最小化破产概率的最优投资①

罗　琰[1,2], 杨招军[2]
(1. 南京审计学院数学与统计学院, 南京 210075; 2. 湖南大学金融与统计学院, 长沙 410079)

摘要: 本文研究基于最小化破产概率准则的最优投资问题. 不同于 Merton问题中消费是内生决策变量, 本文假设投资者单位时间内必须消费不少于一个固定数量的财富, 因而投资者有可能最终破产. 在三类不同存贷约束条件下, 通过求解模型相对应的 Hamilton-Jacobi-Bellmen (HJB)方程, 都获得了最优投资策略及最优值函数 (破产概率)的闭式解. 结果表明, 最优投资策略为财富的分段线性函数, 而存贷约束特别是不允许贷款约束增加了投资者的破产风险.

关键词: 破产概率; 随机控制; 存贷约束; Hamilton-Jacobi-Bellmen方程.
中图分类号: F275; F830.2　文献标识码: A　文章编号: 1007－9807(2011)05－0077－09

0 引　言

投资、出口、消费是拉动经济增长的"三驾马车". 但是, 要实现经济平稳较快增长, 不同时期"三驾马车"如何协调发展是至关重要的. 而在经济生活中, 经济个体同样要面临如何投资消费决策问题, 即现有财富多少用于消费, 消费后剩余财富又该如何在金融市场中投资. 站在微观经济学角度, 最优消费一投资组合选择问题早已引起人们的广泛兴趣, 时至今日仍然是研究的热点. 连续时间最优消费一投资问题的经典分析方法是随机动态规划, 这方面的开创性工作属于 Merton[1-2]. Merton在完全市场中, 假设票价格过程服从几何布朗运动, 无红利支付, 无非资本利得, 投资者效用函数为双曲绝对风险厌恶函数 (HARA)等条件下, 运用随机动态规划方法解决了两类连续时间最优消费一投资组合选择问题. 之后, 许多学者从不同的视角对 Merton问题进行拓展, 如考虑交易费用[3]、随机收入[4]、借贷约束[5-7]、部分信息[8]、存贷利差[9-10]等条件, 取得了丰硕的研究成果. 经典的最优投资消费策略研究准则可以分为三大类, 即最大化终止时刻期望财富效用, 最大化生命期消费效用以及这最大化这两种效用的叠加, 而考虑最小化破产概率准则或最大化生存概率准则下的最优投资策略问题则从另一个视角极大的丰富了经典投资消费问题的研究. 一般情形下最小化破产概率准则或最大化生存概率准则与最大化终止时刻期望财富效用准则下的最优投资策略并非完全一致, 只有在少数特殊情形下才是无区别的, 而且破产概率准则是一种内在客观的标准, 独立于任何特殊个体的效用函数偏好, 是对效用最大化准则的完善. Browne[11-12] 在这方面取得了突破性的进展, 他所利用的数学工具是随机分析以及随机控制理论.

文献 [11] 研究了具有随机风险公司的最大化生存概率以及最大化终止时刻期望指数效用问题, 文献 [13] 也研究了基于存贷利差情形具有随机风险过程企业最优投资问题. 文献 [6] 研究了借贷约束下具有随机风险公司最大化生存概率的投资策略. 上述三模型的结论只适合于非完备市

① 收稿日期: 2008－08－04; 修订日期: 2011－02－18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70971037); 教育部人文社会科学研究一般资助项目 (09YJC790151); 教育部博士点基金资助项目 (20100161110022); 南京审计学院青年课题资助项目 (NSK2009/C06).
作者简介: 罗　琰 (1979－), 男, 湖南郴州人, 讲师, 博士生. Email: postgraduate@126.com

场中具有随机风险公司的投资问题. 文献 [12]研究了具有固定债务的公司最大化生存策略. 文献 [9]研究了基于存贷利差情形的公司最优生存策略, 文献 [10]研究了不同存贷利率下极大化终止时刻期望效用最优投资策略. 文献 [9]、[10]、[12]中的模型结论既适用于企业投资者也适用于个体投资者. 文献 [14]及 [15]考虑个体投资者具有有限生命期的特点, 基于最小化破产概率准则, 研究了投资者死亡前的投资问题. 文献 [14]研究了无约束情形下的最小化破产概率最优投资问题, 文献 [15]则进一步研究了具有借贷约束情形下的最小化破产概率最优投资问题, 显然上述两文献的模型并不适合企业投资者, 对于企业投资者死亡与破产可以归结为同一个概念.

本文研究最小化破产概率准则下的投资策略问题. 不同于文献 [14]及 [15], 本文模型并没有个体投资者死亡的约束, 模型的结论不仅可以适用于企业投资者, 同时也适用于个体投资者. 假设投资者收益仅来自投资收益而无非资本利得, 而破产风险仅来源外生线性消费, 即投资者除单位时间内需支付一个固定数量资金外, 还要支付与当前财富成固定比例的资金, 用以偿付债务、消费或支付红利 (如保险公司某些投资连结产品承诺的最低分红以及与投资绩效相挂钩的比例收益分配). 常数消费率意味着无论投资者拥有多少财富, 单位时间内必须消费固定数额资金, 显然若消费率是财富的线性函数, 对个体投资者来说更为贴切, 即体现了投资者的基本消费需求, 又体现了投资者随着财富增多而消费增多的一般行为倾向. 若假设与财富成比例消费率则忽略了投资者最低消费需求实际, 而且此时无最低消费约束, 投资者将永不发生破产. 因此无论投资者当前财富是多少, 单位时间内都有一个最低支付, 从而存在一个正概率使投资者财富减少为零, 即面临破产. 然而文献 [14]及 [15]考虑的是固定消费额或者成比例消费率. 在具有收入流条件下文献 [14]也提到如何将成比例消费率化为线性消费, 但未做详细论述, 不过若没有收入流, 成比例消费模式下破产问题是永不发生的. 而文献 [15]成比例消费模式下的破产定义为财富减少到一个预定 (必须大于零)水平, 与本文研究的破产概念显然不同.

