凸需求情形下分权供应链运作效率及福利分析①

刘天亮[1]，陈 剑[2,3]，辛春林[4]

(1. 北京航空航天大学经济管理学院，北京 100191; 2. 教育部人文社会科学重点研究基地清华大学现代管理研究中心，北京 100084; 3. 清华大学经济管理学院，北京 100084; 4. 北京化工大学经济管理学院，北京 100029)

摘要: 假设需求函数是凸的、需求弹性是关于销售价格的非减函数，本文研究了分权供应链在运作效率和社会福利方面的损失问题. 以单一供应商用同一批发价格向多个零售商供应某产品，销售商间通过数量竞争来确定产品的销售价格为对象，本文利用非合作代价(Price of Anarchy)的概念，将分权供应链的绩效分别与集权供应链的绩效和社会福利最大化的情形进行比较，给出了分权供应链在整体利润和社会福利方面不依赖于需求函数具体形式的损失上界. 研究结论表明，当面临价格敏感型需求时，如果不考虑库存决策，分权供应链的效率损失上界明显高于销售价格固定、考虑库存决策的随机需求情形. 而且，无论在运作效率还是社会福利方面，供应链分权导致的损失上界都是随着单位产品的最大边际毛利增大而增大，随着下游竞争的加剧而减小.

关键词: 分权供应链; 需求弹性; 非合作代价; 效率损失

中图分类号: F273　**文献标识码:** A　**文章编号:** 1007-9807(2011)01-0061-08

0 引 言

在现实的供应链中，成员企业都是追求自身利益最大化的独立的经济实体，分散决策的结果必然导致明显的双重边际效应[1]. 相比理想状态下的集权供应链而言，分权供应链的整体运作上存在一定的效率损失，已经成为了共识[2]. 针对各种不同的供应链结构，如何设计合适的契约合同是目前国内外学术界和产业界共同关注的热点问题[2,15]. 从契约类型上来看，常见的契约合同主要有批发价契约、回购契约、收益共享契约、数量柔性契约、销售回扣契约、数量折扣契约以及各种组合契约. 这些契约尽管在一定程度上可以实现供应链的完美协调，但是要求成员企业之间共享需求或成本信息，并分担市场风险，这可能造成较高的谈判成本和道德风险，势必增加契约实施的难度[3].

考虑到契约实施的问题，一些学者开始从其他的角度来探讨供应链的效率损失[4]，并试图回答以下的问题: 如果没有契约协调，分权供应链的效率损失到底有多大? 供应链的效率损失在什么情况下存在明确的上界? 供应链的效率损失在什么情况下可能太大以至于必须进行契约协调? Cachon[5]的数值结果表明，一个推式两级供应链的绩效大概只有集权供应链的 70% 到 85%，拉式配置则为 75% 到 90%. 在随机需求分布满足递增广义失效率[6](increasing generalized failure rate，IGFR) 的背景下，Perakis 和 Roels[4]第一个引入了非合作代价(price of anarchy，PoA) 的概念来界定

① 收稿日期: 2008-12-24; 修订日期: 2010-09-30.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70890082; 70901046)，中国博士后科学基金资助项目(20080440357; 200902086).
作者简介: 刘天亮(1981—)，男，山东济宁人，博士后，讲师. Email: liutianliang@buaa.edu.cn

分权供应链中的效率损失. 这一概念最早由 Koutsoupias 和 Papadimitriou 于 1999 年[7] 提出用于界定由于个体的非合作行为而导致的系统效率损失,现在已经广泛地用于交通运输[8,16]、资源分配[9] 以及网络定价博弈[10] 等众多领域. 与Cachon 的结论依赖需求分布的具体形式不同,Perakis 和 Roels 的贡献在于给出了不依赖于具体分布形式的明确上界,但是在他们的模型中,产品的销售价格是固定的,没有涉及需求弹性的情形.

现实中,市场需求往往依赖于销售价格的变化. 虽然现有研究针对弹性需求下分权供应链的运作及协调问题进行了深入的探讨,但研究成果一般还是依赖于具体的需求函数形式[2,17-18]. 基于以上原因,本文在 Perakis 和 Roels 的工作基础上,进一步研究价格敏感型需求的情形,探讨一个供应商和多个竞争型销售商组成的两级分权供应链的效率损失问题. 不失一般性,这里只研究需求立即实现的情形,主要讨论供应链上不同主体定价的影响,并不明显考虑供应链上的库存决策. 另外,当需求依赖于价格时,由于供应链成员只从自身利益出发来优化其运作策略,一般难以达到社会最优的结果. 无论集权还是分权供应链都存在一定的福利损失,本文在反需求函数满足一定假设条件下给出了其最坏情况下的明确上界.

1 模型参数及假设

本文研究的供应链系统如图 1 所示. 在这个两级供应链中,所有的成本和需求信息都是公开的,供应商以成本 c_s 生产某种产品,并以同一的批发价格 w 供应给所有的销售商,然后面对价格敏感型的市场需求,n 个销售商进行 Cournot 数量竞争来确定销售价格 p 并销售产品. 简化起见,本文并不考虑产品的订货提前期以至于市场需求可以立即满足,即 $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$,其中 Q_i 为销售商 i 的销售量(也即订货量),并且假设所有销售商的运营成本是等同的,记为 c_d.

