第14卷第6期
2011年6月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 14 No. 6
Jun. 2011

基于多重结算方式的装配系统协同问题研究[①]

关 旭，马士华，应丹丰
(华中科技大学管理学院，武汉 430074)

摘要：鉴于装配系统中存在的众多不确定因素，制造商往往采取延迟付款(货齐付款)的方式来降低供应商供货不同步的风险，而供应商则倾向于采用及时付款(货到付款). 本文以装配系统为研究对象，分别针对延迟付款和及时付款方式建立了两供应商对单制造商的准时供货模型，考虑当每个零部件的供货提前期均不确定时，供应商和制造商应该如何进行相应的生产和要货时间决策. 研究结果不仅找到了供应链双方在不同博弈模式下的最优选择，更给出各自在一定条件下的最优结算方式选择. 最后通过对比两种结算方式对于供应链整体绩效的影响，提出在不同模式下实现供应链协同运作的必要条件.

关键词：装配系统；延迟付款；及时付款；供应链协同；准时供货

中图分类号：F224 文献标识码：A 文章编号：1007-9807(2011)06-0035-12

0 引 言

装配式系统是一个由多个零部件供应商对单个制造商同步供货的供应链系统. 尽管已经在汽车、电子等众多行业中得到了广泛的应用，但始终存在的挑战是如何保证系统中每一个节点企业都能够协调同步的运作. 鉴于装配系统中存在的众多不确定性因素，为了分担由于任何一个供应商的延迟供货而导致整个系统生产无法进行的风险，制造商往往要求必须等到所有的零部件配送齐全后才与供应商进行结算. 而对于供应商而言，同样是担心受到其他供应商延迟供货的影响，则更希望一旦将零部件送至制造商处就能够获得相应的销售金额. 为便于比较，将前者称之为延迟付款方式，后者为及时付款方式. 本文所考虑的问题是：当系统中每一个供应商的供货时间都不确定时，这两种不同的资金结算方式将如何影响供应商与制造商之间的决策过程和相应成本，以及供应链整体的绩效水平.

延迟付款和及时付款方式均在现实中有着广泛应用. 波音公司在生产最新机型787时，曾要求每一个组件供应商只有在所有的零部件配齐之后才能获得其相应的销售款项. 在汽车行业中，由于涉及到数十个甚至上百个的零部件供应商，几乎所有的整车厂都对其零部件供应商采取下线结算的方式：供应商首先将零部件送至Supply hub(集配中心)中，只有等到生产所需零部件配齐后，制造商才会将零部件从Supply hub中提取出来，并支付给供应商采购金额. 恰恰相反，如Apple或Intel这类强势的供应商则会要求与之合作的下游客户必须采取及时付款的结算方式，有时甚至是要求提前支付采购订金. 可以想象，结算方式的选择主要是基于供应链中核心企业的利益考虑. 而一旦确立，则有可能损害到其他供应链成员的利益，其结果不仅会影响到供应链的整体绩效，甚至会对核心企业带来不利影响. 因此，本文将探讨对于供应商或制造商而言，是否永远存在着一种更优的资金结算方式；如果不是，那么在一定条件

① 收稿日期：2010-10-08；修订日期：2011-04-22.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71072035).
作者简介：关 旭(1984—)，男，湖北武汉人，博士生，Email：dageguan@yahoo.com.cn

下,供应商和制造商又应该如何选择最合适的资金结算方式以最大化自身收益.

为不失一般性,本文将建立两供应商对单制造商的两阶段供应链双重博弈模型.考虑当每个供应商的供货时间都不确定时,供应商和制造商在及时付款和延迟付款模式下各自的生产时间和要货时间决策,从而得到对于供应商和制造商而言最优的结算方式选择.并且通过对比供应链在集中决策和分散决策下的整体绩效,找到在不同结算模式下优化供应链绩效的运作机制.

1 文献综述

鉴于装配系统的复杂运作机制,很多学者从不同角度对这一问题进行了探讨.但是他们更多的是关注随机生产批量和随机市场需求下的供应链问题[1-4],对于随机提前期的研究相对较少.当供应商的供货时间不确定时,装配系统中存在的主要问题是如何平衡提前完成生产的库存成本和延迟供货的惩罚成本.其中,Yano[5]研究了两个供应商对单制造商的装配系统问题,讨论当供应商的供货提前期不确定时,制造商应该如何确定对不同供应商的订货时间.Tang & Grubbstrom[6]同样建立了随机提前期下的两供应商对单制造商模型,讨论制造商应该如何确定采购时间以最小化库存的持有成本和缺货成本.浦徐进等[7]则在供应商交货时间不确定的情况下,分析了制造商如何通过惩罚和激励的措施来提高两个配套供应的供应商的准时供货率.以上这些研究更多的一种集中决策模型:以制造商为核心,从它的角度来分析如何实现效益最大化问题,而没有考虑到上下游之间的协调问题.尽管 Chu et al[8]在研究两个供应商对单制造商的装配系统时,分别建立了供应商之间的主从博弈模型和静态纳什博弈模型,但是却没有考虑制造商在系统中的作用.与之类似,杜少甫等[9]在研究了提前期随机但可控情况下的库存补货与运输排程(SRSS)问题时,也仅站在供应商的角度提出了最优的时基补货发货策略.

如何实现供应商与制造商之间的协调运作一直都是装配系统中存在的难题,Gerchak& Wang[10]最先开始了这方面的研究.在单周期的供应链中,每个供应商需要在市场需求来临之前确定各自的生产能力.文章分析了制造商与供应商在主从博弈和静态博弈中各自的最优决策,以及供应链在集中决策下的表现.随后,Gerchak & Wang[11]又分析了当市场需求随机时,如果采取VMI的运作方式,如何通过收益共享合同与回购合同来实现供应链的协同运作.Leng & Parlar[12]同样研究了装配系统中的多供应商-单制造商的单周期模型.当市场需求随机并受到价格影响时,分别讨论了如何通过回购契约和销售补偿契约来实现供应链的协同.但以上研究更加强调如何通过不同的合同方式来实现供应链的协同,而本文的侧重点则在于找到在不同的供应链环境下(延迟付款和及时付款)实现供应链协同的必要条件.

装配系统中的另外一个重要特点是供应商之间的交互影响作用.针对这一问题,Gurnani & Gerchak[13]讨论了当2个供应商的生产批量均随机时,供应商之间的纳什博弈模型.其中一个重要假设是一旦2个供应商最终交货的产品数量都低于制造商的要求数量时,交货更少的供应商需要支付给制造商一定的额外惩罚成本.但是这种供应商额外惩罚机制在现实中运用相对较少.与之不同的是本文中所讨论的延迟付款方式则在实践中,尤其是装配系统中运用得相当频繁,因而具有更强的现实意义.与本文类似,Tang et al[14]同样也考虑了当制造商采取延迟付款的前提下,供应商之间的交互影响作用.但是他们假设所有供应商的生产时间均符合同一个概率分布.而本文中考虑的情况更为复杂,在假定每一个供应商的生产时间都不相同(不同的概率分布),找到供应商之间,供应商与制造商之间的最优决策.