为避免破产, 投资者可以到金融市场中投资以获得至少满足消费需求的收益. 风险资产与无风险资产的最优投资比例自然成为研究的主题, 联系到现行经济体制实际, 这又涉及到是否允许卖空风险资产, 是否允许贷款投资于风险资产以及存款利率和贷款利率不同的现实. 本文基于最小化破产概率准则, 研究了三类情形下的最优投资策略问题, 1)允许贷款投资风险资产, 且存贷利率相同, 2)不允许贷款投资风险资产, 3)允许贷款投资风险资产, 但是贷款利率高于存款利率.

一般解决连续时间跨期最优消费–投资决策问题历来有两种方法, 即传统的随机最优控制方法及鞅方法[16]. 鉴于在市场不完备或有市场摩擦 (如本文的借贷约束)的条件下, 鞅方法不如随机控制方法有效、以及本文描述系统动态变化规律的过程具有马氏性, 本文与上述文献一样, 运用经典的随机最优控制方法研究最优投资问题. 但是, 不同于通常的最大化终止时刻期望效用准则, 本文的最优目标函数及最优投资策略与时间无关, 故可以将模型相应的 HJB方程转化为一个二阶常微分方程, 进而获得了最优投资策略及最优值函数 (破产概率)的闭式解. 余下内容安排如下, 第二节阐述了下最小化破产概率的投资问题以及相应值函数所满足的 HJB方程, 给出了无约束条件下的最优投资策略及最小化破产概率的闭式解. 第三节考虑了借贷约束情形而第四节考虑了存贷利差情形, 都得到了最优投资策略及最值函数的闭式解. 第五节对模型及结论给出理论分析、数值算例及经济解释. 第六节是全文的结束.

1 允许贷款情形下的最优投资策略

设投资者可以投资一种风险资产 (股票)和一种无风险资产 (银行存/贷款), 其中风险资产在 t时刻的价格 $P(t)$服从几何布朗运动

$$\begin{cases} dP(t) = \mu P(t)\,dt + \sigma P(t)\,dW(t), & t \geqslant 0 \\ P(0) = p_0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 μ, $\sigma > 0$为常量, $\{W(t): t \geqslant 0\}$为定义在概率空间 (Ω, F, P)上 F_t适应的标准 Brown运动, 这里 F_t是自然域流 $F_t^W = \sigma\{W(s); 0 \leqslant s \leqslant t\}$关

于 P的完备化.

无风险资产在 t时刻的价格 $b(t)$服从如下微分方程

$$\begin{cases} db(t) = rb(t)\,dt & t \geqslant 0 \\ b(0) = b_0 \end{cases} \tag{2}$$

这里 $0 < r < \mu$为常量.

设 $\pi(t)$为 t时刻投资在风险资产上的财富②, 若一个投资策略 $\{\pi(t), t \geqslant 0\}$是可行的, 必须满足 1) $\{\pi(t), t \geqslant 0\}$是可测的 F_t适应过程, 2) 对于任意 $t < \infty$, $E[\int_0^t \pi^2(t)\,dt] < \infty$几乎处处成立. 这里, 条件 1)意味着投资者只能依据现有的信息决策, 投资者没有“先知先觉”功能, 不能准确预测未来价格的变化; 条件 2)的经济意义是投资者不能“恶意透支”[10]. 记投资者所有可行策略集合为 Π.

设 $\{x(t), t \geqslant 0\}$表示在可行策略 $\pi \in \Pi$限制下投资者的财富过程. 假定投资者具有财富依赖型的支付率 (消费), 即 $c(x) = c + \theta x$. 对企业而言, 这里 $c > 0$可以解释为满足正常运营需求的最低支付, $0 \leqslant \theta < r$表示随财富增加而增加的支付比例 (如分红, 奖金支出). 对个体投资者而言, $c > 0$是为满足生存必需的最低消费 (如每日三餐), 而且随着财富的增加消费也将随之增加. 所以, 投资者在 t时刻的财富过程满足如下受控扩散过程

$$dx(t) = \pi(t)\,dP(t)/P(t) + (x(t) - \pi(t))\,db(t)/b(t) - (c + \theta x(t))\,dt$$

进而可表述为

$$\begin{cases} dx(t) = [(r-\theta)x(t) + \pi(t)(\mu - r) - c]\,dt + \pi(t)\sigma\,dw(t); \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

易知, 当投资者的初始财富 $x(0) = x \geqslant c/(r-\theta)$时, 投资者可以从 Π中选择这样的策略, 把所有财富购买无风险资产, 即 $\pi(t) = 0$, 此时 $dx(t) = ((r-\theta)x(t) - c)\,dt$显然

$$x(t) = (x - c/(r-\theta))e^{(r-\theta)t} + c/(r-\theta) \geqslant c/(r-\theta) > 0$$

即财富在任何时刻都不可能为零, 可确保永不破产, 故只讨论初始财富 $0 < x < c/(r-\theta)$时最小化破产概率的最优投资策略.