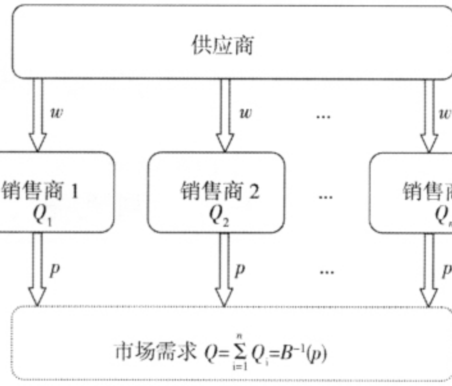


图 1 两级供应链系统

Fig. 1 Two-stage supply chain system

采用标准教科书中常用的假设[11],假定销售价格 p 为市场需求 Q 的连续二次可微的单调递减函数,记为 $p = B(Q)$,$Q \in [0, Q_{\max}]$,其中 $Q_{\max}$ 为潜在的最大市场需求. 由于销售价格和需求之间的一一对应关系,市场需求函数可以记为 $Q = B^{-1}(p)$. 令 $B_0 = B(0) > c_s + c_d$ 表示消费者消费单位产品愿意付出的最大价格,则销售价格函数即反需求函数可以改写为

$$p = B(Q) = B_0 \bar{F}(Q), \quad Q \in [0, Q_{\max}] \tag{1}$$

其中 $\bar{F}(Q) = B(Q)/B_0 \in [0,1]$. 不失一般性,这里只研究 B_0 固定、确定需求的情形②. 继续令 $F(Q) = 1 - \bar{F}(Q)$,$h(Q) = F'(Q)/\bar{F}(Q)$,$g(Q) = Qh(Q) = QF'(Q)/\bar{F}(Q)$,其中 $F'(\cdot)$ 为一阶导数的形式,$g(Q)$ 实质为销售价格 p 关于市场销售量 Q 的弹性系数.

下面给定本文反需求函数满足的两个基本条件: 1) $g'(Q) \geqslant 0$; 2) $\bar{F}''(Q) \geqslant 0$. 由于需求价格弹性 $\varepsilon(p) = 1/g(Q)$,假设 1 实际要求需求价格弹性是关于市场价格的非减函数[12]. 假设 2 则给定了凸的需求函数情形[13],容易有 $Qg'(Q) \leqslant g(Q)(1 + g(Q))$ 成立. 一些常见的反需求函数形式,比如线性、指数和负幂函数形式,都满足这两个假设.

② 事实上,由于假设需求立即实现、不涉及供应链上的库存决策,即使考虑 B_0 随机变动的情形,用 B_0 的期望值替代 B_0,本文的几个定理在风险中性的假设下仍然成立.

2 社会最优和集权供应链情形

在给出分权供应链模型之前，首先介绍两个基准模型，即社会最优模型和集权供应链模型. 如非特别说明，下文中的上标“w”、“I”、“d”分别表示福利最大化、集权和分权情形的结果.

2.1 社会最优模型

在社会最优模型中，优化的目标是使得整个社会福利最大化. 社会福利由消费者剩余和厂商剩余组成，这里的厂商剩余为供应商和销售商的利润之和. 因此，目标函数表示为

$$W(Q) = \int_0^Q p\mathrm{d}x - (c_s + c_d)Q \tag{2}$$

约束条件为(1).

容易验证目标函数(2)是市场需求 Q 的凹函数，故社会福利最大化的结果是使得销售价格等于产品的边际成本即 $p^w = c_s + c_d$，最优销售量 Q^w 可以通过求解方程 $\bar{F}(Q^w) = r$ 得到，其中 $r = (c_s + c_d)/B_0$.

2.2 集权供应链模型

在集权供应链模型中，供应商和销售商合作决策使得供应链整体的利润最大化，即目标函数表示为

$$\pi(Q) = (p - c_s - c_d)Q \tag{3}$$

约束条件为(1).

引理 1　在反需求函数满足假设 1 的条件下，集权供应链模型的目标函数是拟凹的(quasi-concave)，最优销售量 Q^I 由求解方程 $\bar{F}(Q^I)(1 - g(Q^I)) = r$ 得到，并且 $Q^I \leqslant Q^w$.

在供应链集权时，供应商和销售商合作决策必然导致一个自然垄断的厂商出现. 垄断厂商的市场决策一般难以达到社会最优的结果，社会福利不可避免存在某种程度上的损失. 令 $\rho^I = \dfrac{W(Q^w)}{W(Q^I)}$ 表示社会最优下的社会福利与集权供应链时的社会福利之间的比值，显然有 $\rho^I \geqslant 1$. 这个比值到底有多大，明确的回答需要知道具体的反需求函数形式. 类似 Perakis 和 Roels 的工作[4]，在反需求函数满足假设 1 和 2 前提下，下面给出这个比值在最坏情况下并不依赖于函数具体形式的解析上界.

定理 1　在反需求函数满足假设 1 和 2 的条件下，社会最优下的社会福利与集权供应链时的社会福利之间的比值 ρ^I 存在如下上界

$$\sup_{F \in \Theta} \rho^I = r^{-1/(1-r)} - r^{-1} \tag{4}$$

其中 Θ 是满足假设 1 和 2 的所有反需求函数的集合.

