第 14 卷第 6 期
2011 年 6 月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 14 No. 6
Jun. 2011

随机需求下期权采购与预售联合决策研究①

慕银平，冯　毅，唐小我
（电子科技大学经济与管理学院，成都 610054）

摘要：市场波动几乎是每一个企业都必须面临的问题. 尤其对于产品提前期长而销售期相对较短的零售企业或新产品上市企业来说，市场波动所导致的产品短缺和库存积压为企业的经营带来了巨大的挑战. 基于此，如何降低市场波动所带来的风险便成为运营管理领域讨论的热门话题. 目前，学术界和企业界提出了许多降低市场波动风险的策略，归纳起来大致有两个方面：一方面，从产品采购入手，尽量增加采购的柔性. 另一方面，从产品销售入手，尽可能提前"锁定"部分需求. 本文基于集成的思想，同时考虑采购和销售两个方面，结合期权采购与预售两种策略，通过同时优化实物产品和期权的采购数量以及预售折扣来降低市场波动所带来的风险. 研究得出，企业的期望利润函数是关于实物产品采购量和期权采购量的联合凹函数，且证明了在销售期需求服从正态分布条件下存在唯一的最优预售折扣，并设计出了求解最优预售折扣的二分搜索算法. 最后运用数值算例进行了算法验证和结果比较分析.

关键词：期权采购；预售；随机需求；折扣率
中图分类号：F274　　文献标识码：A　　文章编号：1007－9807(2011)06－0047－10

0 引　言

市场波动几乎是每一个企业都面临的挑战. 尤其对于产品提前期长而销售期相对较短的零售企业和新产品上市企业来说，由于市场不确定所导致的产品缺货和库存积压为企业的经营带来了巨大的风险. 因此，如何降低市场不确定风险是运营管理领域研究的热门话题. 目前，学术界和企业界提出了许多降低需求风险的策略，归纳起来大致有两个方面：一方面，从产品采购入手，尽量增加采购的柔性. 目前企业应用比较广泛的是期权策略，即通过购买一定数量的选择权来降低由于需求波动所造成的缺货和积压风险. 如企业常用的回购条款（buy-back policies）[1]、备份协议（backup agreements）[2]、预定能力延期支付（pay-to-delay capacity reservation）[3]、柔性订货量（quantity flexibility）[4-5]等都是期权采购策略的特殊应用形式[6]. 另一方面，从产品销售入手，尽可能提前"锁定"部分需求. 目前企业应用比较广泛的是预售策略，即通过提供一定的折扣来提前销售产品，从而将部分随机需求变为确定性需求. 例如，中秋节月饼的销售企业通过预售月饼券的方式提前"锁定"部分需求. 亚马逊网站在新小说或新影碟上市之前往往通过提前打折预售的方式降低未来市场需求的不确定性.

学术界对于期权策略有两方面的研究. 一方面，从供应链协调的角度分析最优的柔性（单向、双向[7-9]）期权合同的设计与评价[10]，以及信息分享[11]等问题. 这些文献集中在分析通过调整成本参数使得分散化的决策能达到集中化决策的效果[12-13]. 同时有文献通过结合现货市场和期权、期货市场来研究供应链的协调策略问题[14-17].

① 收稿日期：2010－10－06；修订日期：2011－04－16.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（70602029）；国家自然科学基金重点项目（70932005）.
作者简介：慕银平（1976—），男，甘肃镇原人，博士，副教授. Email：muyingping@uestc.edu.cn

Haksöz 和 Seshadri 对该领域的研究做了非常完整的研究综述[18]. 关于期权策略研究的另一方面主要集中在期权采购问题上，Ritchken 和 Tapiero 研究了价格不确定条件下的期权采购与即时采购问题[19]. Schummer 和 Vohra 研究了单一购买者从多个供应商处购买期权的最优化问题[20]. 陈旭讨论了两个独立的零售商，在销售期初，零售商之间可以根据市场需求进行期权的买卖来调整自己的库存量，分析了期权采购及交易的最优数量及其对供应链的影响问题[21]. Haksöz 和 Kadam 从信用风险的角度研究了存在现货市场的供应组合风险管理问题[22]. Fu 等人研究了存在多种期权合同市场和现货市场的情况下购买者的最优采购策略问题，给出了期权合同最优组合满足的充分必要条件和最优期权合同组合中的每种期权合同的最优购买数量[23].

学术界关于预售策略的研究相对较少. Weng 和 Parlar 首次研究了企业通过打折进行提前销售，采用近似方法分析得出了企业的预售折扣[24]. Tang 等在 Weng 和 Parlar 的基础上假定预售期需求随机情况下的最优预售折扣问题，并分析了通过预售信息进行需求更新会带来企业收益的增加[25]. Shugan 和 Xie[26]，和 Xie 和 Shugan[27] 研究了服务提供商的预售策略. 分析发现通过预售可以使企业达到实施一度价格歧视的利润水平. Moe 和 Fader 通过实证研究证明了预售信息对新产品需求预测具有重要的意义[28]. McCardle 等研究了两个竞争零售商的最优预售策略问题[29]. Zhao 和 Stecke[30]，和 Prasad[31] 等研究了消费者期望价值对零售商预售决策的影响.