定义投资者的破产时刻为, $T = \inf\{t > 0 : x(t) = 0\}$, 即剩余财富第一次为零时破产即发生. 于是投资者最小化破产概率的最优投资策略为如下随机控制问题

$$\inf_{\pi \in \Pi} P_x(\tau < \infty)$$

其中 $0 < x < c/(r-\theta)$为投资者初始财富, 投资者 t时刻的财富 $x(t)$满足式 (3).

记值函数

$$V(x) = \inf_{\pi \in \Pi} P_x(\tau < \infty) \tag{4}$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2$$

则有如下结论

定理 1　在任意时刻 t $(0 \leqslant t \leqslant T)$, 投资者基于最小化破产概率的最优投资策略为

$$\pi^*(x) = \frac{2(r-\theta)}{\mu - r}\left(\frac{c}{r-\theta} - x\right) \tag{5}$$

最优目标值函数为

$$V(x) = \left(1 - \frac{r-\theta}{c}x\right)^{\frac{r}{r-\theta}+1} \tag{6}$$

证明　取 $g = 0$, $h(0) = 1$, $h\left(\frac{c}{r-\theta}\right) = 0$于是有

$$V(x) = \inf_{\pi \in \Pi} M_x\left\{\int_0^\tau g[x(t)]\,dt + h[x(\tau)]\right\}$$

既然值函数 $V(x)$独立于时间参数, 于是利用文献 [17] 定理 1.4.5的结果, 可得最优策略满足如下 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程

$$\inf_{\pi \in \Pi}\left\{[rx + (\mu - r)\pi - (c + \theta x)]V_x + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 V_{xx}\right\} = 0 \tag{7}$$

先设式 (7)有解, 使得 $V_x < 0$, $V_{xx} > 0$恒成立. 由一阶条件, 易求最优投资策略满足

$$\pi^* = -\frac{(\mu - r)V_x}{\sigma^2 V_{xx}} \tag{8}$$

将式 (8)带入式 (7)并整理得

② 在经典投资－消费问题中[1,5,18], $x(t)$严格说是剔除 t时刻消费 (支出)以后投资者拥有的净财富, 故 t时刻投资在无风险资产上的财富为 $x(t) - \pi(t)$; 若 $x(t)$是 t时刻消费前的财富, 则无风险资产的投资额度是 $x(t) - (c + \theta x(t)) - \pi(t)$. 为方便, 同经典投资－消费问题, 本文假定 $x(t)$是在剔除消费后的净财富.

$$[(r-\theta)x-c]V_x-r\frac{V_x^2}{V_{xx}}=0 \tag{9}$$

这是一个普通的二阶非线性常微分方程，不难解得

$$V(x)=c_1-c_2(c-(r-\theta)x)^{\frac{r}{r-\theta}+1} \tag{10}$$

这里 c_1，c_2 是待定常数. 从值函数定义可知边界条件 $V(0)=1$，$V(c/(r-\theta))=0$，于是可得

$$c_1=0,\ c_2=-c^{-\frac{r}{r-\theta}-1} \tag{11}$$

将式（11）代入式（10）得 $V(x)=(1-\frac{(r-\theta)x}{c})^{\frac{r}{r-\theta}+1}$ 即为最优值函数式（6）. 将式（6）代入式（8）即可得最优投资策略式（5）. 由式（6）易知值函数 $V(x)$ 满足 $V_x<0$，$V_{xx}>0$，即前述的假设条件成立.

最后，同文 [12]，不难验证值函数二次连续可微性，且有 V_x^2/V_{xx} 及 V_x 在区间 $(0, c/(r-\theta))$ 上有界，V_x^2/V_{xx} 是局部 Lipschitz 连续的，所以定理 1 的中的 π^* 及 $V(x)$ 确为所求最优策略和最优目标值函数. 证毕.

2 不允许贷款情形下的最优投资策略

本节考虑不允许贷款情形下的最优投资问题，即不允许投资者贷款投资于风险资产. 事实上，在金融市场上不是所有投资者都能无限制的得到银行的借款，而且政府为稳定金融市场一般都严禁投资者从银行借款投资股票市场，而只能用自有资金投资股票市场. 虽然，国内 A股市场已经推出了融资融券业务，但对绝大多数普通投资者来说，融资并非随心所欲，而是有门槛的. 所以，考虑不允许贷款投资股市情形下的投资问题仍然有重要意义. 此时，最优投资策略必须满足 $0\leqslant\pi\leqslant x$. 从上一节允许贷款情形下的投资策略问题表明，可以分别考虑两种情形，1）最优投资额 $\pi\leqslant x$ 以及 2）最优投资额 $\pi>x$，即考虑 1）$0<x<l$ 以及 2）$l\leqslant x\leqslant c/(r-\theta)$，此处 $l=2c/(\mu+r-2\theta)$. 从上一节易知，当 $l\leqslant x<c/(r-\theta)$ 时，最优投资策略是 $l\triangleq\pi^*=2[c/(r-\theta)-x](r-\theta)/(\mu-r)$，现在要确定的只是当 $0<x<l$ 时的最优投资策略. 以下记值函数

$$P(x)=\inf_{\pi\in\Pi}P_x(\tau<\infty)$$

$$G(x)=x^{-\frac{2(\mu-\theta)}{\sigma^2}}e^{-\frac{2c}{\sigma^2x}},\ Q(x)=[\int_0^x G(t)\,dt+\frac{G(x)}{r+r-\theta}(c-(r-\theta)x)]^{-1}$$

