最有效的。下面将充分利用不同行业之间的相关性, 来改善参数估计的效率。

由于不同行业 and 不同个体都依赖于共同的宏观风险因素, 而且同一行业的个体之间又依赖共同的行业风险因素, 因此, 所有的观测个体之间的违约风险是相关的。对于不同的行业  $j$ , 得到的估计  $\hat{\mu}_j$  通常是相关的, 而这种相关性也反映在  $\hat{\mu}_j, j = 1, 2, \dots, J$  联合分布的协方差矩阵中, 即协方差矩阵中的非对角元未必是零。参数  $\theta = (\alpha^T, \beta^T, \gamma^T)^T$  ( $p$  维参数) 是所有公司共同的参数。应用 Cai 等<sup>[20]</sup> 中类似的方法, 记参数  $\theta_j = (\alpha_j^T, \beta_j^T, \gamma_j^T)^T$ 。通过考虑  $\hat{\theta}_j, j = 1, 2, \dots, J$  的一个线性组合  $C_1 \hat{\theta}_1 + \dots + C_J \hat{\theta}_J$  来利用这种相关性的信息, 给出参数  $\theta$  的估计为  $\hat{\theta}_w = C_1 \hat{\theta}_1 + \dots + C_J \hat{\theta}_J$ 。为了确保可识别性, 令  $C_1 + \dots + C_J = \text{diag}(1, \dots, 1)$ , 由定理 1 的

式(8) 易得  $\hat{\theta}_j, j = 1, 2, \dots, J$  ( $\hat{\theta}_j$  为  $\hat{\mu}_j$  的  $p$  维分量) 的极限分布仍为正态分布, 即  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_j - \theta_j) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma_j)$  其中  $\Sigma_j = (\sigma_{kl})_{k,l=2, \dots, p+1}$

记  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1^T, \dots, \hat{\theta}_J^T)^T, \theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_J^T)^T$  于是由定理 1  $\hat{\theta}_j, j = 1, 2, \dots, J$  的联合分布为  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \Xi)$  其中  $\Xi$  为  $\hat{\theta}_j, j=1, 2, \dots, J$  的渐近协方差阵  $\Xi = (\Sigma_{kl})_{k,l=1, \dots, J}, \Sigma_{kl} = \lim_{n \rightarrow \infty} [U_n^k(\hat{\theta}_k)]^{-1} E(\dot{S}(\theta_k) \dot{S}^T(\theta_l)) [U_n^l(\hat{\theta}_l)]^{-1}$ .

于是, 有  $\theta$  的加权平均估计为  $\hat{\theta}_w = C_1 \hat{\theta}_1 + \dots + C_J \hat{\theta}_J$ , 由于  $\hat{\theta}_j, j = 1, 2, \dots, J$  通常是相关的, 这种相关性体现在  $\hat{\theta}$  的协方差阵  $\Xi$  中, 即  $\Xi$  中非对角元未必是 0, 因此可以通过极小化  $\hat{\theta}_w$  的协方差阵  $C \Xi C^T$  获得最优权重  $C_j, j = 1, 2, \dots, J$ . 此时, 可以将  $\hat{\theta}_w$  作为模型(2) 中参数  $\theta = (\alpha^T, \beta^T, \gamma^T)^T$  的估计, 改进参数  $\theta$  的估计效率. 将在第 3 部分数值模拟考查上述两种估计方法的表现.

