流动性调整的最优交易策略模型研究①

林 辉, 张涤新, 杨 浩, 丁 一
(南京大学商学院, 南京 210093)

摘要: 通过放松理想化市场的假设条件, 构建流动性调整的最优交易策略模型, 并证明了交易策略在任意初始持仓、不同行情时的性质. 研究表明在行情看涨时, 若初始持仓过量则应采取“U型”卖出策略; 若初始持仓适量, 则应采取“递增型”卖出策略; 若初始持仓为较少的多头或空头, 则应采取先“递增型”买入, 而后“递增型”卖出的策略; 若逆市持有过量的空头, 则应采取“递增型”买入策略. 行情看跌情形则与看涨情形具有完全相反的结果. 若行情看平, 则应采取“递减型”卖出或“递增型”买入策略. 本文最后分析了流动性对最优交易策略的影响.

关键词: 流动性、效率市场、最优交易策略
中图分类号: F830.9 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2011)05-0065-12

0 引 言

传统的投资理论假设金融市场具有完美的流动性, 从而任意数量的证券均可在瞬间完成交易, 且投资者的交易行为不影响证券的成交价格. 然而, 现实中证券市场的流动性总是有限的, 大宗证券交易可能给市场带来价格冲击, 故其交易行为影响证券价格. 其次, 受制于交易规则与证券的流动性, 任意数量的证券要在瞬间完成交易也是不可能的②. 由此可见, 在现实的市场条件下, 投资者不仅面临着证券价格波动的风险, 还受制于证券的流动性. 所以, 现实中的投资者不仅需要权衡证券的投资机会和风险, 还需要考虑如何将证券分批次地进行交易[1] (以克服流动性的不足), 形成所谓的最优交易策略 (optimal trading strategy). 证券交易策略是现代投资理论的研究热点, 它对于提高资产组合管理的效率具有重要的理论和实践意义.

本文将探讨流动性非完美条件下的最优交易策略, 即流动性调整的最优交易策略. 与以往研究所不同的是, 本文对交易策略的讨论不再局限于多头持仓和单纯的卖出策略, 也不局限于对机构投资者交易策略的分析, 相反地, 对于投资者持有任意数量的证券多头或空头, 及其在不同行情下的最优交易策略都通过数学模型进行解析, 并分析流动性对最优交易策略

1 文献综述

流动性是指资产能够以合理的价格和较低的交易成本迅速成交的能力. Amihud和 Mendelson[2] 认为流动性是在一定时间内完成交易所需的成本, 或者是寻找一个合理成交价格所需要的时间. Kyle[3] 提出流动性的三维结构, 紧度 (tightness)、深度 (depth)和弹性 (resiliency). 在流动性的计量方法上, 人们提出了价差法 (紧度)、交易量法 (深度)、价量分析法以及时间法 (弹性)等方法, 例如 Stoll[4] 的价差估计模型、Kyle[3] 的市场深

① 收稿日期: 2010-01-25; 修订日期: 2010-09-01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70501013); 教育部人文社会科学研究资助项目 (10YJC790162).
作者简介: 林 辉 (1972-), 男, 福建闽侯人, 副教授, 博士. Email: linhui@nju.edu.cn
② 瞬间完成交易就意味着交易速度无限大. 然而, 股票、基金等证券交易都有单笔申报最大数量的限制.

度指标 λ(交易量对价格的敏感度)、Amihud[5]的非流动性指标 ILLIQ.此外,还可采用交易额、换手率等指标作为流动性的代理变量.虽然学界对流动性的定义和计量方法存在争议,但从流动性的本质来看,一般地,若单位时间内交易量越大,即交易速度越大,则证券的成交价格越不理想.本文正是遵循此思路在模型中引入流动性调整项.

近年来,人们将流动性引入资产定价领域,主要讨论流动性水平或流动性风险与预期收益率的关系③.Amihud和 Mendelson[6]对 NYSE股票的实证研究中发现:相对价差与股票的预期收益率具有正相关关系,即流动性越差的证券其预期收益率越高.Amihud[5]以非流动性指标 ILLIQ来计量流动性,他们发现.在横截面上,股票的预期收益率与 ILLIQ显著正相关,但是在时间序列上,当期非预期的 ILLIQ与股票的预期收益率却呈显著负相关.Acharya和 Pedersen[7]提出了流动性调整的资本资产定价模型(liquidity-adjusted CAPM, LCAPM),并选取 NYSE和 AMEX的股票进行实证研究,其研究表明,股票的预期收益率与其预期的非流动性水平以及流动性风险具有正相关关系.此外,Korajczyk和 Sadka[8]、Hasbrouck[9]等人的研究也支持了流动性(风险)溢价的存在.我国学者也对流动性问题进行探索.吴文锋等[10]、苏冬蔚和麦元勋[11]分别以 ILLIQ指标、换手率来计量我国股市的流动性,其实证研究都认为我国股市存在流动性溢价现象.黄峰、杨朝军[12]的实证研究指出:流动性风险溢价更为显著地出现在流动性较差或价格冲击弹性较高的股票上.邹小芃等[13]将市场流动性风险分解为外生和内生两个部分,并构建 LCAPM模型,其研究表明,流动性风险中不可分散的系统性部分才会影响到资产的价格及其预期收益率.

需要说明的是,虽然流动性溢价理论认为流动性越差的证券其预期收益率越高,但从流动性的定义来看,给定某个非完美流动性的证券,不论其流动性水平如何,只要在交易过程中受到的流动性冲击越大,则收益率越低.此二者并无矛盾,因为前者阐明的是不同证券之间流动性与收益率的关系,而后者指出的却是同一个证券在不同交易条件下流动性与收益率的关系.

最优交易策略的文献综述.Bertsimas和 Lo[14]通过最小化变现成本(execution cost)的期望值,来研究大宗(large block)证券、在给定时间下的最优变现问题,研究表明:在价格冲击为线性的条件下,风险中性的投资者最优变现策略为匀速变现.由于该模型的假设条件为风险中性,故该文没有考虑证券的市场风险(market risk).Almgren和 Chriss[15]将市场冲击(market impact)划分为暂时性冲击(temporary impact)和永久性冲击(permanent impact)④,并以布朗运动为基础建立离散变现策略模型,在给定变现风险的条件下,最小化变现成本的期望值,该模型的不足之处是:将变现时间划分成等长的区间,并假设每个区间的变现速度恒定.随后,Almgren[16]在暂时性冲击为随机情形下研究了连续变现问题,但该模型假设投资期末的变现速度为零,但本文的研究则表明:交易速度在投资期末可以是任意的.Hisata和 Yamai[17]、Dubil[18]在变现速度恒定的条件下探讨了最优变现时间问题,然而,现实中的投资者总是在给定投资期限下获得目标回报,且难以保持恒定的变现速度.Pemy等[19]以 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方法研究最优变现策略,类似的研究成果还有 Ting等[20].Monch[21]研究了具有 U型特征的日内价格冲击下投资者的最优变现问题.

我国学者对最优变现策略问题也进行了有价值的研究.仲黎明等[22]探讨了机构投资者的最优变现策略,刘海龙等[23]分析了开放式基金的最优变现策略,郭福华和邓飞其[24]在不考虑市场的摩擦因素条件下,研究了给定期望损失约束,最大化终端财富效用的资产组合选择问题.