定理 2 不允许借款情形下，在任意时刻 $t(0\leqslant t\leqslant T)$，投资者基于最小化破产概率的最优投资策略为

$$\pi_1^*(x)=\min\{x,l\}=\begin{cases}x & 0<x<l\\ l & l\leqslant x<\dfrac{c}{r-\theta}\end{cases} \tag{12}$$

最优目标值函数为

$$P(x)=\begin{cases}1-Q(l)\int_0^x G(t)\,dt & 0<x<l\\ \dfrac{Q(l)G(l)(c-(r-\theta)l)}{g+r-q}\left(\dfrac{c-(r-\theta)x}{c-(r-\theta)l}\right)^{\frac{r}{r-\theta}+1} & l\leqslant x<\dfrac{c}{r-\theta}\end{cases} \tag{13}$$

证明 同定理 1，此时最优策略满足如下 HJB方程

$$\inf_{0\leqslant\pi\leqslant x}\{[rx+(\mu-r)\pi-(c+\theta x)]P_x+\frac{1}{2}\sigma^2\pi^2P_{xx}\}=0 \tag{14}$$

边界条件仍然是 $P(0)=1$，$P(c/(r-\theta))=0$. 对于 $x\geqslant l$，不受贷款约束的最优投资策略是可行的，此时最优投资策略满足的 HJB方程为

$$[(r-\theta)x-c]P_x-r\frac{P_x^2}{P_{xx}}=0,\ l\leqslant x\leqslant\frac{c}{r-\theta} \tag{15}$$

边界条件为 $P(c/(r-\theta))=0$.

唯一的问题是当 $0<x<l$ 时的最优投资策略. 参考文献 [11]，猜想此时的最优投资策略是简单的把所有的财富 x 投入风险资产，所以有 $\pi_1^*(x)=\min\{x,l\}$. 如果猜测是正确的，则此时的最优值函数满足

$$(x(\mu-\theta)-c)P_x+\frac{1}{2}x^2\sigma^2P_{xx}=0,\ 0<x<l \tag{16}$$

边界条件为 $P(0)=1$. 而且，值函数还必须满足

平滑粘性条件（smooth pasting conditions）[17]，即值函数在临界点 l 必须是二次连续可微的，即

$$P(l-)=P(l+) \tag{17}$$

$$P_x(l-)=P_x(l+) \tag{18}$$

$$P_{xx}(l-)=P_{xx}(l+) \tag{19}$$

若能找到一个值函数满足条件（15）（16）以及边界条件和所有平滑粘性条件，则值函数为随机控制问题的经典解.

由式（16）解得

$$P(x)=q\int_0^x G(t)\,dt+p$$

这里

$$G(t)=t^{\frac{2(\mu-\theta)}{\sigma^2}}e^{\frac{2c}{\sigma^2 t}}$$

其中 p，q 是待定常数. 又由 $P(0)=1$ 可得 $p=1$. 所以有

$$P(x)=q\int_0^x G(t)\,dt+1,\quad 0<x<l \tag{20}$$

由式（15）解得

$$P(x)=a-b(c-(r-\theta)x)^{\frac{r}{r-\theta}+1}$$

其中 a，b 是待定常数. 又由 $P(c/(r-\theta))=0$ 可得 $a=0$. 所以有

$$P(x)=-b(c-(r-\theta)x)^{\frac{r}{r-\theta}+1},$$

$$l\leqslant x<\frac{c}{r-\theta} \tag{21}$$

为确定两个常数 q 和 b 要利用平滑粘性条件. 由式（17）—式（21）可得

$$q\int_0^l G(t)\,dt+1=-b(c-(r-\theta)l)^{\frac{r}{r-\theta}+1} \tag{22}$$

$$qG(l)=b(r+r-\theta)(c-(r-\theta)l)^{\frac{r}{r-\theta}} \tag{23}$$

$$qG'(l)=-br(r+r-\theta)(c-(r-\theta)l)^{\frac{r}{r-\theta}-1} \tag{24}$$

由式（23）有

$$b=\frac{qG(l)}{r+r-\theta}(c-(r-\theta)l)^{-\frac{r}{r-\theta}} \tag{25}$$

把式（25）代入式（22）有

$$q\int_0^l G(t)\,dt+1=-\frac{qG(l)}{r+r-\theta}(c-(r-\theta)l)\Rightarrow q=-Q(l) \tag{26}$$

把式（25）（26）代入式（20）（21）即得值函数式（13）. 最后要确认条件式（24）能满足. 要证明

$$qG'(l)=-br(r+r-\theta)(c-(r-\theta)l)^{\frac{r}{r-\theta}-1}$$

即证

$$qG'(l)=-\frac{qG(l)}{r+r-\theta}(c-(r-\theta)l)^{\frac{r}{r-\theta}}$$

$$r(r+r-\theta)(c-(r-\theta)l)^{\frac{r}{r-\theta}-1}\Leftrightarrow$$

$$G'(l)=-G(l)r(c-(r-\theta)l)^{-1}\Leftrightarrow$$

$$G'(l)=G(l)\frac{r}{(r-\theta)l-c}\Leftrightarrow$$

$$\frac{(r-\theta)l-c}{r}\left(\frac{2c}{\sigma^2 l^2}-\frac{2(m-\theta)}{\sigma^2 l}\right)=1 \tag{27}$$

将

$$l=\frac{2c}{\mu+r-2\theta},\quad r=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2$$

代入式（27），易证式（27）恒成立. 至此，所有条件都满足.　　证毕.