特别地, 例如感兴趣的是  $\beta$  的第  $k$  个分量, 记  $I_k$  表示为  $p$  维的列向量, 其中第  $k$  个分量为 1, 其它分量为 0, 记  $C = \text{diag}(I_1^T, \dots, I_k^T) = I_J \otimes I_k^T$ . 则有  $\sqrt{n}(\hat{\beta}^k - \beta^k) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma^*)$  其中  $\beta^k = (\beta_{k1}, \dots, \beta_{kp})^T = C \theta, \beta_{kj}$  是  $\beta_j$  的第  $k$  个分量, 且  $\Sigma^* = C \Xi C^T$ . 此时, 考虑  $\hat{\beta}_{kj}$  的线性组合  $c^T \hat{\beta}^k = c_1 \hat{\beta}_{k1} + \dots + c_p \hat{\beta}_{kp}$  作为感兴趣的  $\beta$  的第  $k$  个分量的估计, 则有  $\sqrt{nc}^T(\hat{\beta}^k - \beta^k) \xrightarrow{D} N(0, c^T \Sigma^* c)$ ; 最小化方差  $c^T \Sigma^* c$ , 其中  $\sum_{j=1}^J c_j = 1$ , 可以得到最优权  $c_j = (e^T \Sigma^{*-1} e)^{-1} \Sigma^{*-1} e, e$  为第  $j$  个元为 1 的单位向量. 即使对不同的行业  $j$ , 违约时间也通常不是独立, 而是相关的; 因此, 协方差阵  $\Sigma^*$  未必是对角的, 即最优权重未必是等权重的情形(工作独立相当于这里等权重的加权估计). 也就是说, 使用最优权的加权估计比忽略行业间相关性的独立情形下得到的估计更有效. Cai 等<sup>[20]</sup> 通过模拟的方法证明了这一结论.

### 1.4 信用传染效应的检验

前面已经使用极大似然的方法给出模型(2) 中参数的估计, 并在定理 1 中给出了参数的极限分布, 其中参数  $\beta$  表示的是影响整个行业的变量

$Y(t)$  对违约风险的传染效应, 即前面介绍过的反映传染性程度相关的参数, 也是本文最关心的一个参数. 下面考虑传染系数的显著性检验, 即本文所关心的是微观的行业变量是否会对其它公司的违约造成影响, 也就是检验不同行业传染效应是否存在. 首先考虑如下的假设检验问题

$$H_0: H(\beta) = r \tag{9}$$

由式(9), 且假设  $H(\beta)$  是可微分的, 有  $\sqrt{n}(H(\hat{\beta}) - H(\beta)) \xrightarrow{D} N(0, \dot{H}(\beta) \Sigma^* \dot{H}(\beta)^T)$  其中  $\dot{H}(\beta)$  为  $H(\beta)$  对  $\beta$  的梯度. 于是可以构造 Wald 统计量  $W = (H(\hat{\beta}) - r)^T \left[ \frac{1}{n} \dot{H}(\hat{\beta}) \Sigma^* \dot{H}(\hat{\beta})^T \right]^{-1} (H(\hat{\beta}) - r)$ , 这里估计  $\hat{\beta}$  是前面无约束下的极大似然估计. 在  $H_0$  下,  $W$  具有极限的卡方分布, 自由度为  $H(\beta)$  中极大线性无关组的个数, 记为  $d, \hat{\Sigma}^* \xrightarrow{p} \Sigma^*$ , 即有  $W \xrightarrow{D} \chi^2(d)$ . 在显著水平  $\alpha$  (通常取 1%, 5%, 10%) 下, 拒绝域为:  $\{W: W \geq \chi_{1-\alpha}^2\}$ . 若统计量  $W$  的值落入拒绝域内, 则拒绝原假设  $H_0: H(\beta) = r$ . 否则, 没有充分的理由拒绝备择假设.

特别地, 本文更关心如下的一个假设检验问题, 即传染系数的显著性检验:  $H_0: \beta = 0$ . 该假设是假设检验问题(9) 的一个特例, 只要取  $H(\beta)$  为线性  $H\beta$ , 其中  $H$  为单位阵,  $r = 0$ . 此时的 Wald 统计量为  $W_0 = \hat{\beta}^T \hat{\Sigma}^{*-1} \hat{\beta}$ , 这里的  $\hat{\Sigma}^*$  为  $\hat{\beta}$  方差的估计, 则在  $H_0$  下,  $W_0$  同样是渐近卡方分布的, 自由度为参数  $\beta$  的维数, 记为  $q$ , 即  $W_0 \xrightarrow{D} \chi^2(q)$ . 在给定的显著水平  $\alpha$  下的拒绝域为:  $\{W_0; W_0 \geq \chi_{1-\alpha}^2\}$ . 若统计量  $W_0$  的值落入拒绝域内, 则拒绝  $H_0: \beta = 0$  的假设, 即拒绝信用传染性不存在的假设. 否则, 没有充分的理由拒绝  $\beta \neq 0$  的备择假设.