以往的许多研究成果主要讨论证券的变现策

③ 流动性水平是指流动性计量指标本身,而流动性风险是指流动性计量指标的方差或与其他变量的协方差.

④ 暂时性冲击是指交易者的变现行为引起供求关系的失衡,将导致变现价格暂时性地偏离均衡价格.这里"暂时性"是指供求失衡仅影响某一笔证券的变现价格,而对该笔之前或之后的变现价格没有影响.相反地,永久性冲击则是某一笔证券变现对变现价格的影响在剩余的变现期内持久地存在.Almgren和 Chriss[15]假设,半价差(one-half the bid-ask spread)构成暂时性冲击的固定部分,其可变部分则为超过日交易量的 1%以上所产生的价差,而永久性冲击假设为超过日交易量 10%以上的所产生价差.

略, 却忽略了投资者可能买入证券或者进行卖空交易的行为, 事实上, 当证券行情看涨时, 持仓不足的投资者可能买入证券, 而当行情看跌时则可能进行卖空交易. 其次, 以往的研究对象主要是基金等机构投资者⑤, 而本文则不限于此, 对于任意的初始持仓 (如空仓) 都进行讨论, 故研究结论适用于所有的投资者. 最后, 以往的研究缺乏对最优交易策略性质的解析证明, 一些论文仅仅进行数值模拟. 因此, 本研究可视为以往研究成果的进一步拓展.

2　最优交易策略模型及其解析解

现实中, 投资者总是以自己当前的持仓水平 (多头或空头), 基于证券未来的一段时间 (投资期) 价格走势的预期, 制定并执行交易策略, 以获得投资效用的最大化, 这也正是本文提出最优交易策略模型的基本思路.

2.1　最优交易策略模型的构建

假设投资者在初始时刻 ($t = 0$) 拥有数量为 n_0 (下文简称 "初始持仓")、价格为 S_0 的证券, 需要在给定的投资期限 T 内完成交易, 从而期末持仓量 $n_T = 0$. 投资者的交易策略是由其可控制的变量 —— 交易速度 $v(t)$ 构成的⑥, 显然, t 时刻投资者的持仓量为

$$n(t) = n_0 - \int_0^t v(t)\,dt \tag{1}$$

由式 (1) 可知, $v(t) > 0$ 和 $v(t) < 0$ 分别表示卖出和买入证券, 且有 $n(0) = n_0$, $n(T) = n_T = 0$. 定义 t 时刻证券的价格 $S(t)$ 相对于期初价格 S_0 的相对数 (空头) 或收益率 (多头) 为

$$r(t) = (S(t)/S_0) - 1$$

本文假设证券市场是 (弱式) 有效市场, 它也是现代金融学的基本假设, 在该假设下, 证券价格的离散变化是随机游走 (random walk) 的, 而布朗运动正是随机游走过程在连续时间下的极限形式[25]. Osborne[26] 发现股票价格的波动与物质粒子的布朗型随机运动方式颇为相似. Samuelson[27] 通过对合理预测 (properly anticipated) 的股价变化随机性的证明, 提出股票收益率服从布朗运动的观点. Fama[28] 实证研究了证券价格变化的随机游走性, 并提出有效市场理论 (EMH). Black和 Scholes[29] 以及 Merton[30] 都以股票的对数收益率服从算术布朗运动 (即股价服从几何布朗运动) 为基础, 推导出著名的期权定价模型 (Black-Scholes模型). Almgren和 Chriss[15-16]、Hisata和 Yamai等[17]、仲黎明等[18] 对交易策略的研究, 均假设证券的算术收益率服从布朗运动⑦, 即证券市场是弱式有效的. 本文沿用此假设, 从而

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0) + \mu t + \sigma (w(t) - w(0)) \\ &= \mu t + \sigma w(t) \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $w(t)$ 为标准维纳过程. μ 和 σ 分别为瞬时收益率和瞬时波动率, 这里 $\mu = \mu \mid \Omega_0$, $\sigma = \mu \mid \Omega_0$, 表示投资者基于初始时刻的信息集 Ω_0 对 μ 和 σ 做出估计.

现实中的证券市场并不具有完美的流动性, 若单位时间内交易的证券数量越多, 即交易速度越快, 引起证券价格的逆向变化越大⑧, 则表示流动性冲击越大. 借鉴 Perry等[19] 的研究思路, 不妨在式 (2) 中增加流动性调整项 $k \cdot v(t)$, 从而

$$r(t) = \mu t + \sigma w(t) - k \cdot v(t) \tag{3}$$

这里, $k \geq 0$ 为流动性参数, 它是由证券自身流动性特征、交易制度等因素所决定的, k 越小则流动性越好. 由式 (1) 可知, 投资者在 t 时刻交易的证券数量为 $dn(t) = -v(t) \cdot dt$. 因此, 在给定的投资期内, 投资者通过证券投资获得的支付

---

⑤　从我国股市来看, 一些股票中自然人股东的持股甚至超过了基金, 故机构投资者的持仓量并不一定大于个人投资者. 因此, 本文并不将投资者作此划分, 故需要研究任意持仓水平的投资者.

⑥　有的论文将交易策略定义在持仓水平上, 但本文认为交易速度是最本质的变量, 交易速度决定了持仓水平, 且从交易速度的讨论可以看出不同交易策略的差异, 故本文以交易速度来定义交易策略.

⑦　算术收益率 $r_a = S_t/S_0 - 1$, 对数收益率 $r_g = \ln S_t - \ln S_0$, 其麦克劳林展开式为 $r_g = r_a - r_a^2/2 + r_a^3/3 + \cdots \approx r_a$, 故算术收益率可以作为对数收益率的近似.

⑧　证券价格的逆向变化是指, 买入证券 ($v(t) < 0$) 时, 价格上升, $r(t)$ 变大; 卖出证券 ($v(t) > 0$) 时, 价格下降, $r(t)$ 变小, 以上的说明可以解释公式 (3) 的含义.

(payoff)为

$$\int_0^T -s_0(1+r(t))\,dn(t) = s_0 n_0 + s_0\int_0^T r(t)v(t)\,dt = s_0 n_0 + \Pi \qquad (4)$$

其中,Π为投资利润,投资者最大化支付等价于最大化利润 Π,由式(3)和式(4)得到

$$\Pi = s_0\int_0^T r(t)v(t)\,dt = s_0\Big[\int_0^T \mu t v(t)\,dt + \int_0^T \sigma w(t)v(t)\,dt - \int_0^T l v^2(t)\,dt\Big] \qquad (5)$$