上述研究文献分别从(期权)采购或(预售)销售单方面来研究降低需求风险的策略. 然而，如果同时考虑采购和销售两个方面，如何优化能进一步降低需求风险、提升企业的效益? 目前为止，没有发现同时考虑期权和预售两种策略的研究文献. 本文带着这一问题，从集成的角度出发，将(期权)采购和(预售)销售两方面结合起来同时优化，即考虑企业在提前期通过采购部分期权以增加采购的柔性，同时通过折扣预售以提前锁定部分需求以降低需求的随机性. 论文通过构造期望利润模型分析了最优的实物产品和期权的采购数量以及最优的预售折扣问题.

1 联合决策模型

考虑一企业面临随机的市场需求和较长的采购提前期，在提前期开始时需要根据预测确定采购实物产品的数量 Q，采购价格为 w. 为了降低需求波动所带来的产品短缺或过剩的风险，企业通过购买一定数量的期权(选择权) M 来增加采购的柔性，购买价格为 w_o. 当提前期结束销售期开始时，企业根据所观察的需求状况决定执行期权的数量，执行价格为 w_e. 同时为了进一步降低需求不确定性所带来的风险，企业在提前期内实施预售，将一部分未来随机需求变为确定性需求. 为了鼓励顾客提前购买，企业预售产品的价格在市场价格 P 的基础上提供折扣 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，因而预售产品的价格变为 $(1-\alpha)p$. 假定市场中有 n 个潜在的消费者，有 r 概率的消费者会购买该企业的产品. 另外，并不是所有的消费者都会提前购买，根据 Weng 和 Parlar[24] 的研究假设提前购买的需求函数为 $D_1(\alpha) = n\alpha^f$，其中 $f \in (0, \infty)$ 表示消费者对预售折扣的敏感性，当 $0 < f < 1$ 时，很小的价格折扣可以带来大量的顾客提前购买; 当 $f > 1$ 时，要鼓励消费者提前购买必须提供很大的折扣; 当 $f = 1$ 时消费者对预售折扣的反应是线性关系. 定义销售期的需求函数为 $D_2(\alpha)$，假定每位消费者的购买是完全独立的，因此 $D_2(\alpha)$ 服从参数为 $[(1-\alpha^f)n, r]$ 的二项分布. 即

$$\mu(\alpha) = E[D_2(\alpha)] = (1-\alpha^f)nr \tag{1}$$

$$\sigma^2(\alpha) = \mathrm{Var}[D_2(\alpha)] = (1-\alpha^f)nr(1-r) \tag{2}$$

由式(2)可得，当 $\alpha = 0$ 时，$\sigma^2(0) = nr(1-r)$，即不采用预售时，需求的波动性为 $nr(1-r)$，通过预售可将需求波动降为 $(1-\alpha^f)nr(1-r)$. 由于市场潜在需求规模 n 通常较大，如，至少有数百位消费者，根据 Ross[32] 的研究结果，当 $(1-\alpha^f)nr(1-r) \geqslant 10$ 时，正态分布可以很好的代替二项分布，因此假定销售期需求 $D_2(\alpha)$ 服从均值为 $\mu(\alpha)$，方差为 $\sigma(\alpha)$ 的正态分布，其中 $\mu(\alpha)$ 和 $\sigma(\alpha)$ 分别由式(1)、(2)给出. 定义销售期需求

的概率密度函数和分布函数分别为 $f_\alpha(\cdot)$ 和 $F_\alpha(\cdot)$.

设单位产品残值为 v，缺货成本为 s. 决策顺序为：提前期开始时，企业决定最优的预售折扣 α，并采购 $n\alpha^f$ 单位实物产品用以满足提前期的预售需求 $D_1(\alpha)$. 同时根据提前期的预售数量预测销售期的需求函数，并采购 Q 单位实物产品和 M 单位期权以满足销售期的需求 $D_2(\alpha)$. 提前期结束时，根据所观察的市场需求状况决定执行期权的数量. 根据该决策顺序，构建企业利润函数 $\tilde{\pi}_C(Q,M,\alpha)$ 如式(3) 所示.

$$\tilde{\pi}_C(Q,M,\alpha)=\begin{cases}[(1-\alpha)p-w]D_1(\alpha)+pD_2(\alpha)-wQ-w_oM+v(Q-D_2(\alpha)), & D_2(\alpha)\leqslant Q\\ [(1-\alpha)p-w]D_1(\alpha)+pD_2(\alpha)-wQ-w_oM-w_e[D_2(\alpha)-Q], & Q<D_2(\alpha)\leqslant Q+M\\ [(1-\alpha)p-w]D_1(\alpha)+p(Q+M)-wQ-(w_o+w_e)M-s[D_2(\alpha)-Q-M], & D_2(\alpha)>Q+M\end{cases}\quad(3)$$

为了保证模型的计算结果与实际相符，需要作如下假设：

假设 1　$0<w\leqslant w_e+w_o$，即购买并执行一单位期权的成本总和将不低于采购一单位实物产品的成本；

假设 2　$0<w_o+w_e\leqslant p$，即单位产品的市场价格高于购买并执行单位期权的成本；

假设 3　$0<v\leqslant w\leqslant(1-\alpha)p$，即单位产品的预售价格将高于采购价格，同时高于残值；

假设 4　$0<v\leqslant w_e$，即单位期权的执行价格高于产品残值.

假设 1 和 3 非常直观；假设 2 表明购买期权将有利润可图；假设 4 表明单位期权的执行价格不会低于产品残值，否则企业将会执行所有的期权.

