

部分中间产出作为最终产品的两阶段合作效率^①

查勇, 梁樑, 苟清龙, 毕功兵
(中国科学技术大学管理学院, 合肥 230026)

摘要: 网络 DEA 模型研究多个进程和多个子系统的复杂系统的效率度量. 针对中间产出无法为第 2 阶段完全消耗的情形, 传统 DEA 模型对系统效率的评价偏高, 已有网络 DEA 模型则对系统效率的评价偏低. 本文提出部分中间产出作为最终产品, 进入流通渠道的两阶段效率模型, 用来测度两阶段生产过程的真实效率. 采用乘积形式描述两阶段合作的特征, 给出不同阶段效率的上下界, 并将某个阶段效率作为参数, 将非线性效率模型转变成线性规划模型. 数值分析验证了新方法的有效性和可行性.

关键词: 网络 DEA 模型; 合作效率; 乘积形式; 两阶段模型

中图分类号: N94 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2011)07-0021-10

0 引言

传统的 DEA 模型把决策单元的处理过程看成是一个黑匣子, 不考虑中间过程以及可能产生的中间产品. 对于一个复杂系统而言, 它可能包含多个中间过程. 如果完全忽略这些子生产过程, 在对系统效率进行度量时可能会产生较大偏差, 而且中间过程和各个子单元的效率也无法衡量.

自 Shephard and Färe^[1] 提出利用网络模型来描述复杂组织和问题以来, 研究者开始高度关注网络模型的效率度量. 为了精确描述决策单元的内部结构, 他们打开黑匣子, 将一个较大的决策单元看成由多个子单元组成, 伴随着中间产出的生产和消耗. Färe 等^[2-4] 进行了初步的研究. 着眼于多阶段生产的转变过程, Färe and Grosskopf^[4] 提出建立柔性网络 DEA 模型框架来进行不同单元之间的资源和中间产品的配置以及多个阶段的动态生产环境, 这在传统 DEA 模型中都没有涉及. 他们在 DEA 模型中加入线性不等式约束来描述

其网络特性. Castelli 等^[5] 提出利用类 DEA(DEA-like) 模型来评估相互依赖的、非同质的多个决策单元, 以期描述不同子单元之间的相互作用. 在类 DEA 模型的基础上, Amirteimoori 等^[6] 度量了包含多个子单元的决策单元的效率. Sexton 等^[7] 考虑由两个串行子单元组成的决策单元的具有简单配置的网络 DEA 模型. Castelli 等^[8] 考虑了两阶段情形下具有一级和二级分层结构的子决策单元的效率度量. Wu 等^[9] 和 Chen 等^[10] 分别对银行系统和信息技术投资过程进行了剖析, 并对这些包含多个中间过程和子单元的系统效率进行评估. Lewis 等^[11] 还基于传统 DEA 所提出的四点假设, 构建了可以灵活管理多个不同环境的网络 DEA 模型.

虽然已有研究对决策单元和子决策单元的效率分别进行评估, 但没有深入考虑系统总效率和子单元效率之间的关系. Chen 等^[10] 提出了部分初始投入作为第 2 阶段投入的情形, 并利用非线性 DEA 模型来对其进行描述. 这种方式, 使得中

① 收稿日期: 2009-02-20; 修订日期: 2010-09-20.

基金项目: 国家自然科学基金优秀创新研究群体基金资助项目(70821001); 国家自然科学基金资助项目(71001093; 70871106).

作者简介: 查勇(1977-), 男, 安徽庐江人, 博士, 讲师. Email: zhabeer@ustc.edu.cn

间产出在前后两阶段表现一致. Liang 等^[12]在博弈论的基础上考虑合作和非合作情形下的效率, 并明确计算出供应链的合作意义下的平均效率. Kao 等^[13]则描述了相互独立的两个阶段乘积形式的效率, 给出了某个阶段效率最优情形下的两阶段效率的分解. 查勇等人^[14]构建了基于 BCC 模型的几何平均合作效率模型, 探讨了规模和技术因素对系统效率和不同阶段效率的影响. Zha 等^[15]则提出了合作情形下具有乘积形式的总效率模型和不同阶段效率的分解.