这里,$\int_0^T l v^2(t)\,dt$表示交易速度对投资利润的非线性冲击,由于 $v^2(t) \geqslant 0$,这样不论 $v(t) > 0$还是 $v(t) < 0$,流动性冲击增大都将减少投资利润.投资者希望在给定风险的条件下,最大化投资收益率的期望值,因此,可定义投资者的效用函数 $U(\cdot)$为均值-方差效用函数

$$U = U(\Pi) = E(\Pi) - \frac{1}{2}\rho D(\Pi) \qquad (6)$$

其中,$\rho = -\frac{U''(\cdot)}{U'(\cdot)} > 0$为投资者风险规避系数.根据维纳过程的性质,由式(5)可得

$$\begin{aligned} E(\Pi) &= s_0\int_0^T \mu t v(t)\,dt - s_0\int_0^T l v^2(t)\,dt \\ &= s_0\int_0^T (\mu n(t) - l v^2(t))\,dt \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} D(\Pi) &= E\Big(s_0\sigma\int_0^T v(t)w(t)\,dt\Big)^2 \\ &= s_0^2\sigma^2\int_0^T\int_0^T \min(s,t)\,v(t)v(s)\,dt\,ds \\ &= s_0^2\sigma^2\int_0^T n^2(t)\,dt \end{aligned} \qquad (8)$$

这里,$E(\cdot)$和 $D(\cdot)$分别表示均值和方差.将式(7)和式(8)代入式(6)中即可构造目标方程为

$$U = \int_0^T \Big(s_0\mu n(t) - s_0 l v^2(t) - \frac{1}{2}\rho s_0^2\sigma^2 n^2(t)\Big)\,dt \qquad (9)$$

由上文构建的模型,投资者的投资目标是给定初始时刻的信息集 Ω_0,寻求最优交易策略 $v^*(t)$, $t\in[0,T]$,使得目标方程式(9)定义的投资效用 U最大化.

2.2 利用最大值原理求解最优交易策略

在现代最优控制领域,庞特里亚金(Понтрягин)提出的极大值原理成为求解最优控制问题的有效工具.为应用该原理,由式(9)可定义汉密尔顿(Hamilton)方程

$$H(t,n,v,\lambda) = s_0\mu n(t) - s_0 l v^2(t) - \frac{1}{2}\rho s_0^2\sigma^2 n^2(t) + \varphi(t)(-v(t)) \qquad (10)$$

其中,$\varphi(t)$为共积变量(辅助变量).对于式(10)给出的汉密尔顿方程,最大值原理的条件是,对于任意的 $t\in[0,T]$,最优交易策略必须满足

$$\frac{\partial H}{\partial v} = -2s_0 l v(t) - \phi(t) = 0$$

$$n'(t) = \frac{\partial H}{\partial \phi} = -v(t)$$

$$\phi'(t) = -\frac{\partial H}{\partial n} = \rho s_0^2\sigma^2 n(t) - s_0\mu$$

以及边界条件 $n(0) = n_0$, $n(T) = 0$.基于以上条件,首先解得最优持仓量 $n^*(t)$为

$$n^*(t) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}t} + c_3 \qquad (11)$$

其中,

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\rho s_0\sigma^2}{2l} > 0 \\ c_1 = -\dfrac{n_0 + (e^{\sqrt{\lambda}T} - 1)c_3}{e^{2\sqrt{\lambda}T} - 1} \\ c_2 = -\dfrac{n_0 + (e^{-\sqrt{\lambda}T} - 1)c_3}{e^{-2\sqrt{\lambda}T} - 1} \\ c_3 = \dfrac{\mu}{\rho s_0\sigma^2} \end{cases} \qquad (12)$$

由式(11)可得投资者的最优交易策略(速度)为

$$v^*(t) = -n^{*\prime}(t) = -\sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}t} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}) \qquad (13)$$

为方便下文的讨论,不妨给出 $v^*(t)$的一阶导数(加速度),由式(13)得到

$$v^{*\prime}(t) = -\lambda(c_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}) \qquad (14)$$

此外,不妨将式(11)和式(13)代入目标方程式(9),通过积分得到最优效用 U^*为

$$U^* = -\frac{\rho s_0\sigma^2(n_0^2 + 2(e^{\sqrt{\lambda}T} - 1)c_3 n_0)}{2\sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda}T} - 1)} + \frac{\rho s_0\sigma^2(n_0^2 + 2(e^{-\sqrt{\lambda}T} - 1)c_3 n_0)}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}T} - 1)} + \int_0^T A(t)\,dt \qquad (15)$$

其中,$A(t)$为不含有 n_0的被积函数.不妨将式

(15)看作关于初始持仓 q_0 的间接目标函数 $U^*(q_0)$，并且令 $\frac{dU^*(q_0)}{dq_0}=0$，可求解得到极值点

$$q_0^*=\frac{(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)^2}{1+e^{2\sqrt{\lambda}T}}c_3$$

且由于二阶导数 $\frac{d^2U^*(q_0)}{dq_0^2}=\rho S_0\sigma^2\left(\frac{1}{e^{\sqrt{\lambda}T}-1}-\frac{1}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}\right)<0$，故当 $q_0=q_0^*$ 时，$U^*(q_0)$ 取得间接目标函数的极大值，即一系列最大化投资效用的“包络”值. 由此可见，q_0^* 是所有初始持仓中具有最高效用的持仓水平，故可称之为最优初始持仓. 且当 $l\to 0$ 时，成立

$$\lim_{l\to 0}q_0^*=\lim_{l\to 0}\frac{(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)^2}{1+e^{2\sqrt{\lambda}T}}c_3=c_3 \tag{16}$$

由式(16)即知，c_3 为流动性无限好($l\to 0$)的条件下的最优初始持仓，故称 c_3 为“理想的最优初始持仓”.

3　任意初始持仓、不同预期行情下的最优交易策略

投资者的初始持仓并不一定为最优初始持仓，例如证券行情的改变可能导致原先制定的交易策略需要变更，此时，因原交易策略未执行完而有剩余持仓，则该剩余持仓就成为制定新交易策略的初始持仓，显然其数量和方向(多头或空头)可能是任意的，故不一定就是最优水平. 此外，先前空仓的投资者也不拥有最优初始持仓. 由此可见，有必要讨论任意初始持仓、不同预期行情下的最优交易策略.

3.1　证券行情看涨时的最优交易策略

若投资者预期证券未来的价格具有上升趋势(行情看涨)，即 $\mu>0$，则由式(12)知 $c_3>0$. 下文通过命题 1～2来分析该情形下，任意初始持仓的最优交易策略.

命题 1　若初始持仓 $q_0\geq q_0^*$，则对于任意的 $t\in(0,T]$ 都有 $v^*(t)>0$ 并且成立.

性质 1－a　若 $q_0>c_3$，则存在 $t^*\in(0,T)$ 使得 $v^*(t^*)$ 为最小交易速度；

性质 1－b　若 $q_0^*\leq q_0\leq c_3$，则对于任意的 $t\in(0,T)$ 都有 $v^{*\prime}(t)>0$.

证明　当 $q_0\geq q_0^*$ 时，由于 $c_3>0$，则 $c_1<0$ 且有

$$c_1-c_2=\frac{(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)^2c_3-(e^{2\sqrt{\lambda}T}+1)q_0}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}\leq 0$$

从而 $v^*(t)=-\sqrt{\lambda}(c_1e^{\sqrt{\lambda}t}-c_2e^{-\sqrt{\lambda}t})=-\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}(c_1e^{2\sqrt{\lambda}t}-c_2)>-\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}(c_1-c_2)\geq 0$.