3　存贷利差情形下的最优投资策略

本节假设投资者既可以贷款也可以存款，考虑存贷利差下基于最小化破产概率的投资策略. 贷款利率 R 高于存款利率 r，且有 $m>R>r>0$. 事实上，现实金融市场中存贷利差是普遍存在的，并且风险资产的回报率要高于无风险资产的收益率才能吸引投资者，否则风险资产将无人问津，所以这样的假设更符合实际. 同时，投资者还可以投资于风险资产，其价格过程满足式（1）. 设 $X(t)$，$\pi(t)$，$\xi(t)$，$\zeta(t)$ 分别为投资者 t 时刻的财富净额，风险投资额，贷款额（含利息）以及存款额（含利息）. 此时投资者的财富 $X(t)$ 满足如下受控扩散过程

$$dX(t)=[(r-\theta)X(t)+\pi(t)(\mu-r)-\xi(t)(R-r)-c]dt+\pi(t)\sigma\,dW(t) \tag{28}$$

记值函数

$$F(x)=\inf_{\pi\in\Pi}P_x(\tau<\infty),$$

$s=\dfrac{2c}{\mu+R-2\theta}$，$m=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu-R}{\sigma}\right)^2$，$M=(c-(R-\theta)l)^{\frac{m}{R-\theta}+1}-(c-s(R-\theta))^{\frac{m}{R-\theta}+1}$，$N=\int_s^l G(t)\,dt$，$C=(m+R-\theta)(c-(R-\theta)s)^{\frac{m}{R-\theta}}$，$D=(r+r-\theta)(c-(r-\theta)l)^{\frac{r}{r-\theta}}$，

$K_5 = -\left[N + \frac{G(s)M}{C} + G(l)\frac{c-(r-\theta)l}{\tau + r - \theta}\right]^{-1}$，$K_4 = \frac{G(l)}{D}K_5$，$K_2 = \frac{G(s)}{C}K_5$，$K_6 = 1 + M\frac{G(s)}{C}K_5$.

定理 3 存贷利差情形下，在任意时刻 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$，投资者基于最小化破产概率的最优投资策略为

$$\pi_2^*(x) = \begin{cases} \frac{2(R-\theta)}{\mu - R}\left(\frac{c}{R-\theta} - x\right) & 0 < x < s \\ x & s \leqslant x \leqslant l \\ \frac{2(r-\theta)}{\mu - r}\left(\frac{c}{r-\theta} - x\right) & l < x < \frac{c}{r-\theta} \end{cases} \tag{29}$$

$$\xi^*(x) = \max(0, \pi_2^*(x) - x)$$

$$\zeta^*(x) = \xi^* - \pi_2^* + x$$

最优目标值函数为

1）当 $x < s$ 时，

$$F(x) = 1 + K_2\left[c^{\frac{m}{R-\theta}+1} - (c-(R-\theta)x)^{\frac{m}{R-\theta}+1}\right] \tag{30}$$

2）当 $x > l$ 时

$$F(x) = -K_4(c-(r-\theta)x)^{\frac{r}{r-\theta}+1} \tag{31}$$

3）当 $s \leqslant x \leqslant l$ 时

$$F(x) = K_5\int_{2c/(\mu+R-2\theta)}^{x} G(t)\,dt + K_6 \tag{32}$$

证明 同样利用文献[17]定理1.4.5的结果，可得最优策略满足如下HJB方程

$$\inf_{\pi,\xi\in\Pi}\left\{[rx + (\mu - r)\pi - \xi(R-r) - (c+\theta x)]F_x + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2F_{xx}\right\} = 0 \tag{33}$$

显然最优解满足

$$\xi^* = \max(0, \pi - x) \tag{34}$$

记 $J(\pi) = [rx + (\mu - r)\pi - \max(0, \pi - x)(R-r) - (c+\theta x)]F_x + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2F_{xx} = 0$，问题变为

$$\inf_{\pi\in\Pi}\{J(\pi)\} = 0 \tag{35}$$

边界条件 $F(0) = 1$，$F(c/(r-\theta)) = 0$.

先设式（35）有解，使得 $F_x < 0$，$F_{xx} > 0$ 恒成立，分情况讨论如下，若 $\pi > x$，则

$$\inf_{\pi\in\Pi}\left\{[Rx + (\mu - R)\pi - (c+\theta x)]F_x + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2F_{xx}\right\} = 0 \tag{36}$$

左边是 π 的二次函数，易求最小值点

$$\pi_2^* = -\frac{(\mu - R)F_x}{\sigma^2F_{xx}} \tag{37}$$

将式（37）代入式（36）并整理得

$$[(R-\theta)x - c]F_x - m\frac{F_x^2}{F_{xx}} = 0 \tag{38}$$

综合式（37）（38）得

$$\pi_2^*(x) = \frac{2(R-\theta)}{\mu - R}\left(\frac{c}{R-\theta} - x\right) \tag{39}$$

而且此时容易推出

$$\pi_2^* > x \Leftrightarrow x < \frac{2c}{\mu + R - 2\theta}$$

同理，对 $\pi < x$ 情形，有如下结果

$$[(R-\theta)x - c]F_x - r\frac{F_x^2}{F_{xx}} = 0 \tag{40}$$

$$\pi_2^*(x) = \frac{2(r-\theta)}{\mu - r}\left(\frac{c}{r-\theta} - x\right) \tag{41}$$

$$\pi_2^* < x \Leftrightarrow x > \frac{2c}{\mu + r - 2\theta}$$

此外，当

$$\frac{2c}{\mu + R - 2\theta} \leqslant x \leqslant \frac{2c}{\mu + r - 2\theta}$$

时，注意到 $J(\pi)$ 为变量 μ 的分段二次函数，以及上面讨论，不难看出 $\pi_2^* = x$ 于是结合式（39）（41）即得式（29）.