进一步, 如果关心的是  $\beta$  的某个分量, 例如  $\beta$  第  $k$  个分量  $\beta_k$  是否显著, 则考虑如下的假设检验问题:  $H_0: \beta_k = 0$ . 此时可以使用 Wald 检验, 令矩阵  $H$  的第  $k$  个对角元为 1, 其它元素都为 0, 即为式(9) 中的假设检验问题, 也可以构造  $t$ -统计量检验  $H_0$  下的系数显著性.

通过上面的讨论, 可以对退出强度有类似违约强度的模型假设, 然后按照上述同样的方法, 可以得到与退出强度相关的参数的估计, 然后代入公式(2), 由极大似然的不变性即可得到条件违

约概率期限结构(1)式的极大似然估计.有了违约概率的估计后,它可以应用到信用风险的度量和管理等方面,例如它可以被银行用来分析借款者未来一段时期内的信用质量,同时对评级机构用来确定信用等级以及信用相关的衍生品定价问题中都发挥着重要的作用.

## 2 数值模拟

下面将进行一系列的模拟研究来考察文章所给出的两种估计方法的表现,以及传染性的检验.使用 Clayton 和 Cuzick<sup>[21]</sup> 的多元 Copula 模型产生多元失效时间数据  $T_{ij}, j = 1, \dots, J, i = 1, \dots, n$ , 在给定协变量过程  $(W^1, \dots, W^J)$  的条件下  $(T_1, \dots, T_J)$  的联合生存函数为

$$F(t_1, \dots, t_J; W^1, \dots, W^J) = \left\{ \prod_{j=1}^J S_j(t_j)^{-1/\theta} - (J-1) \right\}^{-\theta} \quad (10)$$

其中  $J$  表示行业总数,  $S_j(t)$  为第  $j$  组个体的边际生存概率,且依赖于  $W_j$ . 参数  $\theta$  表示  $T_i$  和  $T_j, i, j = 1, 2, \dots, J$  相关性的参数. Kendall's  $\tau$  和参数  $\theta$  之间的关系可表示为  $\tau = 1/(2\theta + 1)$ , 特别地  $\theta = 0.25$  和  $\theta = 4.0$  分别表示强的和弱的正相关性,  $\theta \rightarrow \infty$  表示独立,  $\theta \rightarrow 0$  表示最大的正相关性. 选取(10)中的参数  $\theta = 4.0, 1.0, 0.25$  和  $0.01$ , 代表不同程度的弱、中等和强相关性进行模拟研究. 对  $j = 1, \dots, J (J = 3), T_{ij}$  边际分布的强度函数为

$$\lambda_i^j(t) = \exp(\delta_j + \alpha_j^T X(t) + \beta_j^T Y_j(t) + \gamma_j^T Z_i^j(t)), i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

令  $X(t), Y(t), Z(t)$  均满足均值回转模型(CIR),  $X(t) = k(\theta_x - X(t-1))dt + \varepsilon_x; Z(t) = k(\theta_z - Z(t-1))dt + \varepsilon_z, Y(t) = k(\theta - Y(t-1))dt + \Sigma \varepsilon_t$ , 其中  $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t))^T, \theta = (\theta_{1y}, \theta_{2y}, \theta_{3y})^T$ ; 在用 CIR 模型产生过程  $X$  和  $Y$  时, 使用了同一个误差项  $\varepsilon$ . 在 CIR 模型中, 由于过程  $X$  和  $Y$  的当前值依赖于前一期的  $X$  和  $Y$ , 且使用同一误差项  $\varepsilon$ , 故它们是非线性相关的. 如果使用独立的误差项  $\varepsilon$ , 则产生的  $X$  和  $Y$  也是独立的. 模拟结果也是可行的. 在数值计算中, 设均值回转参数  $\theta_x = 4.0, (\theta_{1y}, \theta_{2y}, \theta_{3y}) = (1.2, 1.0, 0.8), \theta_z = 5.0$ , 回转速度参数  $k = 0.03, Y$  的方差-协方差矩