下面证明性质 1－a. 令 $v^{*\prime}(t)=0$，由式(14)可知，当 t^* 满足 $e^{2\sqrt{\lambda}t^*}=-\frac{c_2}{c_1}$ 时，$v^*(t^*)$ 为交易速度的极值. 为了保证 $t^*\in(0,T)$，则需证明

$$1<-\frac{c_2}{c_1}<e^{2\sqrt{\lambda}T} \tag{17}$$

由式(12)可知

$$-\frac{c_2}{c_1}=\frac{e^{2\sqrt{\lambda}T}(q_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)c_3)}{q_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)c_3}<e^{2\sqrt{\lambda}T} \tag{18}$$

且当 $q_0>c_3$ 时有

$$0>\frac{(1-e^{2\sqrt{\lambda}T})q_0+(e^{2\sqrt{\lambda}T}-1)c_3}{q_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)c_3}=1-\frac{e^{2\sqrt{\lambda}T}(q_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)c_3)}{q_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)c_3}=1+\frac{c_2}{c_1} \tag{19}$$

由式(18)和式(19)便知式(17)成立，这说明 $v^*(t^*)$ 为极值速度点，且由于

$$v^{*\prime\prime}(t)=-\lambda\sqrt{\lambda}(c_1e^{\sqrt{\lambda}t}-c_2e^{-\sqrt{\lambda}t})=-\lambda\sqrt{\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{\lambda}t}\left(1-\frac{c_2}{c_1}e^{-2\sqrt{\lambda}t}\right)\right)>0$$

所以，$v^*(t^*)$ 为 $q_0>c_3$ 时的最小交易速度.

下面证明性质 1－b. 若 $q_0\leq c_3$，由式(18)推知 $\frac{c_2}{c_1}\geq -1$，故成立

$$v^{*\prime}(t)=-\lambda c_1e^{\sqrt{\lambda}t}\left(1+\frac{c_2}{c_1}e^{-2\sqrt{\lambda}t}\right)\geq -\lambda c_1e^{\sqrt{\lambda}t}(1-e^{-2\sqrt{\lambda}t})>0$$

证毕.

由命题 1可知，若投资者预期证券行情上涨，其初始持仓为多头且不小于最优初始持仓，则应采取卖出策略($v^*(t)>0$). 性质 1－a表明，若投资者初始持仓过量($q_0>c_3$)，则应先通过卖出证券将持仓尽快调整到最优，然后再将此剩余的最

优持仓尽可能地安排在期末阶段交易，故交易速度具有“先递减，后递增”的特征，不妨称之为“U型”卖出策略[⑨]，如图1－1所示．“U型”策略意味着，过多的证券在预期收益率最高的期末阶段交易并非最优，此虽违反直觉但却是合理的，因为过多的证券集中在期末卖出会引起过大的流动性冲击而侵蚀利润．性质（1－b）表明，若初始持仓适量（$\eta_0^* \leq \eta_0 \leq c_3$），投资者应尽可能地选择期末卖出证券，从而有 $v^{*\prime}(t) > 0$，不妨称之为“递增型”卖出策略，如图1－2所示．

命题2　若初始持仓 $\eta_0 < \eta_0^*$，则有 $v^*(0) < 0$，$v^{*\prime}(t) > 0$ 并且成立．

性质2－a　若 $\eta_0^* > \eta_0 > \frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2 c_3$，则有 $v^*(T) > 0$；

性质2－b　若 $\eta_0 \leq -\frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2 c_3$，则有 $v^*(T) \leq 0$．

证明　由式（13）可知 $v^*(0) = -\sqrt{\lambda}(c_1 - c_2)$，且由 $\eta_0 < \eta_0^*$ 可得

$$c_1 - c_2 = \frac{\eta_0 + (e^{\sqrt{\lambda}T}-1)c_3}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1} + \frac{\eta_0 + (e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)c_3}{e^{-2\sqrt{\lambda}T}-1} = \frac{(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)^2 c_3 - (e^{2\sqrt{\lambda}T}+1)\eta_0}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1} > 0 \quad (20)$$

故有 $v^*(0) = -\sqrt{\lambda}(c_1 - c_2) < 0$．类似于性质（1－b）的证明，易知 $v^{*\prime}(t) > 0$．

下面证明性质（2－a）和（2－b）．若 $\eta_0 > -\frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2 c_3$，则 $c_1 < 0$，从而有

$$v^*(T) = -\sqrt{\lambda}\, c_1 e^{\sqrt{\lambda}T}\left(1 - \frac{c_2}{c_1}e^{-2\sqrt{\lambda}T}\right) = -\sqrt{\lambda}\, c_1 e^{\sqrt{\lambda}T}\frac{2\eta_0 + e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2 c_3}{\eta_0 + (e^{\sqrt{\lambda}T}-1)c_3} > 0$$

同理可证，若 $\eta_0 \leq -\frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2 c_3$，则 $v^*(T) \leq 0$．　　证毕．

命题2讨论的是初始持仓不足或逆市持仓的情形，由于行情看涨，此时投资者应尽快买入证券以形成最优持仓，故 $v^*(0) < 0$，而加速度 $v^{*\prime}(t) > 0$ 意味着交易策略为“递增型”．性质（2－a）表明，若投资者初始持仓为较少的多头或空头，应通过买入证券平掉空头并建立多头，然后在期末阶段卖出，从而有 $v^*(T) > 0$，形成了先“递增型”买入，而后“递增型”卖出的策略，如图1－3所示．性质（2－b）表明，若投资者逆市持有过量的空头，由于行情看涨，则整个投资期都需要买入证券以平掉空头，故 $v^*(T) \leq 0$，由此形成“递增型”买入策略，如图1－4所示．

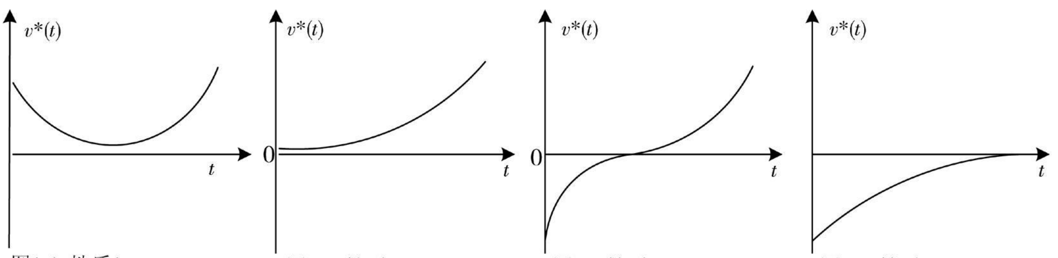

图1-1 性质1-a　　图1-2 性质1-b　　图1-3 性质2-a　　图1-4 性质2-b

图1　证券行情看涨时的最优交易策略示意图

Fig. 1　The optimal trading strategy trajectories in a bullish market

3.2　证券行情看跌时的最优交易策略

若投资者预期证券未来的价格具有下跌趋势（行情看跌），即 $\mu < 0$，由式（12）可知 $c_3 < 0$．类似于3.1节的分析思路，下面通过命题3～4来讨论最优交易策略．

命题3　若初始持仓 $\eta_0 \leq \eta_0^*$，则对于任意的 $t \in (0, T]$ 都有 $v^*(t) < 0$ 并且成立

性质3－a　若 $\eta_0 < c_3$，则存在 $t^* \in (0, T)$ 使得 $v^*(t^*)$ 为最大交易速度；

性质3－b　若 $\eta_0^* \geq \eta_0 \geq c_3$，则对于任意的

⑨ 此外，还可以证明，如果初始多头持仓充分大，则期初交易速度大于期末交易速度．空头时，也有类似的情形．限于篇幅，这里没有列出证明过程，有兴趣的读者可以向作者索取．

$t\in(0,T)$都有 $v^{*\prime}(t)<0$.