根据式(3) 的企业利润函数可以写出企业期望利润函数 $\pi_C(Q,M,\alpha)=E[\tilde{\pi}_C(Q,M,\alpha)]$ 如下：

$$\pi_C(Q,M,\alpha)=-wQ-w_oM+[(1-\alpha)p-w]\alpha^f n+\int_0^Q[vQ+(p-v)y_\alpha]f_\alpha(y_\alpha)\mathrm{d}y_\alpha+\int_Q^{Q+M}[w_eQ+(p-w_e)y_\alpha]f_\alpha(y_\alpha)\mathrm{d}y_\alpha+\int_{Q+M}^{\infty}[(p+s)Q+(p+s-w_e)M-sy_\alpha]f_\alpha(y_\alpha)\mathrm{d}y_\alpha\quad(4)$$

将式(4) 期望利润函数对 Q 和 M 求一阶、二阶偏导，得

$$\frac{\partial\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial Q}=-(p+s-w_e)F_\alpha(Q+M)-(w_e-v)F_\alpha(Q)+p+s-w$$

$$\frac{\partial\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial M}=-(p+s-w_e)F_\alpha(Q+M)+p+s-w_e-w_o$$

$$\frac{\partial^2\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial Q^2}=-(p+s-w_e)f_\alpha(Q+M)-(w_e-v)F_\alpha(Q)$$

$$\frac{\partial^2\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial M^2}=\frac{\partial^2\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial Q\partial M}=\frac{\partial^2\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial M\partial Q}=-(p+s-w_e)f_\alpha(Q+M)$$

根据 Hessian 矩阵可以判断出期望利润函数是关于 Q 和 M 的联合凹函数，因此，令 $\frac{\partial\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial Q}=0$，$\frac{\partial\pi_C(Q,M,\alpha)}{\partial M}=0$，可得最优的实物产品和期权采购量 Q^* 和 M^* 满足

$$F_\alpha(Q^*)=\frac{w_e+w_o-w}{w_e-v}=\gamma,F_\alpha(Q^*+M^*)=\frac{p+s-w_e-w_o}{p+s-w_e}=\chi$$

由于假设 $F_\alpha(\cdot)$ 为服从均值为 $\mu(\alpha)$，方差为 $\sigma(\alpha)$ 的正态分布的概率分布函数，从而可得最优的 Q^* 和 M^* 满足

$$Q^*=\mu(\alpha)+z_\gamma\sigma(\alpha)=(1-\alpha^f)nr+z_\gamma\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}\quad(5)$$

$$M^*=(z_\chi-z_\gamma)\sigma(\alpha)=(z_\chi-z_\gamma)\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}\quad(6)$$

其中，$z_\gamma=\Phi^{-1}[(w_e+w_o-w)/(w_e-v)]$，$z_\chi=\Phi^{-1}[(p+s-w_e-w_o)/(p+s-w_e)]$，$\Phi^{-1}(\cdot)$ 表示标准正态分布的逆累积分布函数.

2　比较静态分析

由式(5) 和(6) 可以看出，最优的实物产品和期

权采购量 Q^* 和 M^* 与 α、n、r、f、z_γ 和 z_χ 等参数有关，下面分析各个参数的变化对最优采购量的影响.

首先，分别将 Q^* 和 M^* 对预售折扣率 α 求一阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}\alpha}=-\frac{fz_\gamma\alpha^{f-1}\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}}{2(1-\alpha^f)}-fnr\alpha^{f-1}<0,$$

$$\frac{\mathrm{d}M^*}{\mathrm{d}\alpha}=-\frac{f(z_x-z_\gamma)\alpha^{f-1}\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}}{2(1-\alpha^f)}<0$$

由求导结果可以看出，当预售折扣率 α 增加时，最优采购量 Q^* 和 M^* 将减少. 这是由于增加折扣率 α 将吸引更多的顾客提前购买，从而减少了销售期的市场需求，因而最优采购量 Q^* 和 M^* 都将相应减少.

然后，分别将 Q^* 和 M^* 对市场规模 n 求一阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}n}=\frac{z_\gamma\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}}{2n}+r(1-\alpha^f)>0,$$

$$\frac{\mathrm{d}M^*}{\mathrm{d}n}=\frac{(z_\chi-z_\gamma)\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}}{2n}>0$$

由分析结果可以得出，当市场规模 n 增加时，最优采购量 Q^* 和 M^* 将同时递增. 该结果非常直观，由于潜在的顾客数量增加时，需求将会增加，因而为了满足需求，最优采购量 Q^* 和 M^* 也必须相应增加.

其次，分别将 Q^* 和 M^* 对消费者购买概率 r 求一阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}r}=\frac{z_\gamma(1-2r)\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}}{2r(1-r)}+n(1-\alpha^f),$$

$$\frac{\mathrm{d}M^*}{\mathrm{d}r}=\frac{(z_\chi-z_\gamma)(1-2r)\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}}{2r(1-r)}$$

根据求导结果可得，当 $r\leqslant 1/2$ 时，上两式将同时为正. 即，当消费者购买概率 r 很小时，r 增加，最优采购量 Q^* 和 M^* 将同时增加. 而当 $r>1/2$ 时，最优期权采购量 M^* 将随着 r 增加而减少. 由于 $\frac{\mathrm{d}^2Q^*}{\mathrm{d}r^2}<0$，从而，$Q^*$ 是关于 r 的严格凹函数. 因此，存在唯一的 $\hat{r}\in(1/2,1)$，使得，当 $r>\hat{r}$ 时，$\frac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}r}<0$. 即，当消费者购买概率 r 很大时，r 增加，最优采购量 Q^* 和 M^* 将减小. 主要原因是当 r 很大时，增加 r 虽然增加了销售期需求的均值，但同时减小了需求的方差，即减小了市场需求的波动性，从而导致最优采购量 Q^* 和 M^* 减小.