在本文所研究的供应链系统中，为了吸引消费者购买而获得目标利润，即使自然垄断的厂商也不会制定超过 B_0 的销售价格. 因此，当 B_0 接近于 $c_s + c_d$，即单位产品的最大边际毛利(gross profit margin) $1 - r$ 比较小的时候，垄断厂商难以操纵较多的价格空间，使得销售价格同社会最优下的结果差距较小，福利损失相应不会太大. 定理 1 验证了这一观察，即社会最优下的社会福利与集权供应链时的社会福利之间的比值上界随着 r 的增大而缩小；考虑 r 取值为 1 的极限情形，上界取得极小值，即 $\sup_{F \in \Theta} \rho^I = e - 1 \approx 1.72$，福利损失为 $1 - 1/(e - 1) \approx 42\%$，其中为自然对数的底数.

由定理 1 可知，尽管考虑价格敏感型的需求，集权供应链的福利损失上界与随机需求下单一供应商与单一销售商组成的分权供应链的效率损失上界实际是等同的(见文献[4]). 这似乎有些奇怪，但是如果把所有的消费者作为一个整体来考虑的话，本文以及 Perakis 和 Roels[4] 的工作都是属于两个主体之间的纵向竞争范畴，在类似的假设下出现相同的结果就不足为奇了.

3 分权供应链模型

当供应链分散决策时，供应商和销售商之间进行 Stackelberg 博弈. 考虑推式供应链的情形，供应商作为领导者，决定产品的批发价格，n 个销售商作为追随者，相互间进行 Cournot 数量竞争来确定产品的销售价格. 此时，最优销售量和批发价格可以通过求解下面的双层优化模型来获得

$$\max_w (w - c_s)Q \tag{5a}$$

约束条件为

$$Q_i^d = \arg\max_{Q_i} (p - w - c_d)Q_i \tag{5b}$$

$$(p - w - c_d)Q_i \geqslant 0 \tag{5c}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \tag{5d}$$

和公式(1).

引理 2 在反需求函数满足假设 1 和 2 的条件下，求解双层优化模型(5) 得到的最优销售量 Q^d 满足下面的关系：

(a) 当不等式(5c) 为作用约束时，如果销售商必须订货，那么模型(5) 取得边界解，有 $\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d)) = r$ 成立，此时 $Q^d = Q^I \leqslant Q^w$.

(b) 当不等式(5c) 为非作用约束时，模型(5) 取得内部解，有 $\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d))(1-g(Q^d)/n) = r + \bar{F}(Q^d)Q^d g'(Q^d)/n$ 成立，此时 $Q^d \leqslant Q^I \leqslant Q^w$.

(c) 如果模型(5) 取得内部解，那么当 $g(Q^d) \in [k_1, k_2]$ 时，$\bar{F}(Q^d) \in [r/((1-g(Q^d))(1-g(Q^d)/n)), 1]$；当 $g(Q^d) \in [0, k_1]$ 时，$\bar{F}(Q^d) \in [r/((1-g(Q^d))(1-g(Q^d)/n)), nr/(n-(n+2)g(Q^d))]$. 这里 $k_1 = n(1-r)/(n+2)$，$k_2 = (n+1-\sqrt{(n-1)^2+4nr})/2$.

在分权供应链中，由于供应商和销售商作为供应链的上游和下游，都是独立的经济主体，双重边际效应必然导致产品的最终价格较高，使得整个供应链相比集权情形利润降低，社会福利也遭受了更多的损失. 不失一般性，本文只考虑模型(5) 取得内部解的情形. 令 $\lambda^d = \dfrac{\pi(Q^I)}{\pi(Q^d)}$ 表示集权供应链的整体利润与分权供应链的整体利润之间的比值，显然有 $\lambda^d \geqslant 1$. 同样，令 $\rho^d = \dfrac{W(Q^w)}{W(Q^d)}$ 表示社会最优下的社会福利与分权供应链时的社会福利之间的比值，有 $\rho^d \geqslant 1$. 类似上一节，下面分别给出这两个比值最坏情况下的上界.

定理 2 在反需求函数满足假设 1 和 2 的条件下，集权供应链的整体利润与分权供应链的整体利润之间的比值 λ^d 存在如下上界：

(a) 当 $g(Q^d) \in [k_1, k_2]$ 时，$\sup\limits_{F\in\Theta} \lambda^d = k_1((1-k_1)/r)^{1/k_1-1}/(1-r)$；

(b) 当 $g(Q^d) \in [0, k_1]$ 时，$\sup\limits_{F\in\Theta} \lambda^d = (n(1-k_1)/(n-(n+2)k_1))^{1/k_1-1} n/(n+2)$.

类似定理 1 的分析，当 $1-r$ 比较小的时候，无论集权厂商还是分权下的销售商都只有很小的余地来调整价格，这使得集权供应链相对分权情形的利润比值不会太大，其上界将会随着 r 的增大而缩小. 这一点可以从定理 2 中得到证实，当 r 趋向于 1 时，上界取得极小值，结果为 $\sup\limits_{F\in\Theta} \lambda^d = \dfrac{n}{n+2}e^{2/n}$. 另外，由于本文假定供应商在分权供应链中占据主导地位，所以当作为追随者的销售商数目增多的时候，供应链下游的竞争加剧，单个的销售商在制定价格方面的话语权将越来越弱，使得最终的市场价格逐步接近于集权情形下的结果. 从定理 2 中可以发现，如果考虑无限多个销售商竞争的极限情况，$\lim\limits_{n\to\infty} k_1 = 1-r$，进而 $\sup\limits_{F\in\Theta} \lambda^d = 1$，此时分权供应链的绩效同集权情形就是一致的了.