证明　由于 $\mu<0$,则 $\varsigma_3<0$,且当 $\eta_0\leqslant\eta_0^*$时有 $\varsigma_1>0$,并且成立

$$\varsigma_1-\varsigma_2=\frac{(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)^2\varsigma_3-(e^{2\sqrt{\lambda}T}+1)\eta_0}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}\geqslant 0 \tag{21}$$

由式(21)知 $v^*(t)=-\sqrt{\lambda}(\varsigma_1 e^{\sqrt{\lambda}t}-\varsigma_2 e^{-\sqrt{\lambda}t})=-\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}(\varsigma_1 e^{2\sqrt{\lambda}t}-\varsigma_2)<-\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}(\varsigma_1-\varsigma_2)\leqslant 0$

下面证明性质(3－a).不妨令 $v^{*\prime}(t)=0$,由式(14)知当 t^*满足 $e^{2\sqrt{\lambda}t^*}=-\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}$时,$v^*(t^*)$为交易速度的极值.为了保证 $t^*\in(0,T)$,则需证明

$$e^{-2\sqrt{\lambda}T}<-\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}<1 \tag{22}$$

由 $\eta_0<\varsigma_3<0$知 $-\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}=\frac{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\varsigma_3}{\eta_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)\varsigma_3}e^{-2\sqrt{\lambda}T}=(1+\frac{\varsigma_3 e^{\sqrt{\lambda}T}}{\eta_0-\varsigma_3+\varsigma_3 e^{-\sqrt{\lambda}T}})e^{-2\sqrt{\lambda}T}>e^{-2\sqrt{\lambda}T}$,另由于 $\frac{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\varsigma_3}{\eta_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)\varsigma_3}e^{-2\sqrt{\lambda}T}<\frac{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\varsigma_3}{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\varsigma_3}e^{-2\sqrt{\lambda}T}=e^{-2\sqrt{\lambda}T}<1$,故式(22)成立.此外,由于 $\varsigma_1>0$,从而

$v^{*\prime\prime}(t)=-\lambda\sqrt{\lambda}(\varsigma_1 e^{\sqrt{\lambda}t}-\varsigma_2 e^{-\sqrt{\lambda}t})=-\lambda\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}(\varsigma_1 e^{2\sqrt{\lambda}t}-\varsigma_2)<-\lambda\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}(\varsigma_1-\varsigma_2)$

并由式(22)知 $v^{*\prime\prime}(t)<0$,故 $v^*(t^*)$为 $\eta_0<\varsigma_3$时的最大交易速度.

下面证明性质(3－b).若 $\eta_0\geqslant\varsigma_3$,由于 $\eta_0<0$,则 $\varsigma_3<0$,由式(18)可知$\frac{\varsigma_2}{\varsigma_1}\geqslant-1$,且由于 $\varsigma_1>0$,从而 $v^{*\prime}(t)=-\lambda\varsigma_1 e^{\sqrt{\lambda}t}(1+\frac{\varsigma_2}{\varsigma_1}e^{-2\sqrt{\lambda}t})\leqslant-\lambda\varsigma_1 e^{\sqrt{\lambda}t}(1-e^{-2\sqrt{\lambda}t})<0$　证毕.

对命题 3有以下说明,由于 $\mu<0$,则 $\eta_0^*<0$,即当证券行情看跌时,投资者的最优初始持仓应为空头.所以,$\eta_0\leqslant\eta_0^*$表示初始的空头持仓在数量上不低于最优初始持仓(空头时数值越小表示持仓量越大),故应通过买入证券平掉初始持仓,才能下跌行情中获利,从而有 $v^*(t)<0$.性质 3－a的意义是,若投资者初始的空头持仓过量,则应先将头寸尽快调整到最优水平,而后尽可能地在预期买入成本较低的期末阶段平掉空头,故交易速度具有"先递增,后递减"的特征,不妨称之为"∩型"买入策略,如图 2－1所示.性质 3－b表明,若投资者初始持仓为空头且适量,则应尽可能地选择期末阶段买入证券平掉空头,故 $v^{*\prime}(t)<0$,由此形成"递减型"买入策略,如图 2－2所示.

命题 4　若初始持仓 $\eta_0>\eta_0^*$,则有 $v^*(0)>0$,$v^{*\prime}(t)<0$,并且成立

性质 4－a　若 $\eta_0^*<\eta_0<-\frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2\varsigma_3$,则有 $v^*(T)<0$;

性质 4－b　若 $\eta_0\geqslant-\frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2\varsigma_3$,则有 $v^*(T)\geqslant 0$.

证明　当 $\eta_0>\eta_0^*$时,有 $\varsigma_2>0$.令 $t=0$,由式(13)可得 $v^*(0)=-\sqrt{\lambda}(\varsigma_1-\varsigma_2)$,类似于式(20)的分析可知

$$\varsigma_1-\varsigma_2=\frac{(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)^2\varsigma_3-(e^{2\sqrt{\lambda}T}+1)\eta_0}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}<0 \tag{23}$$

故 $v^*(0)>0$.由于 $\varsigma_2>0$,且由式(18)知$\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}>-e^{-2\sqrt{\lambda}T}$,故有

$$\begin{aligned}v^{*\prime}(t)&=-\lambda(\varsigma_1 e^{\sqrt{\lambda}t}+\varsigma_2 e^{-\sqrt{\lambda}t})\\&=-\lambda\varsigma_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}(1+\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}e^{2\sqrt{\lambda}t})<\\&\quad-\lambda\varsigma_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}(1-e^{2\sqrt{\lambda}(t-T)})<0\end{aligned}$$

下面证明性质(4－a)和(4－b).当 $t=T$时,由式(13)可知

$$\begin{aligned}v^*(T)&=-\sqrt{\lambda}(\varsigma_1 e^{\sqrt{\lambda}T}-\varsigma_2 e^{-\sqrt{\lambda}T})\\&=\varsigma_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}T}(1-\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}e^{2\sqrt{\lambda}T})\end{aligned} \tag{24}$$

这里 $1-\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}e^{2\sqrt{\lambda}T}=\frac{2(\eta_0+\frac{e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2}{2}\varsigma_3)}{\eta_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)\varsigma_3}$,由于 $\varsigma_2>0$,故由式(24)容易推断,当 $\eta_0<-\frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2\varsigma_3$时,$v^*(T)<0$;反之,当 $\eta_0\geqslant-\frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}T}(1-e^{-\sqrt{\lambda}T})^2\varsigma_3$时,则有 $v^*(T)\geqslant 0$.证毕.