将 Q^* 和 M^* 分别对消费者转移参数 f 求导可以发现结果总为正，即 f 越大，消费者对价格折扣越不敏感，从而需要采购更多的实物产品和期权以满足销售期的需求.

最后，将 Q^* 和 M^* 对 z_γ 求导发现，$\frac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}z_\gamma}>0$，$\frac{\mathrm{d}M^*}{\mathrm{d}z_\gamma}<0$. 即当服务水平设定的越高，最优实物采购量 Q^* 将越大，而由于总需求不变，因此最优期权采购量 M^* 将越小.

3 最优预售折扣决策

将式(5)和(6)的计算结果代入式(4)期望利润函数，可得

$$\pi_C(\alpha)=[(1-\alpha)p-w]\alpha^f n+(p-w)\times(1-\alpha^f)nr-[(w_e-v)\phi(z_\gamma)+(p+s-w_e)\phi(z_\chi)]\times\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}\tag{7}$$

将式(7)对 α 求一阶导，可得

$$\frac{\mathrm{d}\pi_C(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\alpha^{f-1}\Big[nf(p-w)(1-r)+[(w_e-v)\phi(z_\gamma)+(p+s-w_e)\phi(z_\chi)]\times\frac{\sqrt{nr(1-r)}f}{2\sqrt{1-\alpha^f}}-np(f+1)\alpha\Big]\tag{8}$$

因此，要使 $\frac{\mathrm{d}\pi_C(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=0$，则必须使 $\alpha=0$，或

$$nf(p-w)(1-r)+[(w_e-v)\phi(z_\gamma)+(p+s-w_e)\phi(z_\chi)]\frac{\sqrt{nr(1-r)}f}{2\sqrt{1-\alpha^f}}-np(f+1)\alpha=0\tag{9}$$

令 $b=(w_e-v)\phi(z_\gamma)+(p+s-w_e)\phi(z_\chi)$，$K(\alpha)=nf(p-w)(1-r)+\frac{b\sqrt{nr(1-r)}f}{2\sqrt{1-\alpha^f}}$，可得如下命题.

命题 1 对于 $\alpha\in(0,1)$，如下条件成立:

(a) $K(\alpha)$ 是 α 的严格增函数;

(b) 当 $\alpha\to 1$，$K(\alpha)\to+\infty$;

(c) 当 $f \geqslant 1$ 时,$K(\alpha)$ 是关于 α 的严格凸函数;

(d) 当 $f < 1$ 时,存在 $\hat{\alpha}$,当 $\alpha \in (0, \hat{\alpha})$ 时,$K(\alpha)$ 是关于 α 的严格凹函数,当 $\alpha \in (\hat{\alpha}, 1)$,$K(\alpha)$ 是关于 α 的严格凸函数,且 $K(\alpha)$ 的二阶导数满足 $K''(\hat{\alpha}) = 0$.

证明　由 $K(\alpha)$ 的定义式可立即得出(b)成立.

将 $K(\alpha)$ 对 α 求一阶导数,得

$$K'(\alpha) = \frac{bf^2\alpha^{f-1}\sqrt{nr(1-r)}}{4\sqrt{(1-\alpha^f)^3}} > 0$$,因此(a)成立.

将 $K(\alpha)$ 对 α 求二阶导数,得

$$K''(\alpha) = \frac{bf^2\sqrt{nr(1-r)}}{4}\left[\frac{(f-1)\alpha^{f-2}}{\sqrt{(1-\alpha^f)^3}} + \frac{3f\alpha^{2f-2}}{2\sqrt{(1-\alpha^f)^5}}\right]$$

$$= \frac{bf^2\alpha^{f-2}\sqrt{nr(1-r)}}{4\sqrt{(1-\alpha^f)^3}}\left[f-1+\frac{3f\alpha^f}{2(1-\alpha^f)}\right] \tag{10}$$

由式(10)可以看出,当 $f \geqslant 1$ 时,$K''(\alpha) > 0$,因此(c)成立.

当 $f < 1$,令 $G(\alpha) = f - 1 + \dfrac{3f\alpha^f}{2(1-\alpha^f)}$. 由式(10)可以看出,$K''(\alpha)$ 的符号取决于 $G(\alpha)$. 将 $G(\alpha)$ 关于 α 求一阶导数得,$G'(\alpha) = \dfrac{3f^2\alpha^{f-1}}{2(1-\alpha^f)^2} > 0$. 因此,$G(\alpha)$ 是关于 α 的严格增函数. 因为,当 $\alpha \to 1$ 时,$G(\alpha) \to +\infty$,当 $\alpha = 0$ 时,$G(\alpha) = f - 1 < 0$. 因此可知,存在 $\hat{\alpha} \in (0,1)$,当 $\alpha \in (0, \hat{\alpha})$ 时,$G(\alpha) < 0$; 当 $\alpha \in (\hat{\alpha}, 1)$ 时,$G(\alpha) > 0$; 且 $G(\hat{\alpha}) = 0$. 当 $G(\alpha) < 0$ 时,$K''(\alpha) < 0$,意味着 $K(\alpha)$ 是关于 α 的严格凹函数; 当 $G(\alpha) > 0$ 时,$K''(\alpha) > 0$,意味着 $K(\alpha)$ 是关于 α 的严格凸函数,且 $G(\hat{\alpha}) = 0$ 意味着 $K''(\alpha) = 0$. 因此(d)得证.