2 问题与模型描述

考虑一个由两供应商和单制造商构成的装配系统.假定最终产品只有2个部件构成并且分别由两个供应商按照1:1的比例配送.每个零部件的生产时间 t_i 均不确定但是符合一定的概率分布函数 $F_i(x)$ 和概率密度函数 $f_i(x)$ $(i=1,2)$.每个

零部件的成本为 C_i. 在一个单周期的环境下，客户订单会提前到来，包括具体的需求数量 Q 和要货时间 T. 制造商据此来安排采购、生产与装配. 在采购过程中，制造商会提前给每个供应商设定一个相同的零部件要货时间 T_0，而供应商则根据制造商的要货时间来安排自己的生产开工时间 B_i. 如果提前完成生产（不允许提前供货），供应商需要自己承担从完成之日到交货时间 T_0 内所有的持货成本，单位时间成本为 h_i. 如果延迟交货，供应商则会受到制造商的惩罚，单位时间成本为 β_i. 其中，持货成本 h_i 由两部分组成[15]，一是占用资金的机会成本（单位时间成本为 I），一是货物管理成本（单位时间成本为 I'）. 为便于比较，本文假定制造商和供应商的资金成本和管理成本相同. 这一假设对于不同结算方式下的供应链比较相当重要. 可以想象，如果不同（假定供应商持货成本小于制造商），最优的供应链模式一定会是延迟付款. 从而，$h_i = C_i(I + I')$，同理 β_i. 另一方面，当制造商的交货时间晚于 T，同样会受到来自于客户的延迟交货惩罚，单位时间惩罚成本为 β. 为不失一般性，假定 $\beta_i > h_i$，这代表供应商延迟交货的惩罚一定大于提前完工的持货成本. $\beta > \max(\beta_i)$ 代表客户对于制造商的惩罚一定大于制造商对任何一个供应商的惩罚. 为便于讨论，假定制造商的装配时间为 0.

无论是在及时付款模式还是延迟付款模式下，整个决策过程都可以看作是主从博弈问题. 制造商（主方）首先根据客户的需求设定零部件的要货时间，然后每个供应商（从方）再根据制造商的要求决定各自的零部件开工时间. 值得一提的是，在延迟付款模式下，由于供应商之间的成本会相互影响，他们之间的决策还同时是一个静态纳什博弈问题. 假定供应链成员均为风险中性且以成本最小化为目标，所有信息均能够得到共享. 图 1 给出的是决策过程的基本情况. 下面首先从及时付款模式展开分析.

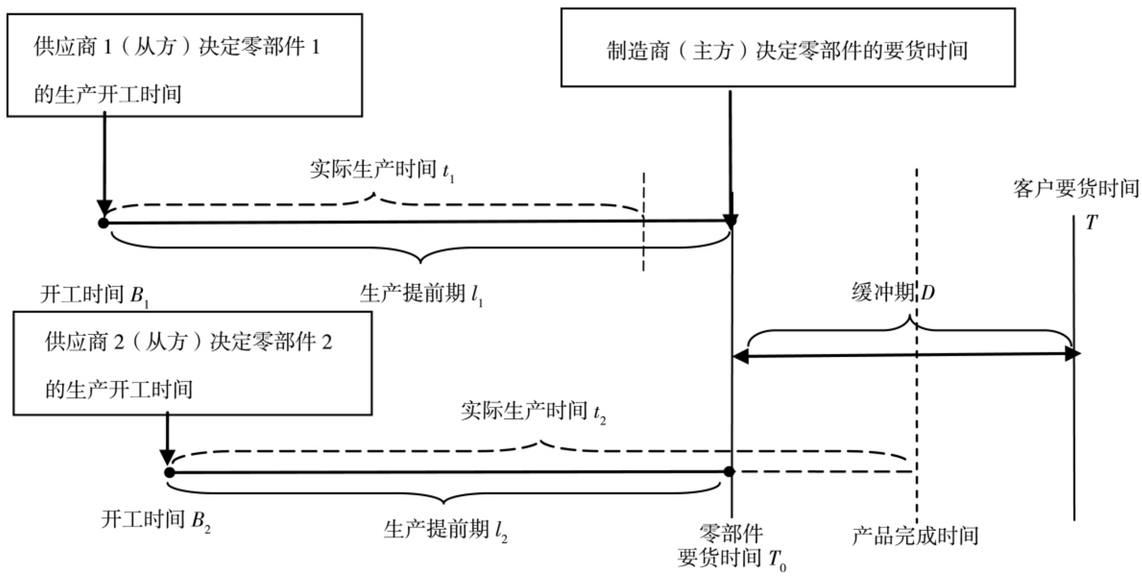


图 1　模型决策过程示意

Fig. 1 Sequence of events in the assembly system

3　及时付款模式

在及时付款方式下，供应商一旦交货，制造商必须立刻支付给供应商相应收益. 当然，供应商交货时间不能早于制造商的要货时间.

3.1　供应商

由于不存在其他供应商的影响，供应商 i（$i = 1, 2$ 下同）的成本函数相对简单

$$\begin{aligned} C_i^1 &= \beta_i E\left[(t_i + B_i) - T_0\right]^+ + h_i E\left[T_0 - (t_i + B_i)\right]^+ \\ &= \beta_i E(t_i - l_i)^+ + h_i E(l_i - t_i)^+ \end{aligned} \tag{1}$$

$(t_i + B_i)$ 代表零部件的完成时间. 为便于计算，令 $l_i = T_0 - B_i$，代表供应商设定的生产提前期，即根据制造商的要货时间 T_0，供应商需要预留多长的生产时间. 很明显，供应商成本是关于 l_i 的凸函数，最优的生产提前期满足条件

$$\frac{\partial C_i^1}{\partial l_i^1} = (h_i + \beta_i) F_i(l_i^1) - \beta_i = 0 \tag{2}$$

这是一个典型的报童模型，供应商最优的时间决策需要平衡提前交货的持货成本和延迟交货的惩罚成本. 持货成本 h_i 越大，供应商设置的生产提前期越短; 制造商的惩罚成本 β_i 越大，生产提前期越长. 由于成本只受到自身因素的影响，在及时付款模式下供应商的决策相对简单. 但是对于制造商的决策而言，则需要同时考虑所有供应商和客户对其造成的影响.

3.2 制造商

在及时付款模式下，制造商的期望成本满足条件

$$\begin{aligned} C_m^1 =& \beta E\left[\max(t_1 + B_1, t_2 + B_2) - T\right]^+ - \\ & \sum_{i=1}^{2} \beta_i E(t_i + B_i - T_0)^+ + \sum_{i,j=1;\ i\neq j}^{2} \\ & h_i E\{\max(t_j + B_j, T) - \max(t_i + B_i, T_0)\}^+ \\ =& \beta E\left[\max(t_1 - l_1, t_2 - l_2) - D^1\right]^+ - \\ & \sum_{i=1}^{2} \beta_i E(t_i - l_i)^+ + \sum_{i,j=1;\ i\neq j}^{2} h_i E \\ & \{\max(t_j - l_j, D^1) - \max(t_i - l_i, 0)\}^+ \end{aligned} \tag{3}$$

与供应商的处理方法类似，令 $D = T - T_0$，代表制造商设定的缓冲期，即根据客户的要货时间 T，制造商需要提前多久向供应商提出要货计划 T_0. 当然，$D \geqslant 0$. 在式(3) 中，第一项代表制造商延迟交货的惩罚成本，第二项代表由于供应商延迟交货，制造商获得的补偿. 第三项则表示由于供应商交货时间的不同步给制造商带来的持货成本.