阵  $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,J} = (\rho^{i-j})_{i,j=1,\dots,J}, \rho = 1/\sqrt{5}$ , 观测时间间隔为单位时间 1, 退出(或删除)时间  $S_{i,j}$  为  $(0, c)$  上的均匀分布, 其中  $c$  是控制删失率的常数,  $c = 100$  和  $c = 50$  相应的删失率大约分别是 15% 和 25%.

表 1 和表 2 分别给出了不同删失参数 ( $c = 100$  和  $c = 50$ ) 下的工作独立估计(简记为 Ind)和加权平均估计(简记号为 Mar)的模拟结果. 其中  $J = 3$ , 对每个  $j = 1, 2, 3$ , 观测的个体数为  $n = 200$ , 模拟次数  $NS = 500$ , 相关程度度量参数  $\theta = 4.0, 1.0, 0.25$  和  $0.01$ , 模型参数  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2.5, -3, -0.5, -1.0, -1.5)$ . 对于边际参数  $\delta_j, j = 1, 2, 3$ , 只能使用边际数据估计得到, 使用 Ind 方法即可得到相应的估计, 模拟结果显示 Ind 估计也具有很好的性质. 为了简单, 这里略去边际参数  $\delta_j, j = 1, 2, 3$  的模拟结果, 仅列出其它三个共同参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的 Ind 和 Mar 方法下的模拟结果. 其中参数  $\beta$  是本文最关心的兴趣参数, 它是与传染性相关的一个参数.

表 1 和表 2 分别给出了不同删失参数 ( $c = 100$  和  $c = 50$ ) 下 500 次模拟结果估计的平均偏差(bias)和标准差的估计(SE), 以及平均的估计标准差(SD). 对于不同的删失率, 得到类似的结果. 当相关性较弱, 即  $\theta = 4.0$  和  $\theta = 1.0$  时, 两种估计方法都给出较好的估计结果, 即在相关性较弱的情况下, 忽略相关性(Ind)和考虑相关性(Mar)得到的估计结果没有显著的差异; 但随着相关性的增加  $\theta = 0.25 \rightarrow \theta = 0.01$ , 由模拟结果的均方误差 MSE 和覆盖率(Conv) (即  $N$  次模拟得到的参数估计落入 95% 置信区间的频率) 都可见, 加权平均(Mar)方法均方误差 MSE 小于工作独立(Ind)方法. 同时, 由覆盖率可见, 加权平均(Mar)方法较稳健, 而工作独立(Ind)方法部分已严重偏离置信区间.

下面将给出本文关心的一个重要问题: 传染性检验的模拟结果. 检验的原假设  $H_0: \beta = 0$ , 为了考察检验的功效, 分别取备则假设  $H_1: \beta = [-0.2 : 0.2 : -1.6]$  (表示起点为  $-1.6$ , 终点为  $-0.2$ , 间隔为  $0.2$  的点集).