证毕.

定理1　$\dfrac{d\pi_C(\alpha)}{d\alpha} = 0$ 存在三个不同的解 α_1,α_2 和 α_3,且 $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$.

证明　由式(8)可知 $\alpha_1 = 0$. 因此,只需要证明式(9)存在两个解 α_2 和 α_3,且 $0 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$.

根据 $K(\alpha)$ 的定义,式(8)可写成

$$\frac{d\pi_C(\alpha)}{d\alpha} = \alpha^{f-1}\left[K(\alpha) - (f+1)pn\alpha\right] \tag{11}$$

分两种情形分别进行讨论:

情形1　当 $f \geqslant 1$ 时,由命题1(c)知,$K(\alpha)$ 关于 α 的严格凸函数,且

$$K(\alpha = 0) = (p - w)fn(1 - r) + \frac{bf\sqrt{nr(1-r)}}{2} > 0$$

情形2　当 $f < 1$ 时,由命题1(d)知,存在 $\hat{\alpha}$,使得当 $\alpha \in (0, \hat{\alpha})$ 时,$K(\alpha)$ 是关于 α 的严格凹函数,当 $\alpha \in (\hat{\alpha}, 1)$,$K(\alpha)$ 是关于 α 的严格凸函数.

由式(11)可知,$\dfrac{d\pi_C(\alpha)}{d\alpha}$ 的值取决于 $K(\alpha)$ 和线性函数 $L(\alpha) \equiv (f+1)pn\alpha$ 的相对大小. 根据命题1,将情况1和情况2分别表示为图1和图2.

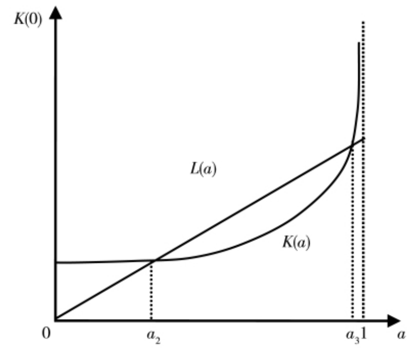

图1　情形1　$f \geqslant 1$

Fig. 1 Case1　$f \geqslant 1$

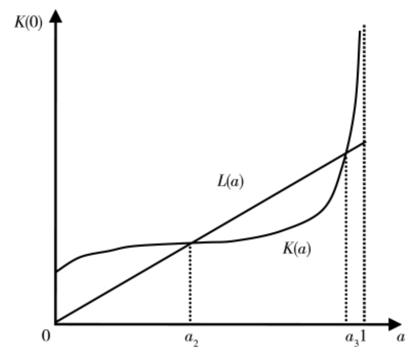

图2　情形2　$f < 1$

Fig. 2 Case2　$f < 1$

假设在两种情况下,都存在 $K(\alpha) \geqslant L(\alpha)$. 由式(11)可知,该假设意味着 $\dfrac{d\pi_C(\alpha)}{d\alpha} =$

$\alpha^{f-1}[K(\alpha)-(f+1)pn\alpha]=0$ 除 $\alpha=0$ 外，最多只有一个解. 因为当 $K(\alpha)\geqslant L(\alpha)$ 时，$\frac{\mathrm{d}\pi_C(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\alpha^{f-1}[K(\alpha)-(f+1)pn\alpha]\geqslant 0$，意味着期望利润随着 α 的增加而递增. 因此，最优解应该是 $\alpha=1$. 然而，当 $\alpha=1$ 时，期望利润 $\pi_C(\alpha)=-nw<\pi_O$. 因而，该假设不成立. 其中，π_O 是不采用预售策略时的期望利润，形式如下.

$$\pi_O=(p-w)nr-b\sqrt{nr(1-r)}$$

对情况 1 而言，由于 $K(\alpha)$ 是关于 α 递增的凸函数，$L(\alpha)$ 是线性函数，因此，如图 1 所示，$\frac{\mathrm{d}\pi_C(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=0$ 有两个可行解 α_2 和 α_3. 对情况 2 而言，如果 $K(\alpha)$ 和 $L(\alpha)$ 的第一个交点的值大于 $\hat{\alpha}$，即 $\alpha_2\geqslant\hat{\alpha}$，则结果与情况 1 完全一致. 而如果 $\alpha_2<\hat{\alpha}$，因为当 $\alpha\in(0,\hat{\alpha})$ 时 $K(\alpha)$ 是关于 α 递增的凹函数，因此，在区间 $(\alpha_2,\hat{\alpha})$，$K(\alpha)$ 和 $L(\alpha)$ 将不会相交，即 $K(\hat{\alpha})<L(\hat{\alpha})$. 而当 $\alpha\in(\hat{\alpha},1)$ 时，由于 $K(\alpha)$ 是关于 α 递增的凸函数，因此，在区间 $(\hat{\alpha},1)$，$K(\alpha)$ 和 $L(\alpha)$ 仅有一个交点. 由命题 1(b) 知，$\alpha_3<1$. 因此，定理 1 得证. 证毕.