下面计算值函数 $F(x)$.

1）设 $x < s$，由式（38）易得 $F(x) = K_1 - K_2(c-(R-\theta)x)^{\frac{m}{R-\theta}+1}$，由 $F(0) = 1$ 得

$$F(x) = 1 + K_2\left[c^{\frac{m}{R-\theta}+1} - (c-(R-\theta)x)^{\frac{m}{R-\theta}+1}\right] \tag{42}$$

2）设 $x > l$，由式（40），同上可得 $F(x) = K_3 - K_4(c-(r-\theta)x)^{\frac{m}{R-\theta}+1}$，由 $F(c/(r-\theta)) = 0$ 得

$$F(x) = -K_4(c-(r-\theta)x)^{\frac{r}{r-\theta}+1} \tag{43}$$

3）设 $s \leqslant x \leqslant l$，此时有 $J(x) = 0$，即 $((\mu-\theta)x - c)F_x + \frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx} = 0$ 积分两次得

$$F(x) = K_5\int_{2c/(\mu+R-2\theta)}^{x} G(t)\,dt + K_6 \tag{44}$$

于是利用 $F(x)$ 及其导数在界点的连续性，容易算出待定常数 K_2，K_4，K_5，K_6，将这些结果分别代入式（42）（43）（44），即得式（30）（31）（32）.

最后，同定理1不难验证 π_2^* 及 $F(x)$ 确为所

求最优策略和最优目标值函数.　　证毕.

4　理论分析、数值算例及经济解释

本节给出一个数值例子来论证第二、三及四节得到的结果. 因最优值函数 (破产概率) 及最优投资策略都存在闭式解, 利用 MATLAB软件很容易对结果进行分析. 不妨设本文的参数选择为, 存款利率 $r=0.02$, 贷款利率 $R=0.04$, 风险资产平均回报率 $\mu=0.06$, 风险资产波动率 $\sigma=0.20$, 最低消费额 $c=1$, 比例消费率 $\theta=0.01$. 手算便可知此时贷款临界点 $s=25$, 存款临界点 $l=100/3$.

首先, 分析投资者拥有的财富额与投资策略的关系. 从图 1不难看出, 1) 三种情形下最优投资额都是财富的线性或者分段线性函数, 而当财富大于时三种投资策略图形将重合, 都随着财富递增趋向于 100时, 最优投资额趋向于零. 从经济学角度来说, 投资者财富足够多时, 财富总量越大, 其偿付能力越强, 在投资目标为最小化破产概率的前提下, 投资者没有进一步采取激进的投资策略而承担更多市场风险的内在需求. 2) 当允许借贷且存在存贷利差时最优投资额表现为三条线段连接的折线, 当财富小于 25时, 且财富越少其风险资产投资额度越高. 显然此时投资者只贷款不存款, 而且随着破产的临近, 投资者借款越多, 当投资者财富趋近于零时, 借款额与投资者财富额比率将会趋于无穷大. 从经济学角度来说, 投资者为避免破产的发生, 利用金融市场存在的借贷工具, 不惜进行生死豪赌投资更多的风险资产; 当财富大于时, 投资者此时只存不贷, 且财富越靠近 100, 风险资产投资额越少, 最后几乎为零, 当然存款越多, 最后几乎等于所有财富; 而当财富大于 25小于时, 风险投资额等与财富额, 此时投资者不存不贷. 3) 当无借贷约束时最优投资额是一个关于财富严格非负递减的线性函数, 在图形是表现为一条直线. 4) 当不允许贷款时最优投资额是两条线段连接的折线, 当财富大于时, 最优投资额与不受借款约束情形投资策略是一致的, 随财富的增加而减少; 而当财富小于时, 最优投资额是财富的递增函数, 由于不允许借款投资风险资产, 为避免偿付能力不足遭遇破产, 投资者不惜采取激进的投资策略将全部财富投资于风险资产, 当然此时无存款.

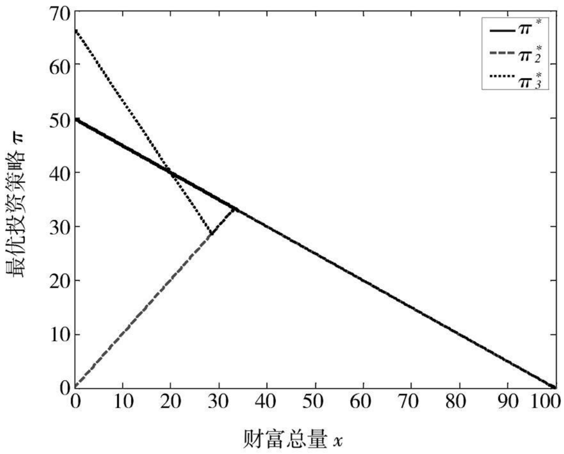

图 1　最优投资策略随财富变化规律

Fig. 1　The effect of wealth on optimal investment strategies

其次, 分析投资者拥有的财富额与最优值函数 (破产概率) 的关系. 从图 2不难看出, 1) 三种情形下的破产概率都是财富的严格递减函数, 财富趋于零则破产概率趋于 1, 财富趋于 100则破产概率趋于 0, 这与直观是一致的. 2) 从图形可以明显的看到三种情形下破产概率的大小关系是 $V<F<P$, 即财富相同时, 无约束情形破产概率最小, 允许借款且存在存贷利差情形破产概率其次, 不允许借款情形破产概率最大. 进一步从图 3可以看出: 不允许借款情形的破产概率与其它两种情形的破产概率有较大差别, 而存贷利差情形与无借贷约束情形则无较大差别; 三种情形破产概率的差值并非是财富的单调函数, 而是随着财富的增加概率差先是递增, 到达峰值以后随着财富的增加反而递减.