由表 3 和图 1 可见, 对  $c = 100$  (删失率大约是 15%) 的情况下, 当相关性较弱  $\theta = 4.0$  时, 文章



给出的两种估计方法都可以较准确的估计第一类错误,当相关性增加到  $\theta = 1.0$  时,加权平均的方法逐渐优于工作独立的方法,加权平均方法仍可以较准确的估计第一类错误,而工作独立的方法会高估第一类错误.随着相关性变大  $\theta = 0.25 \rightarrow \theta = 0.01$  时,由表 3 可见加权平均的估计方法仍然可以较准确的估计第一类错误,但工作独立的方法已严重高估第一类错误,不能够正常工作.对  $c = 50$  (删失率大约是 25%) 的情况下可得到如上类似的结果.综上所述,在考虑相关违约时,尤其在有显著相关性(相关性较大)时,本文引入的加权平均的估计方法可以有效进行相应的统计推断,而在相关性较强时,工作独立的方法由于忽略了不同组个体的相关性而不能正常工作.综上得到了两种检验系数显著性的方法,且在个体失效时间具有较强的相关性时,给出的加权平均的方法可以给出更准确的检验结果.

### 3 结束语

本文提出了在给定风险因素(包括宏观因素、行业因素和公司特有因素)的条件下,估计多阶段的条件违约概率的期限结构.本文的主要贡献,一是扩展了 Duffie 等<sup>[3]</sup>在约化模型框架下的违约预报模型,在上述模型中引入了影响违约的行业因素过程,改善了原有模型由于忽略微观行业变量的影响导致违约相关性低估的问题,并且本文扩展的模型仍沿用了考虑动态的协变量过程,可以进行带传染因素的违约预报.二是给出了一种更有效的估计相关违约数据的方法,通常的估计方法是基于假设个体间是独立同分布的,而在处理带违约的失效时间数据时,个体间并不独立,也不是同分布.在本文所提出的模型里,失效时间可具有相关性且考虑的风险因素是动态变动的.本文对所提出的模型给出了两种估计方法:工作独立和加权平均的方法,通过理论证明和模拟研究比较得出,当失效时间相关性较弱时,两种估

计方法近似相同,都能给出较好的估计结果,但是随着失效时间数据相关性的增强,工作独立的方法由于忽略个体间的相关性导致估计结果很差,而加权平均的方法即使在相关很大时,仍然表现得很稳健,且模拟结果也显示明显的优于工作独立的方法.

另外,本文引入了行业变量来研究传染性,最关心的兴趣参数是传染系数  $\beta$ . 一个重要的问题就是系数的显著性检验,即在建立失效时间数据模型时,是否要引入传染性对失效时间的影响,或者说微观的行业变量是否会对其他公司的违约时间产生影响,也即所谓的传染性是否存在.一旦忽略传染性对公司违约的影响,会导致个体失效时间相关性的低估,已有大量研究表明,传染性会严重影响损失的分布,因此很难准确的进行信用风险的度量和管理.传染性检验的模拟结果也进一步支持上述的论点:对相关违约时间数据,加权平均的方法是较工作独立方法更加有效的估计方法,当相关性较大时,工作独立的方法已不能准确的估计出第一类错误的概率,而加权平均的方法则表现得比较稳健.因此,在确实存在传染性时,通过引入传染系数  $\beta$  可以更准确的刻画违约时间数据,精确的估计传染性对违约时间的影响,从而可以进行更有效的信用风险度量和管理,具有重要的研究和实践意义.在文献[22]中总结了信用违约风险模型中违约概率的统计推断,提供了一些在违约风险上有用的生存分析方法估计违约概率.在以后的工作中也将深入研究生物统计方法在信用风险管理中的应用.然而,本文所提出的模型确实存在一些局限,本文基于“传染性是由于微观的行业渠道导致的”来引入行业因素刻画可能存在的传染效应,并且这种传染性对整个行业公司的影响是相同的,即仅考虑了行业内个体间正的相关性,并不能考虑竞争性风险(负的相关性);另外,本文主要试图刻画信用传染效应并通过行业影响的显著性来检验传染性,但并未考虑个体间的相关性如何.有关这方面的研究将在以后工作中作进一步的深入研究.

#### 参考文献:

- [1] Giesecke K, Weber S. Cyclical correlations, credit contagion and portfolio losses [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2004 (28): 3009 - 3036.