正如 Chen^[16]指出, 第 1 阶段生产的中间产品并非完全作为第 2 阶段的投入, 其中有一部分会影响将来的产出水平. 一种典型情形是将中间产品作为库存和最终产品, 以备未来生产和销售使用. 其他如资本积累^[17]、农业中肥料的使用和环境范畴中污染的影响、提高组织性能的不同管理活动等, 都是中间产品对未来产出产生影响的例子. 本文考虑两阶段生产过程, 前一阶段的中间产品作为后一阶段的投入. 与已有研究不同的是, 只有部分中间产品作为第 2 阶段的投入, 而剩余的中间产品则作为最终产品, 以备未来的生产过程使用. 从“黑匣子”和网络模型两个角度出发, 分别提出了度量两阶段生产过程的传统 DEA 模型和网络 DEA 模型. 构建了部分中间产品作为未来生产过程储备的两阶段合作效率模型, 用两阶段效率的乘积形式来描述决策单元的总效率, 拓展了 Kao 等^[13]所提出的某一阶段占优的两阶段模型. 讨论了不同阶段效率的上下界, 并将其中某个阶段的效率作为参数, 从而将非线性规划模型转变成线性规划模型. 在此基础上, 对总效率进行分解给出合作情形下各个子单元的效率, 对多阶段生产过程的效率给出合适的评价, 从而为非有效单元的改进提供了决策依据.

1 模型描述

假设每个决策单元都是由两个阶段构成 x_{ij} , $i = 1, \dots, m$ 是决策单元 j 在阶段 1 的投入, y_{rj} , $r = 1, \dots, s$ 是决策单元 j 在阶段 2 的产出, z_{dj} , $d = 1, \dots, D$

是中间产品, 它既是阶段 1 的产出, 同时也是阶段 2 的投入. v_i , $i = 1, \dots, m$; w_d , $d = 1, \dots, D$; u_r , $r = 1, \dots, s$ 分别为投入 x_{ij} 、中间产品 z_{dj} 和产出 y_{rj} 的权重.

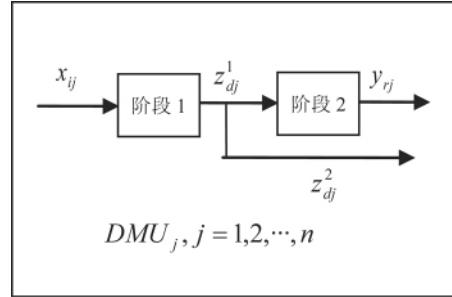


图 1 部分中间产品进入下一阶段的 DEA 模型

Fig. 1 DEA model of part of intermediate outputs as final products

现在考虑中间产品中只有 z_{dj}^1 ($d = 1, 2, \dots, D$) 作为第 2 阶段的投入, 进入该阶段的生产过程, 另一部分 z_{dj}^2 ($d = 1, 2, \dots, D$) 则不进入下一阶段, 直接成为最终产品进入流通渠道. 于是 $z_{dj} = z_{dj}^1 + z_{dj}^2$, $d = 1, 2, \dots, D$; $j = 1, 2, \dots, n$.

假设被评价单元为 DMU_o , 考虑如下两种情形:

1) 若将生产过程看成是一个黑箱子, 则无需考虑中间产品在前后两阶段的变化情况, 只要考虑进入流通渠道的中间产品 z_{do}^2 , 并将该部分产品看成是最终产出的一部分. 对应的 DEA 模型为

$$\max e^{CCR} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + \sum_{d=1}^D w_d z_{do}^2}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}$$

$$\text{s. t. } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{d=1}^D w_d z_{dj}^2}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$w_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D$; $v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$; $u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$

将模型(1)转换为如下线性规划:

$$\max e^N = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + \sum_{d=1}^D \omega_d z_{do}^2$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj}^2 - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0,$$

$$j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\omega_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

此即传统的 DEA 方法. 传统 DEA 方法仅考虑生产过程的投入和进入流通渠道的产出(包括最终产出和部分中间产品), 不考虑中间产品在生产过程中的具体情形.