从定理 2 中还可以观察到这样一个事实，即当面临价格敏感型需求时，即使不考虑库存决策的确定情形，分权供应链的效率损失上界还是明显高于销售价格固定、考虑库存决策的随机需求情形. 例如，当供应链只由一个销售商和一个供应商组成时，Perakis 和 Roels[4] 的工作表明，在销售价格固定、随机需求的情形下，考虑库存决策的分权供应链中效率损失上界的极小值为 $1-1/(e-1) \approx 42\%$ ($r\to 1$ 时)，明显小于定理 2 中的结果，即 $1 - 1/\sup\limits_{F\in\Theta}\lambda^d = 1 - 3/e^2 \approx 59\%$. 这可能是因为在库存决策的供应链中，销售价格固定导致实现的社会福利也是固定的，销售商和供应商在分权情形只是竞争供应链利润，然而在定价决策的供应链中，社会福利随着销售价格的升高会降低，使得减去消费者剩余之后销售商和供应商之间可分的利润减少了. 当然，如果在随机需求、库存决策的基础上进一步集成定价决策，分权供应链的效率损失可能会更大，这是下一步的研究工作.

定理 3 在反需求函数满足假设 1 和 2 的条件下，社会最优下的社会福利与分权供应链时的社会福利之间的比值 ρ^d 存在如下上界：

(a) 当 $g(Q^d) \in [k_1, k_2]$ 时，$\sup\limits_{F\in\Theta} \rho^d = k_1(r^{1-1/k_1}-1)/((1-k_1)(1-r))$；

(b) 当 $g(Q^d) \in [0, k_1]$ 时，$\sup\limits_{F\in\Theta} \rho^d = n((n/(n-(n+2)k_1))^{1/k_1-1}-1)/((n+2)(1-k_1))$.

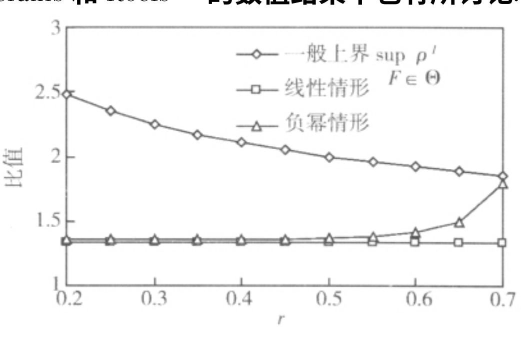
类似前面两个定理的分析，从定理 3 中可以看出，社会最优模型相对分权情形的社会福利比值同样随着边际毛利 $1-r$ 的减小而减小，而且当边际毛利趋向于零时，其上界取得极小值，即 $\sup\limits_{F\in\Theta} \rho^d = \dfrac{n}{n+2}(e^{1+2/n}-1)$；随着销售商数目的增多，

这个比值上界还会减小，在只有一个销售商的时候福利损失达到最大，即 $1-1/\sup\limits_{F\in\Theta}\rho^d = 1-3/(e^3-1)\approx 84\%$；如果考虑供应链下游存在无限多个竞争型销售商的极限情况，单个销售商难以影响市场价格的制定，失去了产品加价的权力，不得不只赚取正常利润(这里为零)，此时 $\lim\limits_{n\to\infty} k_1 = 1-r$，进而 $\sup\limits_{F\in\Theta}\rho^d = r^{-1/(1-r)} - r^{-1}$，进而，这意味着分权供应链的福利损失与定理 1 中的集权情形趋于一致.

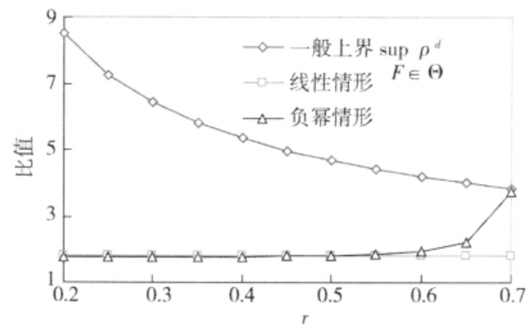
4 数值分析

考虑两个具体的反需求函数形式: 1) 线性函数情形，$p = B_0((1-Q/Q_{max})$；2) 负幂函数情形，$p = B_0(Q/Q_{min})^{-0.1}$. 容易验证这两个函数都是凸的，且需求价格弹性关于市场价格非减，满足前提假设. 利用这两个反需求函数的具体形式，可以计算社会最优、集权和分权供应链模型下的社会福利和供应链利润之间的实际比值.