- [2] Allen F, Gale D. Financial contagion [J]. *Journal of Political Economy*, 2000(108): 1–33.
- [3] Duffie D, Saita L, Wang K. Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates [J]. *Journal of Financial Economics*. 2007(83): 635–665.
- [4] Davis M, Lo V. Infectious defaults [J]. *Quantitative Finance*, 2001(1): 382–387.
- [5] Neu P, Kühn R. Credit risk enhancement in a network of interdependent firms [J]. *Physica A*, 2004, (342): 639–655.
- [6] Rösch D, Winterfeldt B. Estimating Credit Contagion in a Standard Factor Model [R]. working paper, 2007
- [7] Jarrow R, Turnbull S. Pricing derivative on financial securities subject to credit risk [J]. *Journal of Finance*, 1995, 50(1): 53–85.
- [8] Lando D. On cox processes and credit-risky securities [J]. *Review of Derivatives Research*, 1998(2): 99–120.
- [9] Duffie D, Gârleanu N, Risk and valuation of collateralised debt obligations [J]. *Financial Analysts Journal*, 2001, 57(1): 41–59.
- [10] Jarrow R A, Fan Yu. Counterparty risk and the pricing of defaultable securities [J]. *The Journal of Finance*, 2001(5): 1765–1799.
- [11] Frey R, McNeil A J. Modeling dependent defaults [R]. Working Paper, ETH Zurich, 2001.
- [12] Beaver B. Financial ratios as predictors of failure [J]. *Journal of Accounting Research Autumn*, 1966, Supplement(4): 91–101.
- [13] Altman E. Financial ratios, discriminant analysis, and the prediction of corporate bankruptcy [J]. *Journal of Finance*, 1968(23): 589–609.
- [14] Hillegeist S A, Kleiman E K, Cram D P, et al. Assessing the probability of bankruptcy [J]. *Review of Accounting Studies*, 2004(9): 5–34.
- [15] 程功, 张维, 熊熊. 信息噪音、结构化模型与银行违约概率度量 [J]. *管理科学学报* 2007 10(04): 38–48.  
Cheng Gong, Zhang Wei, Xiong Xiong [J]. Noisy information, structural model and bank evaluation of default probability [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2007, 10(4): 38–48. (in Chinese)
- [16] Ohson J. Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy [J]. *Journal of Accounting Research*, 1980(19): 109–131.
- [17] 石晓军, 任若恩, 肖远文. 边界 Logistic 违约率模型及实证研究 [J]. *管理科学学报* 2007, 10(3): 44–51.  
Shi Xiaojun, Ren Ruoen, Xiao Yuanwen. Bounded logistic default risk model and empirical evidences from China [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2007, 10(3): 44–51. (in Chinese)
- [18] Lundy M. Cluster analysis in credit scoring [C]//Credit Scoring and Credit Control. New York: Oxford University Press, 1933.
- [19] 邹昊飞, 夏国平, 杨方廷. 基于两阶段优化算法的神经网络预测模型 [J]. *管理科学学报*, 2006, 9(5): 28–35.  
Zou Hao-fei, Xia Guo-ping, Yang Fang-ting. Neural network forecasting model using multi-stage optimization approach based on GMDH and genetic algorithm [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(5): 28–35. (in Chinese)
- [20] Cai J, Fan J, Zhou H, et al. Hazard model with varying coefficients for multivariate failure time data [J]. *The Annals of Statistics*, 2007(35): 324–354.
- [21] Clayton D, Cuzick J. Multivariable generalizations of the proportional hazards model [J]. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*, 1985, 148: 82–117. MR0806480.
- [22] Zhou Y, Xie S, Yuan Y. Statistical inference of default probability in credit risk models [J]. *System Engineering: Theory & Practice*, 2008 28(8): 206–214.