2) 若将生产过程看作 2 个串联的子过程, 则第 1 阶段生产出所有中间产品 z_{do} . 其中 z_{do}^1 作为第 2 阶段投入, 生产出最终产品 y_{ro} ; z_{do}^2 未进入第 2 阶段, 直接作为最终产品进入流通过程. 每个阶段的效率度量分别如下.

第 1 阶段的 DEA 效率模型为

$$\begin{aligned} \max e_1 &= \frac{\sum_{d=1}^D w_d^1 z_{do}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \\ \text{s. t. } \frac{\sum_{d=1}^D w_d^1 z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

$$w_d^1 \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

第 2 阶段的 DEA 模型为

$$\begin{aligned} \max e_2 &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{d=1}^D w_d^2 z_{do}^1} \\ \text{s. t. } \frac{\sum_{d=1}^D w_d^1 z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1, j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D w_d^2 z_{dj}^1} &\leq 1, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

$$w_d^1, w_d^2 \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

由于生产过程是由两个相互独立的子过程构成, 只有两个子过程合作才能共同完成整个生产任务. 因此可将这两个子过程看成是相互合作、相互配合的, 任何一个子过程的效率都会对整个生产过程造成较大影响. Kao 等^[13] 认为乘积形式是

两阶段效率的最好表现形式. 于是整个生产过程的效率为 $e = e_1 \cdot e_2$. 此外, Castelli 等^[5] 指出, 应对不同阶段投入和产出的权重加以限制. Liang 等^[12] 认为, 如果第 2 阶段子单元投入(即中间产出)的权重不等于第 1 阶段子单元产出(即中间产品)的权重, 将不能反映出两个阶段之间的合作关系. 为此, 假设中间产出在前后阶段的表现一致, 于是中间产出的虚拟权重在前后阶段是相同的, 即 $w_d^1 = w_d^2$. 后续模型中统一采用 w_d 来代替 w_d^1 和 w_d^2 .

为此采用如下的模型来度量两阶段的 DEA 效率

$$\begin{aligned} \max e &= \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \times \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}^1} \\ \text{s. t. } \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1, j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{dj}^1} &\leq 1, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

$$w_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

假设中间产品中有 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_D)$ 的比例进入第 2 阶段, 即 $z_{dj}^1 = \beta_d z_{dj}, z_{dj}^2 = (1 - \beta_d) z_{dj}$. 若

$$\beta_d = \beta (d = 1, \dots, D), \text{ 且 } \beta \text{ 为一定值, 则 } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}^1} =$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{d=1}^D w_d \beta z_{do}} = \frac{1}{\beta} \times \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}}. \text{ 此时根据 Kao 等}^{[13]},$$

模型(5) 等价于下面的模型

$$\max e^{KH} = \frac{1}{\beta} \times \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}$$

$$\text{s. t. } \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{dj}} \leq \beta, j = 1, 2, \dots, n$$

$$w_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots,$$

$$m; u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

利用 CCR 变换 模型(6) 可转换为

$$\max e^{KH} = \frac{1}{\beta} \times \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \beta \cdot \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$w_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots,$$

$$m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s \quad (7)$$

假定模型(7) 的最优解为 e^{KH^*} , 每个阶段的效率可以通过事先求得第 1 阶段的效率或第 2 阶段的效率, 然后利用 $e^{KH} = e_1^{KH} \cdot e_2^{KH}$ 来求得另一阶段的效率. 如利用模型(3) 求得第 1 阶段的最优效率 $e_1^{KH^*}$, 则第 2 阶段的效率为 $e_2^{KH^*} = \frac{e^{KH^*}}{e_1^{KH^*}}$.