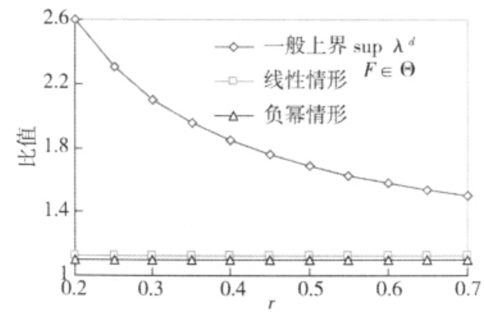
图 2 给出了 $n = 2$ 时社会福利比值 ρ^l、ρ^d 和供应链利润比值 λ^d 分别随 r 变化的趋势. 在大部分情况下，比如 $r \leq 0.6$，给定具体需求函数形式获得的实际比值同一般上界之间有着比较明显的差距. 另外，从图 2 中，还可以看到，与在前提需求假设下获得的最坏结果(前面给定的一般上界)不同，在线性函数情形下实际计算的社会福利和供应链利润比值并不随 r 变化，恒为 4/3、1.8 和 9/8，而在负幂函数情形下，供应链利润的实际比值保持在 1.09 左右，社会福利的实际比值则存在随 r 变大而变大的趋势. 这种具体需求函数下获得的实际比值与一般上界随 r 变化不一致的现象在 Perakis 和 Roels [4] 的数值结果中也有所讨论.



(a) ρ^l



(b) ρ^d



(c) λ^d

图 2 $n = 2$ 时社会福利和供应链利润的实际比值分别随 r 变化的趋势: (a) ρ^l; (b) ρ^d; (c) λ^d

Fig. 2 Change tendency in the actual ratios of social welfare or supply chain profits with the increase of r, when $n = 2$: (a) ρ^l; (b) ρ^d; (c) λ^d

5 结束语

在反需求函数满足几个基本假设的背景下，本文将社会最优和集权供应链作为两个基准模型，分别研究了面临价格敏感型确定需求的分权供应链在整体运作效率和社会福利方面的损失界定问题. 研究得到的主要结论是: 1) 无论在整体利润还是社会福利的损失方面，文中给出的明确上界都不依赖于反需求函数的具体形式; 2) 当面临价格敏感型的确定需求时，分权供应链的效率损失上界明显高于销售价格固定、随机需求的情形; 3) 无论在运作效率还是社会福利方面，供应链分权导致的损失上界都是随着单位产品的最大边际毛利增大而增大，随着下游竞争的加剧而减小. 这些研究成果有着广阔的应用空间，在市场需求函数未知的情形下可以用于竞争市场的效率评估、销售商数目的选定、市场指导价格的制定以及新产品的渠道设计等诸多方面.

正如文献 [15] 所提到的，现实中的供应链结

构一般是比较复杂的，供应链成员往往面临着无论需求还是供应都是不确定的市场环境. 本文所研究的一个供应商和多个竞争型销售商组成的分权供应链是非常简单的情形，并且需求立即实现、不考虑库存决策的假设也比较理想化，因此，还存在许多进一步研究的空间，比如在价格敏感型随机需求的分权供应链中联合定价和库存决策、考虑更一般的需求函数类型[13]、研究多产品差异化竞争的供应链以及部分但非完美契约协调的供应链情形等.

参 考 文 献:

[1] Spengler J. Vertical integration and antitrust policy [J]. Journal of Political Economics, 1950, 58(4): 347 – 352.

[2] Cachon G P. Supply chain coordination with contracts [C] // Graves S, de Kok T (Eds). Handbook in Operations Research and Management Science: Supply Chain Management . Amsterdam: Elsevier, The Netherlands, 2003: 229 – 339.

[3] Narayanan V G, Raman A. Aligning incentives in supply chains [J]. Harvard Business Review, 2005, 82(11): 94 – 102.

[4] Perakis G, Roels G. The price of anarchy in supply chains: Quantifying the efficiency of price-only contracts [J]. Management Science, 2007, 53(8): 1249 – 1268.

[5] Cachon G. P. Push, pull and advance-purchase discount contracts [J]. Management Science, 2004, 50(2): 222 – 238.

[6] Lariviere, M A, Porteus E L. Selling to the newsvendor: An analysis of price-only contracts [J]. Manufacturing and Service Operations Management, 2001, 3(4): 293 – 305.

[7] Koutsoupias E, Papadimitriou C. Worst-case equilibria [C] //Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, Germany, 1999, 1563: 404 – 413.

[8] Roughgarden T. Selfish Routing and the Price of Anarchy [M]. Cambridge: The MIT Press, 2005.

[9] Johari R, Tsitsiklis J N. Network resource allocation and a congestion game [J]. Mathematics of Operations Research, 2004, 29(3): 407 – 435.

[10] Acemoglu D, Ozdaglar A. Competition and efficiency in congested markets [J]. Mathematics of Operations Research , 2007, 32(1): 1 – 31.

[11] Mas-colell A, Whinston M D, Green G R. Microeconomic Theory [M]. New York: Oxford University Press, 1995.

[12] Ziya S, Ayhan H, Foley R D. Relationships among three assumptions in revenue management [J]. Operations Research, 2004, 52(5): 804 – 809.

[13] Guo X, Yang H. The price of anarchy of Cournot oligopoly [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3828: 246-257.

[14] Barlow R E, Proschan F. Mathematical Theory of Reliability [M]. New York, John Wiley & Sons, 1965.