命题 4的意义,若投资者预期证券行情下跌,但其空头持仓不足或多头持仓,则应先通过卖出证券来形成最优空头持仓,故有 $v^*(0)>0$,加速

度 $v^{*\prime}(t)<0$表示交易策略为递减型. 性质 4－a 表明, 若投资者初始持仓为少量的多头或空头, 应先尽快卖出证券平掉多头并建立空头, 然后尽可能地在期末买入证券($v^*(T)<0$)平仓, 由此构成该情形下先"递减型"卖出, 后"递减型"买入的交易策略, 如图 2－3所示. 性质 4－b表明, 若投资者逆市持有过量的多头仓位, 则整个投资期都需要卖出证券以平掉多头仓位, 故有 $v^*(T)\geqslant 0$, 由此形成"递减型"卖出策略, 如图 2－4所示.

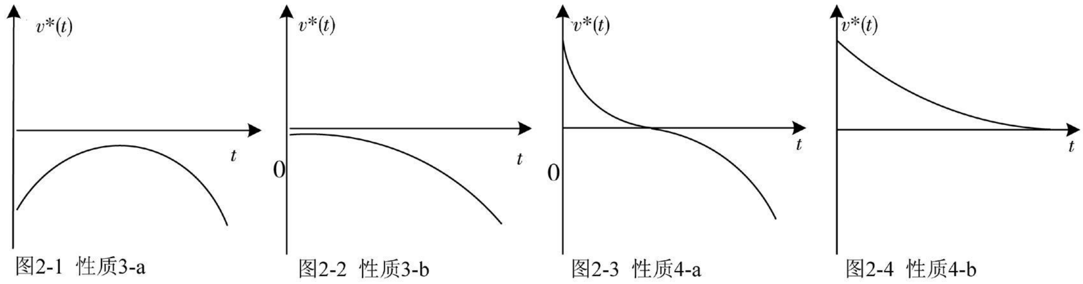

图 2　证券行情看跌时的最优交易策略轨迹

Fig. 2　The optimal trading strategy trajectories in a bearish market

3.3　证券行情看平情形的最优交易策略

若投资者预期证券未来的价格保持不变(行情看平), 即 $\mu=0$, 则有 $c_3=0$, 从而 $\eta_0^*=0$, 因此, $\eta_0>\eta_0^*$ 和 $\eta_0\leqslant\eta_0^*$ 分别等价于 $\eta_0>0$和 $\eta_0\leqslant 0$, 由此构成了命题 5.

命题 5　若 $\mu=0$, 当 $\eta_0>0$时, 有 $v^*(t)>0$, $v^{*\prime}(t)<0$; 当 $\eta_0\leqslant 0$时, 有 $v^*(t)\leqslant 0$, $v^{*\prime}(t)\leqslant 0$.

证明　当 $\eta_0>0$时, $c_1=-\dfrac{\eta_0}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}<0$,

$$c_2=-\frac{\eta_0}{e^{-2\sqrt{\lambda}T}-1}>0,$$ 从而,

$$v^*(t)=-\sqrt{\lambda}(c_1e^{\sqrt{\lambda}t}-c_2e^{-\sqrt{\lambda}t})>0,$$ 且由式(14)可得

$$v^{*\prime}(t)=\lambda\eta_0\Big(\frac{e^{\sqrt{\lambda}t}}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}+\frac{e^{-\sqrt{\lambda}t}}{e^{-2\sqrt{\lambda}T}-1}\Big)$$

$$=\frac{\lambda\eta_0e^{\sqrt{\lambda}t}}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}(1-e^{2\sqrt{\lambda}(T-t)})<0$$

同理可证, 当 $\eta_0\leqslant 0$时, $v^*(t)\leqslant 0$, $v^{*\prime}(t)\geqslant 0$

证毕.

由命题 5可知, 若投资者预期证券未来的价格保持不变, 则空仓为最优持仓. 明显地, 若投资者的初始持仓为多头, 则应尽快卖出证券, 故应采取"递减型"卖出策略, 其示意图可参考图 2－4. 相反地, 若初始持仓为空头, 则应尽快买入证券平仓, 形成"递增型"买入策略, 其示意图可参考图 1－4 不再赘述.

4　流动性对最优交易策略的影响

流动性是投资者制定交易策略的关键变量, 故有必要分析流动性对最优交易策略的影响. 由于最优交易策略 $v^*(t)$的表达式过于复杂, 难以用偏导数方法分析流动性参数 l对交易策略 $v^*(t)$的影响, 故下文以极限方法进行讨论, 并以数值模拟辅助验证.

4.1　流动性对最优交易策略影响的极限分析

命题 6　当 $l\to 0$时, 若 $\mu<0$, 则有 $v^*(0)\to+\infty$; 若 $\mu>0$, 则当 $\eta_0>c_3$时有 $v^*(0)\to+\infty$, $\eta_0<c_3$则有 $v^*(0)\to-\infty$.

证明　$\lim\limits_{l\to 0}v^*(0)=\lim\limits_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}v^*(0)$

$$=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}-\sqrt{\lambda}(c_1-c_2)$$

$$=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}\frac{\sqrt{\lambda}\eta_0+\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)c_3}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}+$$

$$\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}\sqrt{\lambda}\Big[\frac{e^{2\sqrt{\lambda}T}(\eta_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)c_3)}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}\Big]$$

$$=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}(\eta_0-c_3)\sqrt{\lambda}\frac{e^{2\sqrt{\lambda}T}}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}$$

$$=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}(\eta_0-c_3)\sqrt{\lambda}$$

所以, 当 $\mu<0$时, 有 $c_3<0$, 从而 $v^*(0)\to+\infty$. 反之, 当 $\mu>0$时, 有 $c_3>0$, 仅当 $\eta_0>c_3$时有 $v^*(0)\to+\infty$, 当 $\eta_0<c_3$时, 则有 $v^*(0)\to-\infty$.　证毕.

命题 7　当 $l\to 0$时, 若 $\mu>0$, 则 $v^*(T)\to$

$+\infty$, 若 $\mu<0$ 则 $v^*(T)\to-\infty$.

证明　当 $l\to 0$时, $\lambda=\dfrac{\rho\delta_0\sigma^2}{2l}\to+\infty$, 显然有 $\sqrt{\lambda}\to+\infty$, 由式(12)和式(13)得到

$$\lim_{l\to 0}v^*(T)=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}v^*(T)=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}\sqrt{\lambda}\,\frac{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\zeta_3}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}e^{\sqrt{\lambda}T}\left(1+\frac{\eta_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)\zeta_3}{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\zeta_3}\right)$$

因为 $\lim\limits_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}\dfrac{\eta_0+(e^{-\sqrt{\lambda}T}-1)\zeta_3}{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\zeta_3}=0$, 所以

$$\lim_{l\to 0}v^*(T)=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}\sqrt{\lambda}\,\frac{\eta_0+(e^{\sqrt{\lambda}T}-1)\zeta_3}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}e^{\sqrt{\lambda}T}$$

$$=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}\left[(\eta_0-\zeta_3)\frac{\sqrt{\lambda}\,e^{\sqrt{\lambda}T}}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}+\zeta_3\frac{\sqrt{\lambda}\,e^{2\sqrt{\lambda}T}}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}\right]=\lim_{\sqrt{\lambda}\to+\infty}\zeta_3\sqrt{\lambda}$$

由于 μ与 ζ_3同号, 则当 $\mu>0$时, 有 $v^*(T)\to+\infty$, 当 $\mu<0$时, 有 $v^*(T)\to-\infty$.　　证毕.