引理 1 制造商的期望成本是关于缓冲期的凸函数，最优的缓冲期设置满足条件

$$F_1(l_1 + D^1) F_2(l_2 + D^1) = \frac{\beta}{(h_1 + h_2 + \beta)} \tag{4}$$

证明. 见附录.

根据引理 1，制造商的缓冲期 D 长度与供应商的提前期 l_i 长度成反比. 这可以解释为制造商设置缓冲期的主要目的在于防止由于供应商的延迟供货而导致最终交货时间晚于客户要求. 因此，供应商设置的提前期越长，出现延迟交货的概率越低. 而相应的，制造商可以选择更短的缓冲期. 至此，找到了供应链双方在及时付款模式下的最优选择，下面对延迟付款模式展开分析.

4 延迟付款模式

在该模式下，制造商只有等到 2 个供应商均完成零部件的供应之后，才会支付相应的金额. 对于供应商而言，如果提前完成生产，它不仅需要持有库存直到制造商要货时间 T_0 的到来，还必须等到另外一个供应商也完成供货. 因此，单个供应商的成本会受到另外一个供应商交货时间的影响，从而二者之间的决策可以看作是一个静态纳什博弈过程.

4.1 供应商

在延迟付款模式下，供应商 i 的成本函数满足条件

$$\begin{aligned} C_i^2 =& \beta_i E\left[(t_i + B_i) - T_0\right]^+ + h_i E\left[\max(t_j + B_j, T_0) - \right. \\ & \left. (t_i + B_i)\right]^+ \\ =& \beta_i E(t_i - l_i)^+ + h_i E\left[\max(t_j - l_j, 0) - \right. \\ & \left. (t_i - l_i)\right]^+ \end{aligned} \tag{5}$$

和式(1) 相比，可以看到在相同的生产提前期下，供应商的持货成本会增大，而延迟交货成本则保持不变.

引理 2 供应商 i 的期望成本为其生产期 l_i 的凸函数，最优生产期时间 l_i^2 满足条件

$$\begin{aligned} & \beta_i F(l_i^2) + h_i F_i(l_i^2) F_j(l_j) + \\ & h_i \int_{l_j}^{\infty} \int_{0}^{t_j - l_j + l_i^2} f_i(t_i) f_j(t_j)\, \mathrm{d}t_i \mathrm{d}t_j - \beta_i = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

证明见附录.

引理 3 在供应商各自的生产期决策中 $D(l_1, l_2)$，存在唯一的纳什均衡解 $D(l_1^*, l_2^*)$.

证明见附录.

根据引理 2 与引理 3，得到在延迟付款模式下，供应商之间有且仅有唯一的最优供货时间选择. 与及时付款模式一样，供应商的生产期同样随着自身的持货成本 h_i 的增大而缩短，随着惩罚成本 β_i 的增大而延长. 但不同的是，在延迟付款下，供应商的生产期长度会与其他供应商的生产期长

度成正比. 这是因为$\frac{\partial N_1(l_1,l_2)}{\partial l_1} > 0$且$\frac{\partial N_1(l_1,l_2)}{\partial l_2} = -h_1\int_{l_2}^{\infty} f_1(l_1 + t_2 - l_2) f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2 < 0$. 这一点可以解释为：如果其他供应商选择的生产预留期越长，代表着他们出现延迟供货的可能性越小. 那么对于供应商 i 而言，由其他供应商延迟交货所带来的持货成本也会降低，进而导致供应商 i 选择更长的生产预留时间. 下面对制造商在延迟付款下的决策进行分析.

4.2　制造商

在延迟付款模式下，制造商只需要等到供应商的零部件均供应完成后才付款，其成本函数为

$$\begin{aligned} C_M^2 &= \beta E\left[\max(t_1 + B_1, t_2 + B_2) - T\right]^+ - \sum_{i=1}^{2} \beta_i E(t_i + B_i - T_0)^+ + (h_1 + h_2) E\{T - \max(t_1 + B_1, t_2 + B_2, T_0)\}^+ \\ &= \beta E\left[\max(t_1 - l_1, t_2 - l_2) - D\right]^+ - \sum_{i=1}^{2} \beta_i E(t_i - l_i)^+ + (h_1 + h_2) E\left[D - \max(t_1 - l_1, t_2 - l_2, 0)\right]^+ \end{aligned} \tag{7}$$

第 1 项表示当任意供应商的延迟交货时间超过制造商设置的缓冲期时，制造商需要承担的客户惩罚. 第 2 项表示如果供应商延迟交货，制造商能够获得的补偿. 第3 项表示当2 个供应商都在客户要求到货时间 T 之前交货时，制造商需要承担的持货成本. 与制造商在及时付款模式下的成本对比，可以发现唯一的不同在于制造商的持货成本表达式（第 3 项）在相同的参数下会变小，而其他两项保持不变.

引理4　制造商的期望成本为缓冲期 D 的凸函数，最优的缓冲期 D 满足条件

$$F_1(l_1 + D^2) F_2(l_2 + D^2) = \frac{\beta}{(h_1 + h_2 + \beta)} \tag{8}$$

证明　和引理 1 的证明方式类似，见附录.

可以看到，无论是在及时付款和延迟付款模式下，制造商最优缓冲期选择的表达式保持一致. 对于这一点，本文将在命题 4 中作出解释. 但是由于在延迟付款中供应商的选择发生了变化，制造商的选择实际上也已经改变. 下一节将集中讨论不同结算方式对于供应商和制造商的影响机制，以及在不同条件下对于二者最优的结算方式选择.

5　模式对比

本节将分别针对供应商，制造商来讨论及时付款模式和延迟付款模式对各自的影响机制. 对于供应商而言，根据 4.1 和 4.2 的讨论，可以得到以下结论.

命题 1　1）相比于及时付款，供应商均会在延迟付款模式下推迟生产开工时间，即缩短生产提前期长度 l_i. 从而对于制造商的准时供货率会降低. 2）无论在何种条件下，采取及时付款这种结算方式对于供应商来说都是更好的选择.

证明　1）比较式（2）与式（6）可以得到

$$\int_{l_j}^{\infty}\int_{0}^{t_j - l_j + l_i} f_j(t_j) f_i(t_i)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j > \int_{l_j}^{\infty}\int_{0}^{l_i} f_j(t_j) f_i(t_i)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j = F_i(l_i)(1 - F_j(l_j))$$

则$\beta_i F(l_i) + h_i F_i(l_i) F_j(l_j) + h_i \int_{l_j}^{\infty}\int_{0}^{t_j - l_j + l_i} f_i(t_i) f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j - \beta_i > \beta_i F(l_i) + h_i F_i(l_i) - \beta_i$. 因此，当式（2）与式（6）同时成立时，必然存在延迟付款模式下的生产提前期长度小于及时付款模式下的生产提前期长度. 而随着生产提前期的缩短，供应商对于制造商的准时供货率会降低.