最后, 给出一个具体的算例来说明所得到的结果. 当投资者财富 $x>100/3$时, 则三种情形下投资的最优投资额都是 $(100-x)/2$, 存款额为 $(3x-100)/2$; 当投资者财富 $25\leqslant x\leqslant 100/3$时, 无约束情形的最优投资额仍为 $(100-x)/2$, 贷款额为 $(100-3x)/2$, 此时无存款; 不允许借贷及存贷利差情形下的最优投资额就为 x, 此时既不贷款也不存款, 风险资产投资额为现时所有财富. 而当投资者财富 $0<x<25$时, 无约束情形的最优投资额仍为 $(100-x)/2$, 贷款额为 $(100-3x)/2$, 此时无存款; 不允许借贷情形下的最优投资额为 x, 此时既不贷款也不存款; 存贷利差情形下的最

优投资额为 $100-3x$，贷款额为 $2x-100$.

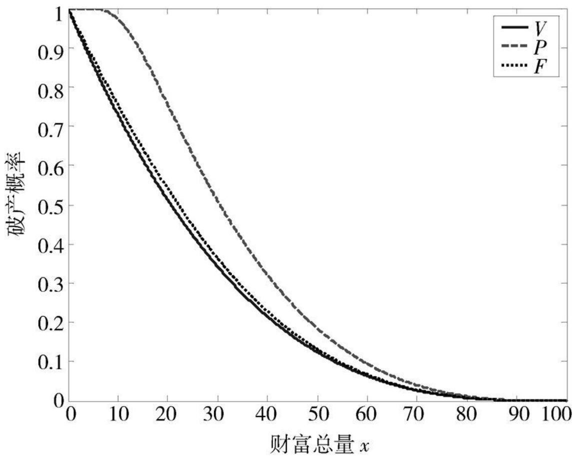

图 2 破产概率随财富变化规律

Fig. 2 The effect of wealth on ruin probability

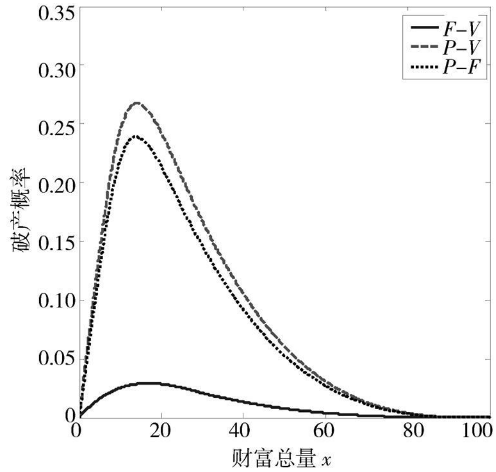

图 3 概率差随财富变化规律

Fig. 3 The effect of wealth on probability difference

5 结束语

不同于通常的效用评价准则，也不同于Markowitz的均值-方差原则投资理论（实际上可以视为特殊的效用评价准则），本文基于最小化破产概率准则，研究了投资者的最优投资策略. 考虑了三种不同的金融市场模型，在第一个模型中，投资者无存贷款约束也无卖空约束（事实上卖空约束不是真实的约束条件，因为此时投资者不会卖空风险资产），然而在第二个模型中投资者是不允许贷款投资风险资产的，在最后一个模型中，基于存贷利率不同的实际，假设投资者既可以存款也可以贷款，但是贷款利率高于存款利率. 在每一种情况，通过求解模型相对应的 HJB方程，都获得了最优投资策略及最优值函数（破产概率）的闭式解. 无约束情形下最优投资策略表现为财富的递减线性函数，借贷约束及存贷利差情形最优投资策略是财富的分段线性函数. 三种情形下的最优值函数（破产概率）都是财富的递减函数，这与直观是一致的，财富总额越大则财富下降到零的概率就越小，即破产概率就越小. 最后对这些结果给出一个数值算例，对模型结果进行理论分析及经济学解释. 本文的研究结果表明，不同存贷限制对投资者具体投资策略及所面临的破产风险影响是巨大的. 不允许借款情形时投资者面临的破产风险比其他两种情形要大很多. 模型的研究结果是切实可行、易于实时操作，不仅对投资者的决策有直接的导意义，对进一步的风险投资理论分析提供了新思路，而且对于政府制定有关规范投资行为的政策也具有一定的参考价值. 比如，本文的结果显示不允许借贷使投资者面临的破产风险比约束时的破产风险大. 国内 A股市场推出的融资融券业务不仅使得投资者有了更灵活的资产配置渠道，显然也能降低投资者的破产风险，因此监管机构推出的融资融券业务对投资者控制风险是一个行之有效的策略.

很容易将本文的结果推广到存在多个风险资产的情形，但这不存在本质的差别. 考虑随机波动率、随机利率以及部分信息情形下的最小化破产概率的投资问题将是进一步要研究的内容. 此外，考虑与基于效用准则最优投资策略的对比研究也是一个有趣的问题.

参 考 文 献:

[1] Merton R. Life time portfolio selection under uncertainty: The continuous time cases[J]. Review of Economics and Statistics, 1969, (51): 247−257.