然而模型(7) 未考虑两个阶段相互合作的情形. 为此, 本文对模型(5) 进行了如下考虑:

$$\text{令 } \theta_1 = \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \text{ 和 } \theta_2 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}^1} \text{ 分别表示第}$$

1 和第 2 阶段的效率, 则两阶段生产过程的总效率为 $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2$.

$$\text{再令 } t = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \quad t' = \frac{1}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}} \quad tv_i = v_i \quad tw_d =$$

$$\omega_d \quad t'w_d = \tau_d \quad t'u_r = \mu_r, \text{ 于是 } \frac{t'}{t} = \frac{1 / \sum_{d=1}^D w_d z_{do}}{1 / \sum_{i=1}^m v_i x_{io}} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}} = \frac{1}{\theta_1}. \text{ 模型(5) 可变为}$$

$$\max e = \frac{1}{\beta} \times \sum_{d=1}^D \omega_d z_{do} \times \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

$$\text{s. t. } \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$(8)$$

$$\theta_1 \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \beta \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \sum_{d=1}^D \omega_d z_{do} = \theta_1$$

$$\omega_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots,$$

$$m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

模型(8) 是一个非线性规划. 令 $\theta_1 = k$ 模型(8) 可变为

$$\max e = \frac{1}{\beta} \times k \times \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

$$\text{s. t. } \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$(9)$$

$$k \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \beta \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \sum_{d=1}^D \omega_d z_{do} = k$$

$$\omega_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots,$$

$$m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

若能求得 k 的上下界, 则可将 k 看作是一个参数. 模型(9) 可变为一个参数线性规划.

2 合作情形下的两阶段效率

2.1 不同阶段效率的上下界

每个系统的不同阶段在生产结束后, 其绝对效率是已经确定(实际产出 / 理想产出) 的. 而 DEA 模型研究的是相对效率, 当对其中某个阶段进行效率评估时, 总是选择最有利于自身的方式来确定投入和产出的权重, 而不管其他阶段的效率如何. 从这个角度看, 一个阶段效率取最大值, 必然会对另一个阶段的效率造成最大的约束, 即

此时该阶段的可行域最小,得到的是该阶段效率的最小值。

本文是在 DEA 框架下研究决策单元的效率,由于两阶段生产是相互合作的,因此“对(某)阶段最有利的效率评价”即是指在评价某阶段的效率时不考虑另一阶段对它的影响(即约束),此时得到的效率应不小于考虑另一阶段对它影响的情形,本文将其定义为“对(某)阶段最有利的效率”。

为了确定不同阶段效率的可能范围,首先研究以下两种情形:

A) 考虑对第 1 阶段最有利的效率评价模式,此时得到第 1 阶段效率的上界;

B) 考虑对第 2 阶段最有利的效率评价模式,此时得到第 2 阶段效率的上界。

A) 对第 1 阶段最有利的效率评价

第 1 阶段的效率模型即模型(3)。

利用 CCR 变换 模型(3) 可变为

$$\begin{aligned} \max e_{11} &= \sum_{d=1}^D \omega_d z_{do} \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} &= 1 \\ \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 1, j = 1, 2, \dots, n \\ \omega_d &\geq 0, d = 1, 2, \dots, D; \\ v_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (10)$$

假设得到的最优解为 $v_i^*, i = 1, 2, \dots, m, \omega_d^* \geq 0, d = 1, 2, \dots, D, e_{11}^*$ 此时得到第 1 阶段效率的上界 $e_1^U = e_{11}^*$ 。

假定整个生产过程的效率 e 达到最优值 e^* , 当第 1 阶段的效率 e_1 达到最大时,第 2 阶段的效率 e_2 应为最小。反之亦然。如果在评价第 2 阶段的效率时,保证第 1 阶段的效率最大,即是将其作为约束加入到 DEA 模型中,评价第 2 阶段的效率。由于 $e_2 = \frac{e^*}{e_1}$ 若 e^* 保持不变,当 $e_1^* = \max e_1$ 时, $e_2^* = \min e_2$ 此时得到第 2 阶段效率的下界,也即对第 2 阶段的效率的评价最不利。

此时,第 2 阶段的效率模型需要在模型(4)的基础上加上如下约束

$$\sum_{d=1}^D w_d z_{do} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = e_1^U$$