2）供应商的成本比较. 根据式（1）和式（5），存在 $C_i^1(l_i) < C_i^2(l_i)$，即当供应商选择相同的生产提前期，在延迟付款模式下的成本更大. 因此，存在 $C_i^1(l_i) < C_i^1(l_i^2) < C_i^2(l_i^2)$，无论在何种条件下，及时付款对于供应商更为有利.　　证毕.

算例分析. 假定零部件1 与2 的生产时间服从着 $\lambda = 40$ 和 $\lambda = 70$ 的指数分布. $h_1 = 0.6$，$h_2 = 0.2$. $\beta_1 = 1.0$，$\beta_2 = 0.4$. 以供应商 1 为例，考虑随着供应商 2 的生产期 l_2 变化时（$l_2 = 30, 70, +\infty$），供应商成本随其生产期增大的变化情况. 为便于计算，生产的零部件数量为 1. 值得注意的是，当 $l_2 = +\infty$ 时，代表着供应商2 的供货决策对于供应商1 没有影响，即供应商1 在及时付款模式下的决策. 通过图 2 可知，供应商 1 的生产提前期随着供应商 2 生产提前期的增大而增大. 在及时

付款模式下供应商 1 预留的生产提前期最长，成本也最低: 供应商在及时付款下的成本仅为延迟付款下的 1/2.

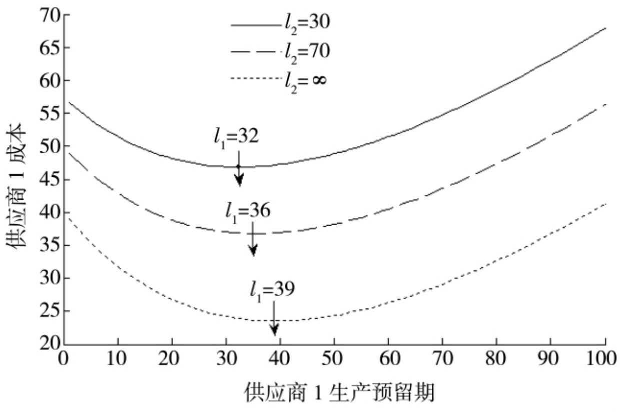


图 2　供应商成本与生产期关系图

Fig. 2 Effects of delay payment on supplier's choice

通过命题 1 可知，当供应商拥有足够的话语权时一定会选择及时付款方式(参考 Apple，Intel) . 但是，当制造商强势时，延迟付款是否又一定是其最优的选择呢: 采取延迟付款，尽管能够充分降低制造商的持货成本，但是会导致所有的供应商都缩短生产预留时间，降低零部件的准时供货率.

命题 2　1) 相比于及时付款模式，制造商会在延迟付款模式下选择更长的缓冲期 D，而 $\min(\Delta l_1, \Delta l_2) < \Delta D < \max(\Delta l_1, \Delta l_2)$. 2、延迟付款对于制造商而言并不总是最优的选择，在一定条件下，及时付款对于制造商来说更为有利.

证明　1) 令 $\Delta l_1 = l_1^1 - l_1^2$，$\Delta l_2 = l_2^1 - l_2^2$ 以及 $\Delta D = D^1 - D^2$. 根据引理 1 和引理 4，可以得到 $F(l_1^1 + D)G(l_2^1 + D) = F(l_1^2 + D)G(l_2^2 + D)$. 由于 $\Delta l_1 > 0$ 和 $\Delta l_2 > 0$(命题 1) ，存在 D^2 恒大于 D^1，且 ΔD 位于($\Delta l_1, \Delta l_2$) 之间. 这可以解释为，由于每一个供应商都会在延迟付款模式下压缩各自的生产提前期，降低了对于制造商的服务水平 —— 制造商必须增大其缓冲期的长度，以保证对于客户的准时供货服务水平.

2) 不同结算模式下制造商的成本. 根据 Tang 等[14] 的研究，他们证明了对于制造商而言一定存在某一范围使得及时付款方式优于延迟付款，但是其前提是制造商没有权利设定缓冲期. 而与之不同，本文中制造商有权利设置一个适当的缓冲期，这样它就能够中和由于供应商延迟交货而带来的客户惩罚成本的影响. 由于制造商的成本表达式复杂，如果想进一步比较必须带入具体的分布函数，然后根据引理 1，2，3，4 求解出供应商与制造商在不同模式下的时间决策并进行比较计算. 尽管如此，仍然能够通过算例分析找到在一定条件下，及时付款模式下制造商的成本小于延迟付款下的成本，从而证明了对于制造商而言并不存在一种最优的结算模式.

算例分析. 为便于计算，提出一种相对简单的条件以证明不存在唯一的最优结算方式. 考虑两个供应商的生产时间均服从 0 – 1 分布. 其中，供应商 1 的供货时间分别为 40 与 60，发生的概率分别为 0. 7 与 0. 3; 供应商 2 的供货时间为 60 与 90，发生的概率分别为 0. 8 与 0. 2. $(h_1, \beta_1) = (0.1, 0.25)$，$(h_2, \beta_2) = (0.3, 0.4)$. 图 3 表示的是随着客户惩罚成本 β 不断增大时，制造商的期望成本变化情况.

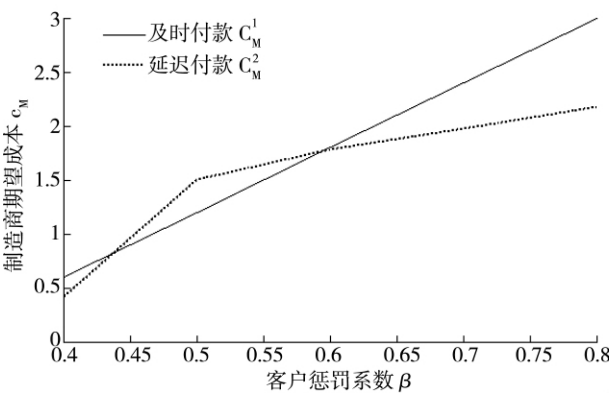


图 3　不同模式下制造商成本对比

Fig. 3 Manufacturer's expected cost under different payment contracts

可以看到，当客户惩罚成本 β 位于 (0. 43，0. 59) 时，及时付款模式下制造商的成本更低，而在其他范围内延迟付款更佳. 对于这一点，可以解释为当客户的惩罚成本系数较大时($\beta > 0.6$) ，制造商能够更有效的通过延长缓冲期来降低惩罚成本. 而当惩罚系数较小时($\beta < 0.4$) ，供应商的延迟供货对于制造商影响相对较小. 至此，本文已经讨论了不同结算模式对于供应商和制造商的影响机制，下面就结算方式对供应链整体的影响机制展开分析.