## Default prediction with credit contagion under financial crisis

XIE Shang-yu<sup>1</sup>, WANG Shou-yang<sup>1</sup>, ZHOU Yong<sup>1, 2</sup>

1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Department of Statistics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China

**Abstract:** In this paper we consider the default risk models with multi-period stochastic covariates, incorporating the dynamics of macroeconomic, firm-specific and industry-specific covariates which were used to characterize the credit contagion between industries. We propose maximum likelihood estimators for parameters of de-

fault risk intensities , and then show the maximum likelihood estimator for term structure of conditional corporate default probabilities. Meanwhile , it is easy to construct the significant test for credit contagion effect in multi-period corporate default risk models by the maximum likelihood estimators. Finally , simulation studies are conducted to compare the performance of the working independence estimator to that of the weighted marginal likelihood estimator.

**Key words:** financial crisis; default risk; credit contagion; default prediction

附录

表 1 工作独立 (Ind) 和加权平均方法 (Mar) 估计结果比较 ( $c = 100 \alpha = 0.05$ )

Table 1 Simulated results based on working independence and weighted average estimator ( $c = 100 \alpha = 0.05$ )

$\theta$	$c = 100$	Ind			Mar			Ind		Mar	
		Bias	SE	SD	Bias	SE	SD	MSE	Conv	MSE	Conv
4.0	$\alpha$	-0.001	0.073	0.066	0.002	0.072	0.064	0.073	0.934	0.072	0.924
	$\beta$	0.038	0.365	0.321	0.047	0.339	0.297	0.367	0.946	0.341	0.940
	$\gamma$	-0.006	0.111	0.102	-0.000	0.060	0.060	0.111	0.938	0.059	0.948
1.0	$\alpha$	0.002	0.072	0.068	0.004	0.072	0.066	0.072	0.942	0.071	0.930
	$\beta$	0.041	0.357	0.331	0.046	0.331	0.322	0.358	0.926	0.332	0.946
	$\gamma$	-0.004	0.104	0.102	-0.001	0.060	0.061	0.104	0.936	0.059	0.956
0.25	$\alpha$	-0.001	0.077	0.069	0.003	0.077	0.070	0.077	0.936	0.076	0.936
	$\beta$	0.056	0.410	0.328	0.059	0.367	0.341	0.413	0.898	0.370	0.932
	$\gamma$	-0.002	0.104	0.103	-0.005	0.065	0.062	0.104	0.952	0.064	0.930
0.01	$\alpha$	0.009	0.080	0.068	0.013	0.079	0.073	0.080	0.914	0.079	0.934
	$\beta$	0.018	0.432	0.333	0.033	0.369	0.362	0.432	0.890	0.370	0.954
	$\gamma$	-0.006	0.107	0.102	-0.003	0.063	0.063	0.107	0.928	0.063	0.958

表 2 工作独立 (Ind) 和加权平均方法 (Mar) 估计结果比较 ( $c = 50 \alpha = 0.05$ )

Table 2 Simulated results based on working independence and weighted average estimator ( $c = 50 \alpha = 0.05$ )

$\theta$	$c = 50$	Ind			Mar			Ind		Mar	
		Bias	SE	SD	Bias	SE	SD	MSE	Conv	MSE	Conv
4.0	$\alpha$	0.000	0.076	0.079	0.003	0.076	0.076	0.076	0.964	0.076	0.954
	$\beta$	0.029	0.502	0.445	0.036	0.476	0.409	0.503	0.932	0.477	0.932
	$\gamma$	-0.012	0.110	0.111	-0.005	0.067	0.065	0.110	0.968	0.067	0.942
1.0	$\alpha$	0.004	0.088	0.081	0.007	0.089	0.079	0.088	0.954	0.089	0.932
	$\beta$	0.020	0.479	0.442	0.032	0.438	0.417	0.480	0.938	0.439	0.952
	$\gamma$	-0.006	0.108	0.109	-0.003	0.064	0.064	0.108	0.940	0.064	0.958
0.25	$\alpha$	-0.003	0.090	0.080	-0.000	0.090	0.081	0.090	0.926	0.090	0.932
	$\beta$	0.052	0.514	0.433	0.063	0.468	0.436	0.517	0.916	0.472	0.946
	$\gamma$	-0.006	0.114	0.110	-0.001	0.067	0.066	0.114	0.928	0.067	0.948
0.01	$\alpha$	-0.001	0.092	0.080	0.004	0.090	0.085	0.092	0.922	0.090	0.938
	$\beta$	0.050	0.525	0.434	0.054	0.486	0.457	0.527	0.906	0.489	0.936
	$\gamma$	-0.009	0.115	0.110	-0.005	0.070	0.068	0.115	0.936	0.070	0.936