[15] 陈 剑，蔡连侨. 供应链建模与优化 [J]. 系统工程理论与实践，2001，21(6): 26 – 33.
Chen Jian, Cai Lianqiao. Modeling and optimizing in supply chain [J]. System Engineering Theory and Practice, 2001, 21(6): 26 – 33. (in Chinese)

[16] 刘天亮，欧阳恋群，黄海军. ATIS 作用下的混合交通行为网络与效率损失上界 [J]. 系统工程理论与实践，2007，27(4): 154 – 159.
Liu Tianliang, Ouyang Lianqun, Huang Haijun. Mixed travel behavior in networks with ATIS and upper bound of efficiency loss [J]. System Engineering Theory and Practice, 2007, 27(4): 154 – 159. (in Chinese)

[17] 刘春林. 多零售商供应链系统的契约协调问题研究 [J]. 管理科学学报，2007，10(2): 1 – 6.
Liu Chunlin. Contract coordination of supply chain system based on multi retailers [J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10(2): 1 – 6. (in Chinese)

[18] 黄祖庆，达庆利. 直线型再制造供应链决策结构的效率分析 [J]. 管理科学学报，2006，9(4): 51 – 57.
Huang Zuqing, Da Qingli. Study on efficiency of serial supply chains with remanufacture [J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(4): 51 – 57. (in Chinese)

Analysis on social welfare and operational efficiency in decentralized supply chains with convex demand

LIU Tian-liang[1], CHEN Jian[2,3], XIN Chun-lin[4]

1. School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. Research Center for Contemporary Management, Key Research Institute of Humanities and Social Sciences at Universities, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
3. School of Economics and Management, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
4. School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China

Abstract: Under the assumption that demand function is convex and has the non-decreasing price elasticity, this paper analytically studies the losses of both social welfare and operational efficiency in decentralized supply chains with price-sensitive demand, respectively. We consider the following system: A single supplier sells homogenous products to multiple identical retailers at the same wholesale price such that the market selling price can be determined under quantity competition. By virtue of the concept PoA (Price of Anarchy), the whole profit or social welfare in the decentralized supply chain are compared with that in the integrated supply chain or the social optimal model, respectively. Then, the upper bounds for the losses, independent of the specific forms of demand functions, are derived analytically in detail. It is found that compared with the case of stochastic demand with fixed selling prices and inventory decision consideration, the inefficiency in the decentralized supply chain with price-sensitive demand has obviously higher upper bound when inventory decision is not integrated. Furthermore, the upper bounds increase with respect to the largest gross promargin per product and decrease as the competition at the downstream become keen.

Key words: decentralized supply chain; demand elasticity; price of anarchy; efficiency loss

附录

引理 1 的证明

集权供应链的目标函数(3)可以改写为

$$\pi(Q) = (B_0\bar{F}(Q) - c_s - c_d)Q \tag{A1}$$

公式(A1)对 Q 求导,可以得到

$$\pi'(Q) = B_0\bar{F}(Q)(1-g(Q)) - c_s - c_d \tag{A2}$$

继续对公式(A2)求导,

$$\pi''(Q) = -B_0 f(Q)(1-g(Q)) - B_0\bar{F}(Q)g'(Q) < 0 \tag{A3}$$

不等式的成立是由于前提假设 $1-g(Q)>0$,$g'(Q)\geqslant 0$. 显然,供应链集权时的目标函数是拟凹的. 令一阶条件(A2)等于零可以求得最优的市场销售量 Q^I,即 $\bar{F}(Q^I)(1-g(Q^I)) = r$. 鉴于 $Q^w = \bar{F}^{-1}(r)$,很容易验证 $Q^I \leqslant Q^w$,引理 1 得证.

定理 1 的证明

依据文中的定义,社会最优下的社会福利与集权供应链时的社会福利之间的比值为

$$\rho^I = \frac{W(Q^w)}{W(Q^I)} = \frac{\int_0^{Q^w} p\mathrm{d}x - (c_s + c_d)Q^w}{\int_0^{Q^I} p\mathrm{d}x - (c_s + c_d)Q^I} = \frac{\int_0^{Q^I}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{Q^I}^{Q^w}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x - rQ^w}{\int_0^{Q^I}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x - rQ^I}. \tag{A4}$$

已知 $\rho^I \geqslant 1$,$\int_0^{Q^I}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant Q^I\bar{F}(Q^I)$,故下面的不等式成立

$$\rho^I \leqslant \frac{\int_{Q^I}^{Q^w}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x + \bar{F}(Q^I)Q^I - rQ^w}{\bar{F}(Q^I)Q^I - rQ^I}. \tag{A5}$$

$\bar{F}(Q)$ 可以表示成 $h(Q)$ 的指数函数[14]，即

$$\bar{F}(Q) = \bar{F}(Q^I)\exp\left(-\int_{Q^I}^{Q}h(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \bar{F}(Q^I)\exp\left(-\int_{Q^I}^{Q}(g(Q^I)/x)\,\mathrm{d}x\right) = \bar{F}(Q^I)(Q^I/Q)^{1-r/\bar{F}(Q^I)} \tag{A6}$$

其中不等式的成立是因为递增弹性假设使得 $g(Q^I) \leqslant xh(x)$，$x \geqslant Q^I$，最后等式的成立是由于引理 1 中 $\bar{F}(Q^I)(1-g(Q^I)) = r$. 由不等式(A6)，可以得到

$$\int_{Q^I}^{Q^w}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{Q^I(\bar{F}(Q^I))^2}{r}\left(\left(\frac{Q^w}{Q^I}\right)^{r/\bar{F}(Q^I)} - 1\right) \tag{A7}$$