命题 8　当 $l\to+\infty$时, $v^*(t)\to\dfrac{\eta_0}{T}$

$$\lim_{l\to+\infty}v^*(t)=\lim_{\sqrt{\lambda}\to 0}v^*(t)=\lim_{\sqrt{\lambda}\to 0}\left(\frac{\eta_0\sqrt{\lambda}}{e^{2\sqrt{\lambda}T}-1}-\frac{\eta_0\sqrt{\lambda}}{e^{-2\sqrt{\lambda}T}-1}\right)=\frac{\eta}{2T}+\frac{\eta}{2T}=\frac{\eta_0}{T}$$

命题 6和命题 7表明, 若流动性无限好, 则证券交易要么在期初, 要么在期末, 且交易速度趋于无穷, 这也正呼应了理想化市场、无摩擦条件下瞬间交易的性质. 命题 8表明, 如果证券的流动性很差, 则最优交易策略为匀速交易.

4.2　流动性对最优交易策略影响的数值分析

为了进一步讨论流动性参数对最优交易策略的影响, 下文将由表 1设置的参数值, 进行最优交易策略的数值模拟. 不妨将初始持仓设置为空仓, 由此可观察投资者从建仓、持有再到平仓的整个交易过程中流动性对交易策略的影响.

表 1　最优交易策略数值模拟的参数设置

Table 1　Parameters setting for the numerical simulation of optimal trading strategy

期初价格	50元	目标投资期限	0.04年（10个交易日）
初始持仓	0	（年化）波动率	0.5
风险规避系数	10^{-6}	（年化）收益率	0.15或 −0.15
流动性参数	10^4（流动性极差）、4×10^{-10}（流动性正常）、4×10^{-12}（流动性较好）		
模拟步长	0.000 01年		

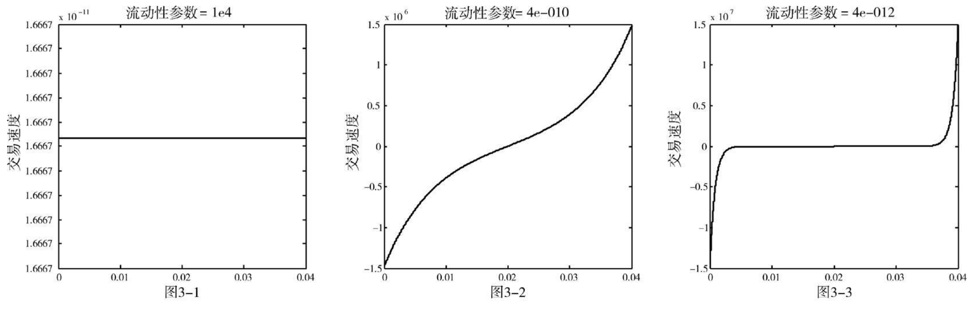

图 3　证券行情看涨（$\mu=0.15$），流动性对最优交易策略的影响

Fig.3　The effect of liquidity on the optimal trading strategy in a bullish market ($\mu=0.15$)

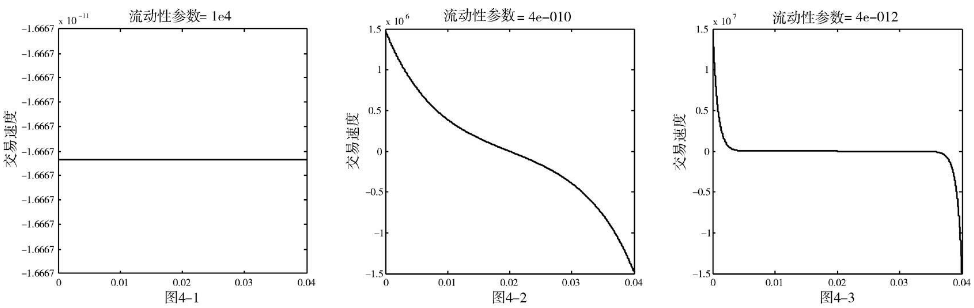

图 4　证券行情看跌（$\mu=-0.15$），流动性对最优交易策略的影响

Fig.4　The effect of liquidity on the optimal trading strategy in a bearish market ($\mu=0.15$)

由图 3－1和图 4－1可知, 如果证券的流动性很差, 则匀速交易为最优交易策略 (命题 8). 由于数值模拟是在空仓的条件下进行的, 故图 3－2和图 4－2类似于图 1－3和图 2－3, 由此就验证了性质 2－a和性质 4－a. 由图 3－3可知, 若证券行情看涨, 则当证券流动性无限好时, 有 $v^{*}(0)\to-\infty$, $v^{*}(T)\to+\infty$, 另由图 4－3可知, 若证券行情看跌, 则当证券的流动性无限好时, 有 $v(0)\to+\infty$, $v^{*}(T)\to-\infty$, 由此命题 6和命题 7得到验证. 此外, 上文提及的所有命题都可以由数值模拟得到验证, 限于篇幅不再赘述⑩

流动性对交易策略执行过程的影响. 若证券流动性充分好, 在行情看涨时, 投资者可在期初阶段快速买入证券建仓, 并在期末阶段迅速卖出证券平仓, 如图 3－3所示; 在行情看跌时, 允许投资者迅速卖空证券, 并在期末快速买入证券平仓, 如图 4－3所示. 这说明, 随着流动性的提高, 建仓操作越集中于期初, 而平仓操作则集中于期末, 导致持仓不交易的阶段在整个投资期内相对增加. 相反地, 若证券缺乏流动性, 则投资者建仓和平仓的速度下降, 证券买卖过程相应延长, 平均持仓时间缩短. 从持仓量来看, 由式 (11) 和式 (16) 可知, 流动性改善还使投资者有机会逼近理想的最优初始持仓 3, c 这将提高建仓、持有和平仓的证券数量, 从而使交易策略在一个更高的持仓水平上得到执行, 更有利于投资者把握投资机会.

5 结束语

在流动性非完美的条件下, 本文以均值 －方差效用函数构建最优交易策略模型并得到解析解, 证明了不同行情、任意初始持仓条件下最优交易策略的性质. 本文的研究表明

(1)在证券行情看涨时, 若初始持仓为多头且超过理想的最优初始持仓, 投资者应采取 "U型" 卖出策略, 其他情形可归结为 "递增型" 买入、卖出或混合策略. 具体地, 若初始持仓多头且适量, 则应采取 "递增型" 卖出策略; 若初始持仓为较少的多头或空头, 则最优交易策略为先 "递增型" 买入, 而后 "递增型" 卖出; 若投资者逆市持有过量的空头, 则应采取 "递增型" 买入策略.

(2)在证券行情看跌时, 最优交易策略则与看涨情形具有完全相反的结果. 若初始持仓为空头且超过理想的最优初始持仓, 投资者应采取 "∩型" 买入策略, 其他情形可总结为 "递减型" 买入、卖出或混合策略. 具体地, 若初始持仓空头且适量, 则应采取 "递减型" 买入策略; 若初始持仓为较少的空头或多头, 则最优交易策略为 "递减型" 卖出, 而后 "递减型" 买入; 若投资者逆市持有过量的多头, 则应采取 "递减型" 卖出策略.