表3 传染性检验的模拟结果

Table 3 Simulated results for contagion test

$\theta$	$c = 100$	$H_0 : \beta = 0$	$H_1 : \beta = \beta_1$							
		0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.6
4.0	Ind	0.054	0.152	0.336	0.576	0.740	0.860	0.922	0.950	0.970
	Mar	0.060	0.160	0.390	0.638	0.784	0.902	0.934	0.978	0.986
1.0	Ind	0.074	0.154	0.330	0.538	0.708	0.846	0.924	0.950	0.974
	Mar	0.054	0.142	0.344	0.556	0.722	0.876	0.938	0.968	0.988
0.25	Ind	0.102	0.162	0.338	0.564	0.730	0.846	0.926	0.954	0.978
	Mar	0.068	0.138	0.282	0.518	0.720	0.846	0.934	0.966	0.984
0.01	Ind	0.110	0.192	0.356	0.536	0.680	0.792	0.870	0.932	0.954
	Mar	0.046	0.130	0.278	0.474	0.620	0.774	0.878	0.950	0.976
$\theta$	$c = 50$									
4.0	Ind	0.068	0.118	0.232	0.394	0.546	0.682	0.774	0.840	0.890
	Mar	0.068	0.132	0.276	0.436	0.592	0.738	0.818	0.880	0.912
1.0	Ind	0.062	0.098	0.224	0.390	0.540	0.676	0.754	0.836	0.904
	Mar	0.048	0.106	0.242	0.410	0.570	0.708	0.798	0.882	0.936
0.25	Ind	0.084	0.150	0.278	0.426	0.578	0.696	0.798	0.850	0.900
	Mar	0.054	0.124	0.250	0.412	0.588	0.700	0.794	0.868	0.918
0.01	Ind	0.094	0.146	0.260	0.398	0.522	0.650	0.766	0.856	0.908
	Mar	0.064	0.100	0.204	0.368	0.502	0.658	0.768	0.846	0.908

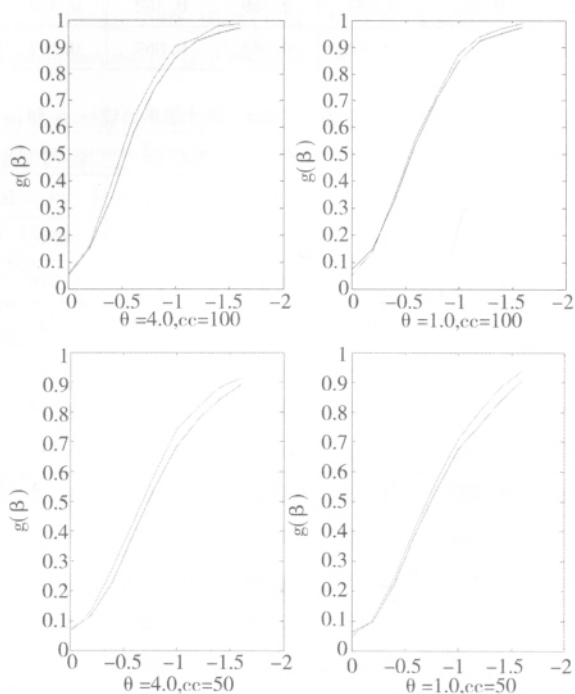


图1 传染性检验的功效函数

Fig. 1 Power curve for contagion test