由图 1 和图 2 可以看出，当 $\alpha\in(0,\alpha_2)$ 时，$K(\alpha)>L(\alpha)$，即增加 α 可以提高企业的期望利润；当 $\alpha\in(\alpha_2,\alpha_3)$ 时，$K(\alpha)<L(\alpha)$，即增加 α 将减少企业的期望利润；当 $\alpha\in(\alpha_3,1]$ 时，$K(\alpha)>L(\alpha)$，即增加 α 将提高企业的期望利润. 然而，由于 $\pi_C(\alpha=1)=-nc$，因此可得，使期望利润 $\pi_C(\alpha)$ 获得最大值的折扣率将存在于 $\alpha=\alpha_2$ 处. 因此，可以得到如下定理.

定理 2 利润函数 $\pi_C(\alpha)$ 的最优值出现在 $\alpha^*=\alpha_2$ 处，且 α^* 是唯一的.

推论 1 $\alpha^*>\frac{f}{f+1}\frac{p-w}{p}(1-r)$

证明 由式(9) 可知，最优预售折扣 α^* 满足如下等式：

$$\frac{f}{f+1}\frac{p-w}{p}(1-r)+\frac{bf\sqrt{r(1-r)}}{2(f+1)p\sqrt{[(1-\alpha^*)^f]n}}-\alpha^*=0$$

由于 $\frac{bf\sqrt{r(1-r)}}{2(f+1)p\sqrt{[1-(\alpha^*)^f]n}}>0$，因此，$\alpha^*>\frac{f}{f+1}\frac{p-w}{p}(1-r)$，推论 1 得证. 证毕.

4 算法设计

采用二分搜索的方法设计算法寻找最优解 α_2. 具体算法如下：令 LB 表示 α 的取值下限，UB 表示 α 的取值上限.

```
初始化: LB = f/(f+1) · (p−w)/p · (1−r), UB = 1.
第 1 步: α = (LB + UB)/2
第 2 步: 如果{K(α) = L(α) 且 π_C(α) > 0}
        {结束.}
        如果{K(α) = L(α) 且 π_C(α) ≤ 0}
        {  UB = α
           返回第 1 步. }
第 3 步: 如果{K(α) > L(α) 且 π_C(α) > 0} 则
        {  LB = α
           返回第 1 步. }
        如果{K(α) > L(α) 且 π_C(α) ≤ 0} 则
        {  UB = α
           返回第 1 步. }
第 4 步: 如果 K(α) < L(α) 则
        {  UB = α
           返回第 1 步. }
```

上述算法的第 2 步和第 3 步体现出，当 $K(\alpha)\geqslant L(\alpha)$，$\alpha$ 的取值将处于区间 $(0,\alpha_2]$ 或 $[\alpha_3,1)$ 中. 如果 $\pi_C(\alpha)>0$，则意味着 α 的取值存在于区间 $(0,\alpha_2]$ 中，否则，意味着 α 的取值存在于区间 $[\alpha_3,1)$ 中.

5 数值分析

首先，依据上节设计的算法求解最优预售折

扣 α^*，然后将计算结果代入式(5)和(6)计算最优的实物产品订购数量 Q^* 和期权订购数量 M^*，并计算最优期望利润 π_C^*. 同时计算

(i) 不预售而只采购期权时企业的期望利润

$$\pi_O = (p-w)nr - [(w_e - v)\phi(z_\gamma) + (p+s-w_e)\phi(z_\chi)]\sqrt{nr(1-r)}$$

(ii) 不采购期权而只预售时企业的期望利润

$$\pi_A = [(1-\alpha)p - w]\alpha^f n + (p-w)(1-\alpha^f)nr - [(p+s-v)\phi(z_{\gamma'})]\sqrt{(1-\alpha^f)nr(1-r)}$$

(iii) 不采购期权也不预售时企业的期望利润

$$\pi = (p-w)nr - [(p+s-v)\phi(z_\gamma)]\sqrt{nr(1-r)}$$

其中，$z_{\gamma'} = \Phi^{-1}[(p+s-w)/(p+s-v)]$.

将计算所得的不同经营策略(期权采购、预售、不采购期权也不预售)下企业的期望利润与联合决策的最优期望利润 π_C^* 进行比较，分析不同情况下联合决策带来的企业利润提升幅度.

定义 (i) I_O^* 为联合决策较不预售而只采购期权情形的企业期望利润提升幅度. 其中

$$I_O^* = \frac{\pi_C^*(\alpha^*) - \pi_O}{\pi_O} \times 100\%$$

(ii) I_A^* 为联合决策较不采购期权而只预售情形的企业期望利润提升幅度. 其中

$$I_A^* = \frac{\pi_C^*(\alpha^*) - \pi_A}{\pi_A} \times 100\%$$

(iii) I^* 为联合决策较不采购期权也不预售情形的企业期望利润提升幅度. 其中

$$I^* = \frac{\pi_C^*(\alpha^*) - \pi}{\pi} \times 100\%$$

相关参数赋值如下: $r = 0.5$, $n = 500$, $p = 1$, $w = 0.5$, $w_o = 0.15$, $w_e = 0.4$, $v = 0.25$, $s = 4.25$. 计算结果如表 1 所示.