6　协同运作机制

首先给出系统在集中决策下的最优选择作为标杆. 令 L_1 代表零部件1的全部生产预留期长度,它表示从零部件开始生产到客户要货的时间间隔,这和分散系统中的 $l_1 + D$ 概念相同. 同理 L_2. 根据图1可知,系统的整体成本由 (L_1, L_2) 唯一决定. 系统的期望成本为

$$C_C = h_1 \left[\max(t_2 - L_2, 0) - (t_1 - L_1)\right]^+ + h_2 \left[\max(t_1 - L_1, 0) - (t_2 - L_2)\right]^+ + \beta \left[\max(t_2 - L_2, t_1 - L_1)\right]^+ \tag{9}$$

第1项代表零部件1的库存持货成本,第2项代表零部件2的库存持货成本,第3项代表当出现延迟交货时,客户对系统的惩罚.

引理5　系统成本是关于零部件生产期 (L_1, L_2) 的联合凸函数,零部件各自的最优生产期满足条件

$$\frac{\partial C_c}{\partial L_i^*} = h_i \left[F_i(L_i^*) F_j(L_j^*) + \int_{L_j^*}^{\infty}\int_0^{t_j - L_j^* + L_i^*} f_i(t_i) f_j(t_j)\, \mathrm{d}t_i \mathrm{d}t_j\right] - (h_j + \beta)\int_{L_i^*}^{\infty}\int_0^{t_i - L_i^* + L_j^*} f_i(t_i) f_j(t_j)\, \mathrm{d}t_i \mathrm{d}t_j = 0$$

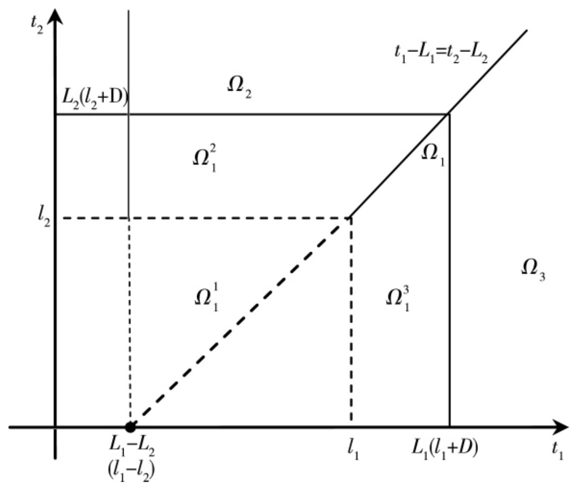
$$(i, j = 1, 2 \,\&\, i \neq j)$$

证明　见附录.

命题4 无论是在集中决策或是分散决策,延迟付款或是及时付款,制造商、供应商或供应链整体进行最优决策的基本原则是平衡不同条件下所可能产生库存持有成本与延迟惩罚成本.

证明　利用和 Rudi[16] 相似的方法,将不同情况下的供应商生产提前期分成以下几个部分,如图4所示.

易知 $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 1$, $\Omega_1^1 + \Omega_1^2 + \Omega_1^3 = \Omega_1$. 对于引理5,以零部件1为例,当生产提前期 L_1 处在区间 (Ω_1, Ω_2) 时会产生持货成本,而当其生产提前期处在区间 Ω_3 时,不仅会导致其受到客户的惩罚,还会导致零部件2产生持有成本. 由于是集中决策,需要考虑所有的成本,因此零部件1的生产提前期 L_1^* 满足条件 $\frac{\partial C_c}{\partial L_1^*} = h_1(\Omega_1 + \Omega_2) - (h_2 + \beta)\Omega_3 = 0$,同理零部件2. 对于引理2,同样以零部件1为例,由于是分散决策,此时供应商1不需要再去考虑对供应商2的影响,其自身持货成本产生的条件是在区间 (Ω_1^1, Ω_1^2),而惩罚成本产生条件为 $P(t_1 > l_1)$. 因此最优的生产提前期 l_1^* 满足条件 $\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}l_1} = h_1(\Omega_1^1 + \Omega_1^2) - \beta_1[1 - F_1(l_1)] = 0$. 而对于制造商,其最优的缓冲期决策永远都是平衡可能产生的惩罚成本与持有成本,这也可以解释为何在2种不同的结算模式下,最优的缓冲期表达式相同.(参照引理1和引理4),即 $\frac{\partial C_m}{\partial D} = (h_1 + h_2)\Omega_1 - \beta[1 - \Omega_1]$.　　证毕.



$\Omega_1: t_1 < L_1, t_2 < L_2 \mid \Omega_2: t_2 - L_2 > t_1 - L_1, t_2 > L_2 \mid \Omega_3: t_2 - L_2 < t_1 - L_1, t_1 > L_1$

$\Omega_1^1: t_1 < l_1, t_2 < l_2 \mid \Omega_1^2: t_2 - l_2 > t_1 - l_1, t_2 > l_2 \mid \Omega_1^3: t_2 - l_2 < t_1 - L_1, t_1 > l_1$

图4　生产提前期区间划分

Fig. 4 The segmentation of production lead time space

命题4不仅解释了供应链各个主体在进行决策时的基本原则,并且同样适用于当供应商数量由2个扩展到 N 个时的装配系统运作准则. 由于篇幅有限,这些内容将不在本文中作进一步的讨论. 下面将探讨如何提高分散系统下的供应链整体绩效以实现协同运作.

引理6　无论供应链采取集中决策或者是分散决策,无论采取延迟付款或者及时付款,装配系统对于客户的准时供货率保持不变.

证明　准时供货率代表零部件的配齐时间早于客户要货时间的概率 $P(B_i + t_i < T)_{i=1,2}$,即 $P(t_2 < L_1)$, $P(t_2 < L_2)$.

根据命题 4，有$\frac{\partial C_c}{\partial L_1} = h_1(\Omega_1 + \Omega_2) - (h_2 + \beta)\Omega_3$，及$\frac{\partial C_c}{\partial L_2} = h_1(\Omega_1 + \Omega_3) - (h_2 + \beta)\Omega_2$. 由此可得

$$\frac{\partial C_c}{\partial L_1} + \frac{\partial C_c}{\partial L_2} = (h_1 + h_2)\Omega_1 - \beta(\Omega_2 + \Omega_3) = 0$$

$$\Rightarrow (h_1 + h_2)\Omega_1 - \beta(1 - \Omega_1) = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_1 = \frac{\beta}{h_1 + h_2 + \beta}$$

$$\Rightarrow F_1(L_1)F_2(L_2) = \frac{\beta}{h_1 + h_2 + \beta} \tag{10}$$

将式(8) 和式(10) 对比，可知在集中决策和分散决策中，装配系统对于客户的服务水平始终保持不变. 对于及时付款和延迟付款而言，根据引理 1 和 4，同样可以得到这一结果. 证毕.