将不等式(A7)代入(A5)，可以获得下面的不等式

$$\rho^I \leqslant \frac{((\bar{F}(Q^I))^2/r)((Q^w/Q^I)^{r/\bar{F}(Q^I)}-1) + \bar{F}(Q^I) - r(Q^w/Q^I)}{\bar{F}(Q^I) - r}. \tag{A8}$$

固定 Q^I，上述不等式的右端项是关于 Q^w 的增函数. 已知 $\bar{F}(Q^w) = r$，则由不等式(A6)进一步可以得到

$$Q^w/Q^I \leqslant (\bar{F}(Q^I)/r)^{\bar{F}(Q^I)/(\bar{F}(Q^I)-r)} \tag{A9}$$

根据不等式(A9)，不等式(A8)可以进一步放松为

$$\rho^I \leqslant (\bar{F}(Q^I)/r)^{\bar{F}(Q^I)/(\bar{F}(Q^I)-r)} - \bar{F}(Q^I)/r \tag{A10}$$

可以验证，上述不等式的右端项是关于 $\bar{F}(Q^I)$ 的增函数. 由于 $\bar{F}(Q^I) \leqslant 1$，故不等式(A10)可以进一步放松为 $\rho^I \leqslant r^{-1/(1-r)} - r^{-1}$，且当 $r \to 1$ 时，$\lambda^d \to e-1$，定理 1 得证.

引理 2 的证明

当约束条件(5c)为作用约束时，如果销售商必须订货，优化模型(5)等价于集权供应链的情形. 由引理1的证明可知最优交易量 Q^d 使得 $\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d)) = r$ 成立，显然此时 $Q^d = Q^I \leqslant Q^w$. 而当约束条件(5c)为非作用约束时，类似引理 1 的证明，约束条件(5b)中的目标函数是拟凹的，并且有下面的等式成立

$$w = B_0\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d)/n) - c_d \tag{A11}$$

将等式(A11)代入目标函数(4a)中，优化模型(4)可以改写为

$$\max_{Q^d}(B_0\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d)/n) - c_s - c_d)Q^d \tag{A12}$$

令公式(A12)的一阶条件等于零，简单处理可以得到

$$\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d))(1-g(Q^d)/n) = r + \bar{F}(Q^d)Q^d g'(Q^d)/n. \tag{A13a}$$

鉴于 $Q^w = \bar{F}^{-1}(r)$，$\bar{F}(Q^I)(1-g(Q^I)) = r$，很容易验证 $Q^d \leqslant Q^I \leqslant Q^w$. 由于基本假设 $g'(Q^d) \geqslant 0$，故 $\bar{F}(Q^d)$ 的下界满足下面的不等式

$$\bar{F}(Q^d) \geqslant r/((1-g(Q^d))(1-g(Q^d)/n)) \tag{A13b}$$

既然 $\bar{F}(Q^d) \leqslant 1$，那么 $g(Q^d)$ 必须不大于 $(n+1-\sqrt{(n-1)^2+4nr})/2$. 又由于假设反需求函数是凸的，有 $Q^d g'(Q^d) \leqslant g(Q^d)(1+g(Q^d))$ 成立，故 $\bar{F}(Q^d)$ 的上界满足下面的不等式

$$\bar{F}(Q^d) \leqslant nr/(n-(n+2)g(Q^d)) \tag{A13c}$$

当 $g(Q^d) \geqslant n(1-r)/(n+2)$ 时，上述不等式的右端项将不小于 1. 鉴于 $\bar{F}(Q^d) \leqslant 1$，因此只有 $g(Q^d) \in [0, n(1-r)/(n+2)]$ 时，上述不等式才起作用. 故引理 2 得证.

定理 2 的证明

依据文中的定义，集权供应链的整体利润与分权供应链的整体利润之间的比值为

$$\lambda^d = \frac{\pi(Q^I)}{\pi(Q^d)} = \frac{(p^I - c_s - c_d)Q^I}{(p^d - c_s - c_d)Q^d} = \frac{(\bar{F}(Q^I) - r)Q^I}{(\bar{F}(Q^d) - r)Q^d} \tag{A14}$$

已知 $Q^I \geqslant Q^d$，类似定理 1 中的技术处理，将 $\bar{F}(Q^I)$ 可以表示成 $h(Q)$ 的指数函数[14]，不等式(A14)放松为

$$\lambda^d \leqslant \frac{(\bar{F}(Q^d)(Q^d/Q^I)^{g(Q^d)} - r)Q^I}{(\bar{F}(Q^d) - r)Q^d} \tag{A15}$$

固定 Q^d，上述不等式的右端项是关于 Q^I 的凹函数，并且当 $Q^I/Q^d = (\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d))/r)^{1/g(Q^d)}$ 时取得最大值. 将其代入不等式(A15)中，上界进一步放松为

$$\lambda^d \leqslant \frac{rg(Q^d)}{1-g(Q^d)}\frac{(\bar{F}(Q^d)(1-g(Q^d))/r)^{1/g(Q^d)}}{\bar{F}(Q^d) - r} \tag{A16}$$

固定 $g(Q^d)$，上述不等式的右端项是关于 $\bar{F}(Q^d)$ 的增函数. 因此，根据表达式(A13)，分两种情形进行讨论:

(1) 当 $g(Q^d) \in [n(1-r)/(n+2), (n+1-\sqrt{(n-1)^2+4nr})/2]$ 时，$\bar{F}(Q^d) \leqslant 1$，(A16)放松为 $\lambda^d \leqslant \frac{rg(Q^d)}{1-g(Q^d)}\frac{((1-g(Q^d))/r)^{1/g(Q^d)}}{1-r}$. 可以验证其右端项是关于 $g(Q^d)$ 的减函数，故当 $g(Q^d)$ 趋向 $k = n(1-r)/(n+2)$ 时，上界可以进一步放松为 $\lambda^d \leqslant \frac{rk}{1-k}\frac{((1-k)/r)^{1/k}}{1-r}$. 并且当 $r \to 1$ 时，$k \to 0$，$\lambda^d \to \frac{n}{n+2}e^{2/n}$.