表 1　不同 f 值下的最优决策结果

Table 1 Optimal solutions with different f

f	Q^*	M^*	α^*	π_C^*	π_A	π_O	π	I_A^* (%)	I_O^* (%)	I^* (%)
0.1	75.48	14.37	0.024	200.37	199.36	120.61	118.80	0.507	66.14	68.66
0.5	173.00	21.62	0.085	145.35	143.84	120.61	118.80	1.050	20.51	22.35
1.0	214.83	24.07	0.123	128.69	127.02	120.61	118.80	1.315	6.706	8.329
2.0	238.55	25.35	0.164	121.82	120.05	120.61	118.80	1.474	1.008	2.544
5.0	245.10	25.68	0.205	120.62	118.81	120.61	118.80	1.523	0.007	1.528
15.0	245.18	25.69	0.230	120.61	118.80	120.61	118.80	1.524	0.000	1.521

由表 1 的分析结果可以看出，随着顾客转移参数 f 的增加，最优预售折扣逐渐增加，同时，销售期的采购量(实物产品采购量 Q^* 和期权采购量 M^*)也在相应增加，而企业的期望利润却在逐渐减少. 主要是因为随着顾客转移参数的增加，顾客对预售折扣的敏感性下降，从而为了吸引顾客提前购买，只能提供更高的预售折扣. 同时由于提前购买的顾客减少，因而销售期的需求将增加，从而销售期的采购量将相应增加. 另外，由于提前购买的顾客人数减少，导致销售期的需求波动增加，从而企业的期望利润下降. 根据不同经营策略(联合决策、预售、期权采购、不采购期权也不预售)下的企业期望利润比较结果可以看出，联合决策相对于预售策略的利润提升幅度随着 f 的增加而增加，而相对于期权采购策略和不采购期权也不预售策略的利润提升幅度随着 f 的增加而减少. 说明当顾客对预售折扣不敏感时，期权采购策略对企业利润的提升幅度最大，而预售策略带来的利润提升幅度将不明显，反之亦然. 从而也告诉企业，在顾客转移参数很大的情况下实施期权采购策略对企业比较有利，当转移参数超过某一数值(如本例中 >15)时单一的期权采购策略可以替代联合决策; 而在顾客转移参数很小的情况下实施预售策略对企业比较有利，当转移参数低于某一数值(如本例中 <0.1)时单一的预售策略可以替代联合决策.

6 结束语

论文分析了面向随机需求的零售企业通过柔性采购(期权)和提前销售(预售)联合决策的方式以缓解需求波动带来的产品短缺和库存积压的风险.结合期权采购与预售两种策略,构建期望利润模型,同时优化实物产品和期权的采购数量以及预售折扣以最大化企业的期望利润.研究发现,期望利润函数是关于实物产品采购量和期权采购量的联合凹函数.且在需求满足正态分布的条件下给出了最优的实物产品和期权采购量,并证明了最优预售折扣的存在性和唯一性.最后,设计出了求解最优预售折扣的二分搜索算法,并运用数值算例进行了算法验证和结果比较分析.

论文的进一步研究将分别从两个方面展开:一方面,将本文关于预售期需求为确定性的假设拓展为随机需求,并分析最优的(实物产品和期权)采购量和预售折扣率问题.另一方面,结合资金约束问题,考虑同时存在市场需求波动和企业资金不足双重风险下的企业采购和预售问题.因为预售不仅可以提前"锁定"部分需求,减小销售期需求的不确定性,同时预售还可以提前收回部分资金以缓解资金短缺的压力.与此同时,期权采购不仅可以增加采购的柔性,并由于期权采购价格一般低于实物产品采购价格,从而期权采购还可以短期内缓解企业采购资金不足的压力.分析企业面临市场需求波动和资金约束情形下的最优实物产品和期权采购数量及最优的预售折扣率问题.

参 考 文 献:

[1] 梁 罗,盛方正. 基于期权思想的回购契约对零售商最优决策影响[J]. 系统管理学报,2010,19(4):397 - 401.
Liang Luo, Sheng Fang-zheng. Influence of buyback contract with options on optimal decision of retailer[J]. Journal of Systems & Management, 2010, 19(4): 397 - 401. (in Chinese)

[2] Eppen G D, Iyer A V. Backup agreements in fashion buying—The value of upstream flexibility[J]. Management Science, 1997, 43(11): 1469 - 1484.

[3] Brown A O, Lee H L. Optimal pay-to-delay capacity reservation with application to the semiconductor industry[R]. Working Paper, Stanford, CA: Department of Industrial Engineering and Engineering Management, Stanford University, 1997.

[4] Bassok Y, Anupindi R. Analysis of supply contracts with total minimum commitment[J]. IIE Transactions, 1997, 9(5): 373 - 381.

[5] Tsay A A, Lovejoy W. Quantity flexibility contracts and supply chain performance[J]. Journal Manufacturing and Service Operations Management, 1999, 1(2): 89 - 111.

[6] 宁 钟,林 滨. 供应链风险管理中的期权机制[J]. 系统工程学报,2007,22(2):141 - 147.
Ning Zhong, Lin Bin. Option mechanism in supply chain risk management[J]. Journal of Systems Engineering, 2007, 22(2): 141 - 147. (in Chinese)

[7] 胡本勇,王性玉,彭其渊. 基于双向期权的供应链柔性契约模型[J]. 管理工程学报,2008,22(4):79 - 84.
Hu Ben-yong, Wang Xing-yu, Peng Qi-yuan. Supply chain flexibility contract model based on bidirectional options[J]. Journal of Industrial Engineering/Engineering Management, 2008, 22(4): 79 - 84. (in Chinese)

[8] Wang Q Z, Tsao D. Supply contract with bidirectional options: The buyer's perspective[J]. International Journal of Production Economics, 2006, 101(1): 30 - 52.