(3)在证券行情看平时, 空仓为最优初始持仓, 所以, 若初始持仓为多头, 则应采取 "递减型" 卖出策略, 若初始持仓为空头, 则为 "递增型" 买入策略.

(4)流动性对交易策略的影响. 随着证券的流动性提高, 投资者的交易速度递增, 所以建仓和平仓的时间缩短, 持仓时间增加, 并使交易策略在更高的持仓水平上得到执行, 从而有利于投资者把握投资机会.

参 考 文 献:

[1] Chan L, Lakonishok J. The behavior of stock price around institutional trades[J]. Journal of Finance, 1995, 50(4): 1147－1174

[2] Amihud Y, Mendelson H. Liquidity and the cost of capital: Implications for corporate management[J]. Journal of Applied Corporate Finance, 1989, 2(3): 65－73

[3] Kyle A S. Continuous auctions and insider trading[J]. Econometrica, 1985, 53(6): 1315－1335.

[4] Stoll H R. Inferring the components of the Bid-ask spread: Theory and empirical tests[J]. Journal of Finance, 1989, 44(1): 115－134.

⑩ 有兴趣的读者可自行验证, 也可向作者索取数值模拟的 MATLAB程序代码.

[5] Amihud Y. Illiquidity and stock returns: Cross-section and time-series effects[J]. Journal of Financial Markets, 2002, 5(1): 31—56.

[6] Amihud Y, Mendelson H. Asset pricing and the bid-ask spread[J]. Journal of Financial Economics, 1986, 17(2): 223—249.

[7] Acharya V V, Pedersen L H. Asset pricing with liquidity risk[J]. Journal of Financial Economics, 2005, 77(2): 375—410.

[8] Korajczyk R A, Sadka R. Pricing the commonality across alternative measures of liquidity[J]. Journal of Financial Economics, 2008, 87(1): 45—72.

[9] Hasbrouck J. Trading costs and returns for U.S. equities: Estimating effective costs from daily data[J]. Journal of Finance, 2009, 64(3): 1445—1477.

[10] 吴文锋，芮　萌，陈工孟．中国股票收益的非流动性补偿[J]．世界经济，2003，(7): 54—60.
Wu Wenfeng, Rui Meng, Cheng Gongmeng. The illiquidity premiums of Chinese stock return[J]. The Journal of World Economy, 2003, (7): 54—60. (in Chinese)

[11] 苏冬蔚，麦元勋．流动性与资产定价：基于我国股市资产换手率与预期收益的实证研究[J]．经济研究，2004，(2): 95—105.
Su Dongwei, Mai Yuanxun. Liquidity and asset pricing: An empirical exploration of turnover and expected returns on Chinese stock markets[J]. Economic Research Journal, 2004, (2): 95—105. (in Chinese)

[12] 黄　峰，杨朝军．流动性风险与股票定价：来自我国股市的经验证据[J]．管理世界，2007，(5): 30—39.
Huang Feng, Yang Chaojun. Liquidity Risk and stock pricing: Empirical evidence from Chinese Stock Market[J]. Management World, 2007, (5): 30—30. (in Chinese)

[13] 邹小芃，黄　峰，杨朝军．流动性风险、投资者流动性需求与资产定价[J]．管理科学学报，2009，12(6): 139—149.
Zou Xiaopeng, Huang Feng, Yang Chao-jun. Liquidity risk, liquidity demand of investors and asset pricing[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(6): 139—149. (in Chinese)

[14] Bertsimas D, Lo A W. Optimal control of execution costs[J]. Journal of Financial Markets, 1998, 1(1): 1—50.

[15] Almgren R, Chriss N. Optimal execution of portfolio transactions[J]. Journal of Risk, 2000, 3(2): 5—39.

[16] Almgren R. Optimal execution with nonlinear impact functions and trading-enhanced risk[J]. Applied Mathematical Finance, 2003, 10(1): 1—18.

[17] Hisata Y, Yamai Y. Research toward the practical application of liquidity risk evaluation methods[J]. Monetary and Economic Studies, 2000, 18(2), 83—127.

[18] Dubil R. How to include liquidity in a market var statistic[J]. Journal of Applied Finance, 2003, 13(1): 19—28.

[19] Perry M, Zhang Q, Ying G. Liquidation of a large block of stock[J]. Journal of Banking and Finance, 2007, 31(5): 1295—1305.

[20] Ting C, Warachkaa M, Zhao Y G. Optimal liquidation strategies and their implications[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2007, 31(4): 1431—1450.

[21] Monch B. Liquidating large security positions strategically: A pragmatic and empirical approach[J]. Financial Markets and Portfolio Management, 2009, 23(2): 157—186.

[22] 仲黎明，刘海龙，吴冲锋．机构投资者的最优变现策略[J]．管理科学学报，2002，5(5): 18—22.
Zhong Liming, Liu Hailong, Wu Chongfeng. Institution investors' optimal liquidation strategy[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(5): 18—22. (in Chinese)

[23] 刘海龙，吴冲锋，仲黎明．开放式基金的最优变现策略[J]．管理工程学报，2003，17(2): 106—108.
Liu Hailong, Wu Chongfeng, Zhong Liming. Optimal liquidation strategy of the open-end fund[J]. Journal of Industrial Engineering Management, 2003, 17(2): 106—108. (in Chinese)

[24] 郭福华，邓飞其．期望未来损失约束下的最优投资问题[J]．管理科学学报，2009，12(2): 54—59.

Guo Fuhua, Deng Feiqi. Optimal investment problem under constraint of expected future loss[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(2): 54－59. (in Chinese)

[25] (美)阿维纳什·迪克西特, 罗伯特·平迪克. 不确定条件下的投资[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2002: 55－87.

Dixit K A, Pindyck R S. Investment Under Uncertainty[M]. Beijing: Princton University Press, 2002: 55－87. (in Chinese)

[26] Osborne M F M. Brownian motion in the stock market[J]. Operations Research, 1959, 7(2): 145－173.

[27] Samuelson P A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly[J]. Industrial Management Review, 1965, 6(2): 41－49.

[28] Fama E F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work[J]. Journal of Finance, 1970, 25(2): 383－417.

[29] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. The Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637－659.

[30] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1－2): 125－144.

Study on liquidity-adjusted optimal trading strategy model

LIN Hui, ZHANG Di-xin, YANG Hao, DING Yi

School of Business, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Abstract: By relaxing the hypothesis of Idealized Market, this paper presents the model of Liquidity-adjusted optimal trading strategy, and proves the characteristic about optimal trading strategies under the condition of different market and optional initial holding. The research indicates that when the market is bullish, traders would take U-shaped selling strategy while initial holding is excessive. Incremental buying strategy may be adopted for appropriate optimal initial holding. If initial holding amount is less at either long or short position, optimal trading strategy is that first incremental buying and then incremental selling. When traders hold excessive amount at short position against bullish market, they would take incremental buying strategy. However, the optimal strategies in bearish market address reverse outcomes that in bullish market. If market is neutral, the optimal strategy is degressive selling or incremental buying strategy. Lastly, this paper analyses how liquidity affects optimal trading strategy.

Key words: liquidity; efficient market; optimal trading strategy