(2) 当 $0 \leqslant g(Q^d) \leqslant n(1-r)/(n+2)$ 时，$\bar{F}(Q^d) \leqslant nr/(n-(n+2)g(Q^d))$，(A16)放松为 $\lambda^d \leqslant \frac{n}{(n+2)}\left(\frac{n(1-g(Q^d))}{n-(n+2)g(Q^d)}\right)^{1/g(Q^d)-1}$. 可以验证其右端项是关于 $g(Q^d)$ 的增函数，故当 $g(Q^d)$ 趋向 $k = n(1-r)/(n+2)$ 时，上界可以进一步放松为 $\lambda^d \leqslant \frac{n}{n+2}\left(\frac{n(1-k)}{n-(n+2)k}\right)^{1/k-1}$. 并且当 $r \to 1$ 时，$k \to 0$，$\lambda^d \to \frac{n}{n+2}e^{2/n}$.

综合上述两种情形，定理 2 得证.

(下转第 96 页)

novel cellular particle swarm optimization algorithm is proposed, which is based on the principles of cellular automata and discrete particle swarm optimization algorithm. Cellular and its neighbor are introduced into the algorithm to maintain the swarm's diversity and the algorithm uses evolutionary rule of cellular in local optimization to avoid local optima. Simulated tests of multi-dimensional knapsack problem and comparisons with other algorithms show the algorithm is feasible and effective and the algorithm has strong global optimization ability.

Key words: cellular automata; particle swarm optimization algorithm; multi-dimensional knapsack problem; optimization

(上接第 68 页)

定理 3 的证明

依据文中的定义，社会最优下的社会福利与分权供应链时的社会福利之间的比值为

$$\rho^d = \frac{W(Q^w)}{W(Q^d)} = \frac{\int_0^{Q^w} p\mathrm{d}x - cQ^w}{\int_0^{Q^d} p\mathrm{d}x - cQ^d} = \frac{\int_0^{Q^I}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{Q^I}^{Q^w}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x - rQ^w}{\int_0^{Q^d}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x - rQ^d} \quad (\text{A17})$$

已知 $\rho^d \geqslant 1$，$\int_0^{Q^d}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant Q^d\bar{F}(Q^d)$，并且类似定理 1 中的技术处理，将 $\bar{F}(Q^w)$ 可以表示成 $h(Q)$ 的指数函数[14]，不等式(A17)放松为

$$\rho^d \leqslant \frac{g(Q^d)}{1-g(Q^d)}\frac{r(\bar{F}(Q^d)/r)^{1/g(Q^d)} - \bar{F}(Q^d)}{\bar{F}(Q^d) - r} \quad (\text{A18})$$

固定 $g(Q^d)$，上述不等式的右端项是关于 $\bar{F}(Q^d)$ 的增函数. 因此，根据表达式(A13)，分两种情形进行讨论:

(1) 当 $g(Q^d) \in [n(1-r)/(n+2), (n+1-\sqrt{(n-1)^2+4nr})/2]$ 时，$\bar{F}(Q^d) \leqslant 1$，(A18)放松为 $\rho^d \leqslant \frac{g(Q^d)}{1-g(Q^d)}\frac{r^{1-1/g(Q^d)}-1}{1-r}$. 可以验证其右端项是关于 $g(Q^d)$ 的减函数，故当 $g(Q^d)$ 趋向 $k = n(1-r)/(n+2)$ 时，上界可以进一步放松为 $\rho^d \leqslant \frac{k}{1-k}\frac{r^{1-1/k}-1}{1-r}$. 并且当 $r\to1$ 时，$k\to0$，$\rho^d \to \frac{n}{n+2}(e^{1+2/n}-1)$.

(2) 当 $0 \leqslant g(Q^d) \leqslant n(1-r)/(n+2)$ 时，$\bar{F}(Q^d) \leqslant nr/(n-(n+2)g(Q^d))$，(A18)放松为 $\rho^d \leqslant \frac{n}{(n+2)}\frac{(n/(n-(n+2)g(Q^d)))^{1/g(Q^d)-1}-1}{1-g(Q^d)}$. 可以验证其右端项是关于 $g(Q^d)$ 的增函数，故当 $g(Q^d)$ 趋向 $k = n(1-r)/(n+2)$ 时，上界可以进一步放松为 $\rho^d \leqslant \frac{n}{n+2}\frac{(n/(n-(n+2)k))^{1/k-1}-1}{1-k}$. 并且当 $r\to1$ 时，$k\to0$，$\rho^d\to\frac{n}{n+2}(e^{1+2/n}-1)$.

综合上述两种情形，定理 3 得证.