引理 6 成立的关键在于制造商有权利设定缓冲期 D. 根据命题 4，制造商的最优缓冲期决策能够平衡其惩罚成本与库存持有成本，从而使得即使供应商对于制造商的服务水平会随着供应商数量的增多或者结算方式的不同而降低，但是制造商总能够通过缓冲期来保证对客户的服务水平维持不变. 这也就导致了无论是在何种情况下，即使供应链的成本不一样，供应链仍然能够保持同样的客户服务水平(准时供货率). 这一点在现实运作中对于客户而言尤为重要: 客户只需要确定对制造商的惩罚成本就能够保证自身的服务水平，而不需要担心整个供应链系统中的参与企业数量或者是产品构成的复杂程度.

集中决策下的供应链总成本是分散决策的供应链总成本下限. 而要实现供应链的协同供货，除了保证相同的服务水平外，还需要达到一致的成本. 易知，实现装配系统在分散决策模式下依然能够达到最低成本的必要条件是 $l_1 + D = L_1$，$l_2 + D = L_2$. 根据引理 6，存在 $F_1(L_1)F_2(L_2) = F_1(l_1 + D)F_2(l_2 + D)$. 从而，欲使之成立，只需要满足条件

$$l_1 - l_2 = L_1 - L_2 \tag{11}$$

在集中决策下，$L_1 - L_2$ 由持货成本 h_i 与客户惩罚系数 β 决定. 而在分散决策中，$l_1 - l_2$ 由持货成本 h_i 与制造商惩罚系数 β_i 唯一确认，与 β 无关. 由于在本文中，没有对制造商对供应商的惩罚系数进行任何限制，这也就代表着，一定存在合理的(β_i，β_2) 令 $l_1 - l_2 = L_1 - L_2$ 成立，从而使供应链在分散决策下，无论是在及时付款模式亦或是延迟付款模式下，都能够达到最低的期望成本. 同时也说明，从供应链整体的角度来看，并不存在一种更优的资金结算方式，结算方式的优劣仅仅取决于制造商和供应商相关参数的设定.

算例分析: 如表 1 所示，零部件 1 与 2 的生产时间依然服从着 $\lambda = 40$ 和 $\lambda = 70$ 的指数分布. $h_1 = 0.6$，$h_2 = 0.2$，$\beta = 1.6$. 选择三组不同的制造商对供应商惩罚系数(β_1，β_2)，讨论在延迟付款方式下，供应链在分散决策和集中决策下的总体成本与服务水平. 通过设定惩罚系数(β_1，β_2) 使得 $l_1 - l_2$ 不断逼近于 $L_1 - L_2$，供应链整体成本会不断降低，直到等于集中决策下的成本.

表 1 供应链集中决策与分散决策对比表

Table 1 Comparison of decentralized and centralized supply chain

延迟供货惩罚成本(制造商 - 供应商)		$(\beta_1, \beta_2) \sim (0.6, 1.3)$		$(\beta_1, \beta_2) \sim (1.1, 0.8)$		$(\beta_1, \beta_2) \sim (1.5, 0.3)$	
运作模式		分散决策	集中决策	分散决策	集中决策	分散决策	集中决策
$\beta = 1.6$	库存持有成本	40.239	40.352	40.195	40.352	49.613	40.352
	产品缺货成本	26.444	26.331	29.169	26.331	33.728	26.331
	系统总成本	66.683	66.683	69.365	66.683	83.341	66.683
	$\lvert L_1 - L_2 \rvert$	113	113	70	113	14	113

7 结束语

如何协调不同供应商的供货时间一直是装配系统中存在的难点问题. 为了降低由于某些供应商的延迟供货而导致自身成本的增加，制造商往往采用延迟付款的结算方式，供应商则倾向于及时付款. 尽管这两种结算方式在现实中有着广泛的应用，但是对于它们如何影响供应链成员决策和供应链整体的绩效却较少为人所关注. 本文的

研究重点是考虑在不同结算方式下装配系统的运作机制,主要解决以下三个问题: 1、在不同的结算模式下,供应商与制造商应该如何进行最优的时间决策; 2、在不同的条件下,供应商和制造商应该如何选择最优的结算方式; 3、在不同结算模式下,如何实现装配系统的协调运作.

具体而言,本文针对及时付款和延迟付款分别建立了两供应商对单制造商的准时供货模型. 考虑当每个供应商的供货时间均无法确定的时候,供应商和制造商应如何进行相应的生产及要货时间决策,从而得到对于二者而言最合适的结算模式选择. 研究不仅考虑了供应商与制造商之间的纵向博弈问题,而且讨论了供应商之间的横向博弈问题. 研究结果表明,对于供应商而言,无论在任何情况下及时付款都是一个更好的选择. 但是对于制造商,则并不存在唯一的选择: 尽管延迟付款能够有效降低其库存持有成本,但是会导致供应商降低各自的准时交货水平,从而给制造商带来损失. 这一点与现实中的运作情况较为不同: 一般而言,制造商都倾向于选择延迟付款. 而本文的研究则给出了制造商选择及时付款方式的条件. 至于供应链整体绩效,本文证明了不管在及时/延迟付款亦或是集中/分散决策下,系统对于客户的准时供货率都是相同的. 而通过合理的参数设置,一定能够使得供应链总成本达到最低. 这代表着尽管资金结算方式的选择是由供应链核心企业来决定,但是无论是在何种方式下,核心企业都能够通过调节惩罚系数来实现供应链整体绩效的最大化.

本文的研究也存在着一定的局限性. 如假定所有供应链成员都不存在资金约束: 在实际情况中,很多企业都面临着资金短缺的困境. 一旦供应商或制造商的资金有限,可能就无法接受相对应的结算方式. 又比如假设所有供应商必须接受同一种资金结算方式: 而在现实中,装配系统中可能有多种结算方式并存,其中强势供应商采取及时付款,弱势供应商则接受延迟付款. 因此,今后会在这两方面作进一步的探讨,从而更好的指导企业实践.

参 考 文 献:

[1] Singh M R, Abraham C T, Akella R. A wafer design problem in semi conductor manufacturing for reliable customer service [J]. IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology, 1990, 13: 103 – 108.

[2] Güler M G, Bilgiç T. On coordinating an assembly system under random yield and random demand [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 1(1): 342 – 350.

[3] Xiao Yongbo, Chen Jian, Lee C Y. Optimal decisions for assemble-to-order systems with uncertain assembly capacity [J]. Int. J. Production Economics, 2010, 123: 155 – 165.

[4] 张锦特, 郑淑玲. 持续生产循环下变动供需之供应链协调模型 [J]. 管理科学学报, 2010, 13(8): 22 – 32.
Zhang Jin-te, Zheng Shu-ling. Supply chain coordination model for variable demand and variable supply under continuous production cycle [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(8): 22 – 32. (in Chinese)

[5] Yano C. Stochastic lead times in two-level assembly systems [J]. IIE Transactions, 1987, 19: 371 – 378.

[6] Tang O, Grubbstrom R W. The detailed coordination problem in a two-level assembly system with stochastic lead times [J]. Int. J. Production Economics, 2003, 81 – 82: 415 – 429.