[9] 李 娟,黄培清,赵晓敏. 基于更新信息的两级供应链双向期权合同研究[J]. 系统工程学报,2008,23(3):295 - 301.
Li Juan, Huang Pei-qing, Zhao Xiao-min. Study on bidirectional options contract for two-stage supply chain based on updating information[J]. Journal of Systems Engineering, 2008, 23(3): 295 - 301. (in Chinese)

[10] 陈祥锋,朱晨波. 供应链采购管理中的期权合同价值研究[J]. 系统工程学报,2007,22(4):402 - 406.

Chen Xiang-feng, Zhu Chen-bo. Real options and supply chain procurement contracts [J]. Journal of Systems Engineering, 2007, 22(4): 402 - 406. (in Chinese)

[11] Barnes-Schuster D, Bassok Y, Anupindi R. Coordination and flexibility in supply contracts with options [J]. Manufacturing and Service Operations Management, 2002, 4 (3): 171 - 207.

[12] Cachon G., Lariviere M A. Contracting to assure supply: How to share demand forecasts in a supply chain [J]. Management Science, 2001, 47 (5): 629 - 646.

[13] Cheng F, Ettl M, Lin G Y, et al. Flexible Supply Contracts via Options [R]. Working Paper, J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY: IBM T 2003.

[14] Wu D J, Kleindorfer P R, Zhang J E. Optimal bidding and contracting strategies for capital-intensive goods [J]. European Journal of Operational Research, 2002, 137(3): 657 - 676.

[15] Kleindorfer P, Wu D J. Integrating long- and short-term contracting via business-to-business exchanges for capital-intensive industries [J]. Management Science, 2003, 49(11): 1597 - 1615.

[16] Spinler S, Huchzermeier A, Kleindorfer P R. Risk hedging via options contracts for physical delivery [J]. OR Spectrum, 2003, 25: 379 - 395.

[17] Wu D J, Kleindorfer P R. Competitive options, supply contracting and electronic markets [J]. Management Science, 2005, 51(3): 452 - 466.

[18] Haksöz Ç, Seshadri S. Supply chain operations in the presence of spot market: A review with discussion [J]. Journal of the Operational Research Society, 2007, 58(11): 1412 - 1429.

[19] Ritchken P H, Tapiero C S. Contingent claims contracting for purchasing decisions in inventory management [J]. Operations Research, 1986, 34(6): 864 - 870.

[20] Schummer J, Vohra R V. Auctions for procuring options [J]. Operations Research, 2003, 51(1): 41 - 51.

[21] **陈 旭. 考虑期权合同供应链的零售商订货研究** [J]. **管理科学学报**, 2006, 9(3): 17 - 23.
Chen Xu. Retailer's procurement decisions for supply chain with options contracts [J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(3): 17 - 23. (in Chinese)

[22] Haksöz Ç, Kadam A. Supply portolio risk [J]. Journal of Operational Risk, 2009, 4(1): 59 - 77.

[23] Fu Q, Lee C Y, Teo C P. Procurement management using option contracts: Random spot price and the portfolio effect [J]. IIE Transactions, 2010, 42: 793 - 811.

[24] Weng Z K, Parlar M. Integrating early sales with production decisions: Analysis and insights [J]. IIE Transactions, 1999, 31: 1051 - 1060.

[25] Tang C S, Rajaram K, Alptekinoğlu A, et al. The benefits of advance booking discount programs: Model and analysis [J]. Management Science, 2004, 50(4): 465 - 478.

[26] Shugan S M, Xie J. Advance pricing of services and other implications of separating purchase and consumption [J]. Journal of Service Research, 2000, 2: 227 - 239.

[27] Xie J, Shugan S M. Electronic tickets, smart cards, and online prepayments: When and how to advance sell [J]. Marketing Science, 2001, 20 (3): 219 - 243.

[28] Moe W W, Fader P S. Using advance purchase orders to forecast new product sales [J]. Marketing Science, 2002, 21 (3): 347 - 364.

[29] McCardle K, Rajaram K, Tang C D. Advance booking discount programs under retail competition [J]. Management Science, 2004, 50: 701 - 708.

[30] Zhao X, Stecke K E. Pre-orders for new to-be-released products considering consumer loss aversion [J]. Productions and Operations Management, 2010, 19(2): 198 - 215.

[31] Prasad A, Stecke K E, Zhao X. Advance selling by a newsvendor retailer [J]. Productions and Operations Management, 2010, article in press.

[32] Ross S. A First Course in Probability [M]. New York: Macmillan, 1976.

Integrating option procurement with advance selling under demand uncertainty

MU Yin-ping, FENG Yi, TANG Xiao-wo

School of Management and Economics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China

Abstract: Market variation is a serious problem which almost every firm will encounter in her operations. Especially for the retail industries which the lead time is relatively longer than the sales season, or for the firms which sell new products, the shortage and overstock induced by market dynamic is a great challenge. For this reason, how to decrease the risks which induced by market dynamic has become a hot topic in operations management area. Recently, there are two research streams on this topic. One is that increase the procurement flexibility, the other one is "lock" a part of demand in advance. This paper integrates both streams together by considering option procurement and advance selling simultaneously. By developing profit maximization model, the paper analyzes the optimal quantities of firm products and options and the optimal discount rate for advance selling. And concluding that the expectation profit function is a joint concave function of procurement quantities of firm products and options, and there exist the unique optimal discount rate of advance selling under normal distribution demand. Finally, the paper designs a binary search algorithm to compute the optimal discount rate. The numerical examples give the comparing for different results.

Key words: option procurement; advance selling; demand uncertainty; discount rate