[2] Merton R. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, (3): 373−413

[3] DavisM H A, Norman A R. Portfolio selection with transaction costs[J]. Mathematics of Operations Research, 1990 (15): 676 - 713

[4] Duffie D, Fleming W, Soner H M, et al. Hedging in incomplete markets with HARA utility[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997 (21): 753—782

[5] Zariphopoulou T. Consumption-investment models with constraints[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1994, 32 (1): 59—85

[6] 罗　琰，杨招军，杨金强. 最大化生存概率的投资策略[J]. 中国管理科学，2009, 17(4): 46—52
Luo Yan, Yang Zhao-jun, Yang Jing-qiang. Optimal investment for maximizing the survival probability[J]. Chinese Journal of Management Science, 2009, 17(4): 46—52 (in Chinese)

[7] Luo S. Ruin minimization for insurers with borrowing constraints[J]. North American Actuarial Journal, 2008, 12: 143—174

[8] 杨招军. 部分信息下极大化终止时刻期望效用[J]. 控制理论与应用，2005, 22(5): 708—712
Yang Zhao-jun. Maximizing the expected utility from terminal wealth under the case of partial information[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(5): 708—712 (in Chinese)

[9] 杨昭军，李致中. 债务固定的公司最优生存策略[J]. 系统工程理论与实践，2000 (5): 54—57.
Yang Zhao-jun, Li Zhi-zhong. The survival strategies for a company with fixed liabilities[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2000, 20(5): 54—57. (in Chinese)

[10] 杨招军，黄立宏. 不同存贷利率下极大化终止时刻期望效用[J]. 管理科学学报，2005, 8(5): 50—54
Yang zhao-jun, Huang Li-hong. Maximizing expected utility from terminal wealth under case of different rates between borrowing and saving[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(5): 50—54 (in Chinese)

[11] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(4): 937—958

[12] Browne S. Survival and growth with liability: Optimal portfolio strategies in continuous time[J]. Mathematics of Operations Research, 1997 (22): 468—492

[13] 刘夏清，李　林，杨招军. 指数效用下企业的风险投资策略[J]. 中国管理科学，2003 (2): 66—69
Liu Xia-qing, Li Lin, Yang Zhao-jun. Risk investment policies for a firm with exponent utility[J]. Chinese Journal of Management Scince, 2003 (2): 66—69. (in Chinese)

[14] Young V R. Optimal investment strategy to minimize the probability of lifetime ruin[J]. North American Actuarial Journal, 2004, 8(4): 106—236

[15] Bayraktar E, Young V R. Minimizing the probability of lifetime ruin under borrowing constraints[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007 (41): 196—221.

[16] 杨招军. 最优投资与衍生资产定价问题研究[M]. 长沙：湖南大学出版社，2008
Yang zhao-jun. Optimal and Derivative Assets Pricing[M]. Changsha: Hunan University Press, 2008 (in Chinese)

[17] Krylov R. Controlled Diffusion Process[M]. New York: Spring-Verlag, 1980

[18] 杨瑞成，刘坤会. 随机跳跃幅度的最优消费与证券选择策略问题[J]. 管理科学学报，2005, 8(6): 83—87
Yang Rui-cheng, Liu-hui. Optimal strategies on consumption and portfolio problem with stochastic jump range[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(6): 83—87 (in Chinese)

Optimal investment for minimizing the probability of bankruptcy

LUO Yan[1,2], YANG Zhao-jun[2]

1. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Audit, Nanjing 210075, China;
2. School of Finance and Statistics, Hunan University, Changsha 410079, China

Abstract: In this paper we study the problem of optimal investment based on the criteria of minimizing probability

(下转第 96页)

[26] Ouchi W G. Markets, bureaucracies and clans[J]. Administrative Science Quarterly, 1980, 25(1): 129—141
[27] Eisenhardt K M, Bourgeois L J. Politics of strategic decision making in high velocity environment and growth among U.S. semiconductor ventures 1978—1988[J]. Academy of Management Journal, 1988, 31(4): 737—770.
[28] Eisenhardt K M. Making fast strategic decisions in high-velocity environments[J]. Academy of Management Journal, 1989, (32): 543—576.

Power concentration among family agents and firm performance: An empirical study in China

HE Xiao-gang, LI Xin-chun, LIAN Yan-ling

1. School of International Business Administration, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;
2. School of Business, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: One of the key questions in family firm research is how to establish an effective corporate governance structure among family agents. Based on the assumption that family agents have different preferences in economic and noneconomic goals and pursuit their own maximal utility, we studied the impact of power concentration among family members on firm performance, and we also explored the moderators' effect on its impact. Our empirical findings indicate that the power concentration among family members has an inverted U-shaped, rather than linear, relationship with firm performance, and that the degree of business diversification and firm size have significant moderating effects on this relationship.
Key words: family firm; power concentration; moderating effects; firm performance

---

(上接第 85页)
of bankruptcy. Different from Merton problem which consumption is a decision variable, there is a positive probability of ruin because investor is forced to pay more than a fixed quantity of money per unit time. Under three different saving and borrowing constraints we get closed-form expressions of the optimal strategy and the optimal value function (ruin probability) by solving the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellmen (HJB) equation in each case. The results indicate that the optimal strategy is a piecewise linear function, and Saving-Borrowing constraints, especially borrowing constraints, will increase bankruptcy risk to investor.
Key words: ruin probability; stochastic control; saving-borrowing constraints; Hamilton-Jacobi-Bellmen Equation