[7] 徐　进, 石　琴, 凌六一. 多供应商准时制惩罚机制与激励机制研究 [J]. 计算机集成制造系统, 2006, 12(11): 1876 – 1880.
Xujin, Shi Qin, Ling Liu-yi. Penalty policy and incentive policy of JIT for multi-supplier [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2006, 12(11): 1876 – 1880. (in Chinese)

[8] Chu Hongsheng, Wang Jingchun, Jin Yihui, et al. Decentralized inventory control in a two-component assembly system [J]. Int. J. Production Economics, 2006, 102: 255 – 264.

[9] 杜少甫, 梁　樑, 董骏峰, 等. 考虑随机且可控提前期的时基补货发货策略 [J]. 管理科学学报, 2009, 12(6): 34 – 44.
Du Shao-fu, Liang Liang, Dong Jun-feng, et al. Time based replenishment and dispatching policy with stochastic but controllable lead time [J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(6): 34 – 44. (in Chinese)

[10] Wang Yunzeng, Gerchak Y. Capacity games in assembly systems with uncertain demand [J]. Manufacturing and Service Operations Management, 2003, 5(3): 252 – 267.

[11] Gerchak Y, Wang Yunzeng. Revenue sharing and wholesale-price contracts in assembly systems with random demand [J]. Production and Operations Management, 2004, 13: 23 – 33.

[12] Leng M M, Parlar M. Game-theoretic analyses of decentralized assembly supply chains: Non-cooperative equilibria vs. coordination with cost-sharing contract [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 204: 96 – 104.

[13] Gurnani, Gerchak Y. Coordination in decentralized assembly systems with uncertain component yields [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 3(1): 1559 – 1576

[14] Kwon H D, Lippman S A, Cardle K M, et al. Managing Time-Based Contracts with Delayed Payments [R]. Working Paper, Los Angeles: University of California. Anderson School, 2008.

[15] 赵晓波，黄四民. 库存管理 [M]. 北京: 清华大学出版社，2008.
Zhao Xiaobo, Huang Simin. Inventory Management [M]. Beijing: Hsinghua University Press, 2008. (in Chinese)

[16] Rudi N. Optimal inventory levels in systems with common components [R]. Working Paper, William E. Rocheseer N. Y: Simon Graduate School of Business Administration, University of Rochester, 1998.

[17] Friedmam J W. Game Theory with Applications to Economics [M]. NewYork: Oxford University Press, 1986.

Coordination in assembly systems under multiple payment contracts

GUAN Xu, MA Shi-hua, YING Dan-feng

School of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

Abstract: Due to the uncertainty in assembly system, manufacturer always likes to implement a delay payment on his suppliers in purpose of mitigating the risk of late delivery caused by any supplier. However, suppliers prefer the on-time payment. Both two payments contracts are well used in practical applications whereas rarely emerged in academic research. And in this paper, we investigate how these two payment contracts affect suppliers' and manufacturer's decisions, as well as the overall performance of supply chain when the production lead time of suppliers are assumed to be stochastic. By analyzing a decentralized system with two suppliers and one manufacturer when both suppliers have a particular stochastic component's production time, we not only find out the optimal production reserve time for suppliers and optimal buffer time for manufacturer under two payment contracts, respectively. More important, the proper choices of payment contract for manufacturer and supplier under a certain condition are presented. Also, by comparing the supply chain performances between centralized and decentralized system, we also got the conditions under which coordination is achieved while participation constraints meet.

Key words: assembly system; delay payment contract; on-time payment contract; coordination; on-time delivery

附录

引理 1 证明. 将式(3) 展开可得 $C_M = \beta A + \sum_{i=1}^{2} h_i B_i - C$，其中 A 与 B_i 均与 D 相关，而与 C 无关.

$$A = \int_{l_1+D}^{\infty}\int_{0}^{t_1-l_1+l_2}(t_1 - l_1 - D)f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 + \int_{l_2+D}^{\infty}\int_{0}^{t_2-l_2+l_1}(t_2 - l_2 - D)f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

$$B_i = \int_{0}^{l_i}\int_{0}^{l_j+D}Df_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_j\mathrm{d}t_i + \int_{0}^{l_i}\int_{l_j+D}^{\infty}(t_j - l_j)f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_j\mathrm{d}t_i + \int_{l_i}^{l_i+D}\int_{0}^{l_j+D}[D - (t_i - l_i)]f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_j\mathrm{d}t_i + \int_{l_j+D}^{\infty}\int_{l_i}^{t_j-l_j+l_i}[t_j - l_j)$$

$-(t_i-l_i)]f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_j\mathrm{d}t_i \qquad i,j=1,2 且 i\neq j$

$$C=\beta_1\int_{l_1}^{\infty}(t_1-l_1)f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1+\beta_2\int_{l_2}^{\infty}(t_2-l_2)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2 \tag{12}$$

通过对式(12)求导，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}C_M}{\mathrm{d}D}=-\beta[1-F_1(l_1+D)F_2(l_2+D)]+(h_1+h_2)F_1(l_1+D)F_2(l_2+D)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2C_M}{\mathrm{d}D^2}=(\beta+h_1+h_2)f_1(l_1+D)f_2(l_2+D)>0 \tag{13}$$

当 $D=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}C_M}{\mathrm{d}D}<0$；当 $D=\infty$ 时，$\frac{\mathrm{d}C_M}{\mathrm{d}D}>0$. 因此必然存在合适的 D^1 使得$\frac{\mathrm{d}C_M}{\mathrm{d}D}=0$. 证毕.

引理 2 证明. 将式(5)的成本函数展开，可以得到

$$C_i=h_i\{\int_0^{l_i}\int_0^{l_j}(l_i-t_i)f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j+\int_{l_j}^{\infty}\int_0^{t_j-l_j+l_i}[(t_j-l_j)-(t_i-l_i)]f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j\}+\beta_i\int_{l_i}^{\infty}(t_i-l_i)f_i(t_i)\,\mathrm{d}t_i \tag{14}$$

第 1 项表示供应商 i 的库存持有成本，由两部分组成：1）两个供应商均提前完成零部件生产任务($t_i<l_i,t_j<l_j$)；2）无论供应商 i 是否按时完成，供应商 j 延迟交货并且其交货时间晚于供应商 i($t_j>l_j,t_j-l_j>t_i-l_i$). 第 2 项表示供应商 i 延迟交货所需要承担的惩罚成本，这个只与其自身交货时间相关. 对式(14)分别求生产期 l_i 的一阶、二阶导数

$$\frac{\partial C_i}{\partial l_i}=\beta_iF(l_i)+h_iF_i(l_i)F_j(l_j)+h_i\int_{l_j}^{\infty}\int_0^{l_i+t_j-l_j}f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j-\beta_i$$

$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial l_i^2}=h_if_i(l_i)F_j(l_j)+h_i\int_{l_j}^{\infty}f_i(t_j-l_j+l_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_j+\beta_if_i(l_i) \tag{15}$$

易知$\frac{\partial^2 C_i}{\partial l_i^2}>0$，因此供应商成本是关于生产期 l_i 的凸函数. 对于式(6)，当 $l_i=0$ 时，可得 $h_i\int_{l_j}^{\infty}\int_0^{t_j-l_j}f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j-\beta_i<h_i-\beta_i<0$；当 l_i 趋近于无穷大时，式(6)等于 $h_iF_j(l_j)+h_i\int_{l_j}^{\infty}\int_0^{\infty}f_i(t_i)f_j(t_j)\,\mathrm{d}t_i\mathrm{d}t_j>0$. 由此得到必然存在 l_i 使得式(6)为 0.

证毕.

引理 3 证明. 根据各个供应商的最优生产期决策，令 $N_1(l_1,l_2)=\frac{\partial C_1^2}{\partial l_1}$ 和 $N_2(l_1,l_2)=\frac{\partial C_2^2}{\partial l_2}$. 分别求导可得

$$\frac{\partial N_1(l_1,l_2)}{\partial l_1}=h_1f_1(l_1)F_2(l_2)+h_1\int_{l_2}^{\infty}f_1(t_2-l_2+l_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2+\beta_1f_1(l_1)$$

和$\frac{\partial N_2(l_1,l_2)}{\partial l_1}=-h_2\int_{l_1}^{\infty}f_2(l_2+t_1-l_1)f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1$

由此可得

$$\frac{\partial N_1(l_1,l_2)}{\partial l_1}-\frac{\partial N_2(l_1,l_2)}{\partial l_1}=h_1\int_{l_2}^{\infty}f_1(t_2-l_2+l_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2+\beta_1f_1(l_1)+h_2\int_{l_1}^{\infty}f_2(l_2+t_1-l_1)f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1>0 \tag{16}$$

通过式(16)，可以得知两个供应商的最优成本曲线最多只能相交一次[13]. 同样，根据 Friedman[17] 的研究，在与本文类似的两个凸函数的静态博弈模型中，必然存在着纳什均衡解. 因此，可以得到在两个供应商的生产期决策中有且只有唯一的一个纳什均衡解. 证毕.

引理 4 证明. 将制造商在延迟付款模式下的成本函数(7)展开可得 $C_M^2=\beta A+(h_1+h_2)B-C$. 其中 A 和 C 与引理 1 中的一致，而 B 则变化为

$$B=\int_{l_1}^{l_1+D}\int_0^{t_1-l_1+l_2}(D-(t_1-l_1))f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+\int_{L_2}^{l_2+D}\int_0^{t_2-l_2+l_1}(D-(t_2-l_2))f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2+\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}Df_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \tag{17}$$

求一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}C_M^2}{\mathrm{d}D}=\beta\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}D}+(h_1+h_2)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}D}+\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}D}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}C_m^2}{\mathrm{d}D}=-\beta\left[\int_{l_1+D}^{\infty}\int_0^{t_1-l_1+l_2}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+\int_{l_2+D}^{\infty}\int_0^{t_2-l_2+l_1}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right]+$$

$$(h_1+h_2)\left[\int_{l_1}^{l_1+D}\int_0^{t_1-l_1+l_2}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+\int_{l_2}^{l_2+D}\int_0^{t_2-l_2+l_1}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\right]+0\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}C_m^2}{\mathrm{d}D}=-\beta\left[1-F_1(l_1+D)F_2(l_2+D)\right]+(h_1+h_2)F_1(l_1+D)F_2(l_2+D)$$

求二阶导数可得

$$\frac{\mathrm{d}^2C_m^2}{\mathrm{d}D^2}=(\beta+h_1+h_2)f_1(l_1+D)f_2(l_2+D)>0$$

从而可知，制造商的最优缓冲期 D 必然使得 $\frac{\mathrm{d}C_m^2}{\mathrm{d}D}=0$，即 $F_1(l_1+D)F_2(l_2+D)=\frac{\beta}{(h_1+h_2+\beta)}$. 证毕.

引理 5 证明. 将供应链在集中决策下的成本函数式(9) 展开可得

$$C_C=h_1\left[\int_{L_2}^{\infty}\int_0^{t_2-L_2+L_1}\left[(t_2-L_2)-(t_1-L_1)\right]f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}(L_1-t_1)f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\right]+$$
$$h_2\left[\int_{L_1}^{\infty}\int_0^{t_1-L_1+L_2}\left[(t_1-L_1)-(t_2-L_2)\right]f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}(L_2-t_2)f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\right]+$$
$$\beta\left[\int_{L_1}^{\infty}\int_0^{t_1-L_1+L_2}(t_1-L_1)f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+\int_{L_2}^{\infty}\int_0^{t_2-L_2+L_1}(t_2-L_2)f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\right]\tag{18}$$

分别对零部件的提前期 L_1 与 L_2 求一阶导可得

$$\frac{\partial C_c}{\partial L_1}=h_1\left[F_1(L_1)F_2(L_2)+\int_{L_2}^{\infty}\int_0^{t_2-L_2+L_1}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right]-(h_2+\beta)\int_{L_1}^{\infty}\int_0^{t_1-L_1+L_2}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$
$$\frac{\partial C_c}{\partial L_2}=h_2\left[F_1(L_1)F_2(L_2)+\int_{L_1}^{\infty}\int_0^{t_1-L_1+L_2}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right]-(h_1+\beta)\int_{L_2}^{\infty}\int_0^{t_2-L_2+L_1}f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\tag{19}$$

由于存在 2 个决策变量，因此需要进一步求得关于(L_1,L_2) 的海赛尔矩阵

$$\frac{\partial^2C_c}{\partial L_1^2}=h_1\left[f_1(L_1)F_2(L_2)+\int_{L_2}^{\infty}f_1(t_2-L_2+L_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\right]+(h_2+\beta)\left[\int_0^{L_2}f_1(L_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2+\int_{L_1}^{\infty}f_2(t_1-L_1+L_2)f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1\right]$$
$$=(h_1+h_2+\beta)\left[f_1(L_1)F_2(L_2)+\int_{L_2}^{\infty}f_1(t_2-L_2+L_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\right]>0\tag{20}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2C_c}{\partial L_2^2}=(h_1+h_2+\beta)\left(F_1(L_1)f_2(L_2)+\int_{L_1}^{\infty}f_2(t_1-L_1+L_2)f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1\right)>0\tag{21}$$

利用代换可知，存在 $\int_{L_2}^{\infty}f_1(t_2-L_2+L_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2=\int_{L_1}^{\infty}f_2(t_1-L_1+L_2)f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1$. 从而可得

$$\frac{\partial^2C_c}{\partial L_1\partial L_2}=\frac{\partial^2C_c}{\partial L_2\partial L_1}=A(h_1+h_2+\beta)$$
$$A=\int_{L_2}^{\infty}f_1(t_2-L_2+L_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2\int_{L_1}^{\infty}f_2(t_1-L_1+L_2)f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1\tag{22}$$

根据式(20)，(21)，(22)，存在 $\frac{\partial^2C_c}{\partial L_1^2}\times\frac{\partial^2C_c}{\partial L_2^2}-\frac{\partial^2C_c}{\partial L_1\partial L_2}\times\frac{\partial^2C_c}{\partial L_2\partial L_1}>0$，海赛尔矩阵恒正定. 因此，供应链成本是关于零部件生产期(L_1,L_2) 的联合凸函数.