即保证第 1 阶段的效率为 e_1^U 。

令

$$t = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}, t' = \frac{1}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}}, tv_i = v_i, tw_d =$$

$$\omega_d, t'w_d = \tau_d, t'u_r = \mu_r,$$

$$\text{于是 } \frac{t'}{t} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}} = \frac{1}{e_1^U} \tau_d = \frac{\omega_d}{e_1^U}$$

利用 CCR 变换,第 2 阶段的效率模型可转换为

$$\max e_{12} = \frac{1}{\beta} \times \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{d=1}^D \omega_d z_{do} = e_1^U$$

$$\sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$e_1^U \times \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \beta \cdot \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

其中 e_1^U 为第 1 阶段的最优解。

假设得到的最优解为 $v_i^*, i = 1, 2, \dots, m, \omega_d^*, d = 1, 2, \dots, D, \mu_r^* \geq 0, r = 1, 2, \dots, s, e_{12}^*$ 。此时得到第 2 阶段效率的下界 $e_2^L = e_{12}^*$ 。

B) 对第 2 阶段最有利的效率评价

第 2 阶段的 CCR 模型如下:

$$\max e_{22} = \frac{1}{\beta} \times \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{do}}$$

$$\text{s. t. } \frac{1}{\beta} \times \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{dj}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

$$w_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

利用 CCR 变换 模型(12) 可转变为

$$\begin{aligned} \max e_{22} &= \frac{1}{\beta} \times \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\ \text{s. t. } \sum_{d=1}^D \omega_d z_{d0} &= 1 \\ \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \beta \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} &\leq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (13)$$

$$\omega_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

假设得到的最优解为 $\omega_d^* \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; \mu_r^* \geq 0, r = 1, 2, \dots, s, e_{22}^*$. 此时得到第 2 阶段效率的上界 $e_2^U = e_{22}^*$. 如果在评价第 1 阶段的效率时, 保证第 2 阶段的效率为最大, 则此时对第 1 阶段的效率评价最不利, 即得到的是第 1 阶段效率的下界.

此时, 第 1 阶段的效率模型为

$$\begin{aligned} \max e_{21} &= \sum_{d=1}^D \omega_d z_{d0} \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} &= 1, \sum_{d=1}^D \tau_d z_{d0} = 1 \\ \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \beta \times \sum_{d=1}^D \tau_d z_{dj} &\leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} - \beta \times e_2^U \times \sum_{d=1}^D \tau_d z_{d0} &= 0 \\ \omega_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s \\ \tau_d \geq \omega_d, d = 1, 2, \dots, D \end{aligned}$$

设模型(14) 的最优解为 e_{21}^* , 则第 1 阶段效率的下界 $e_1^L = e_{21}^*$.

2.2 两阶段合作的 DEA 模型

由于前面已经得到不同阶段的上下界, 即

$$e_{11}^* \geq \sum_{d=1}^D \omega_d z_{d0} \geq e_{21}^* \geq e_{22}^* \geq \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \geq e_{12}^*$$

令 $\sum_{d=1}^D \omega_d z_{d0} = k, e_{11}^* \geq k \geq e_{21}^*$ 模型(9) 可转换为

$$\begin{aligned} \max \frac{1}{\beta} \times k \times \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\ \text{s. t. } \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} k \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \beta \sum_{d=1}^D \omega_d z_{dj} &\leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} &= 1 \\ \sum_{d=1}^D \omega_d z_{d0} &= k \\ e_1^U &\geq k \geq e_1^L \\ \omega_d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D; v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

模型(15) 是参数线性规划模型, 可以对 k 值设置相应的步长, 在 $[e_1^L, e_1^U]$ 之间遍历, 即可求出其最优解.

3 数值分析

为了验证本文提出的部分中间产品作为最终产品, 对未来的生产过程产生影响的两阶段合作效率模型的有效性, 本文选取了美国 30 个商业银行的数据, 如表 1 所示. 每个银行看作是一个两阶段决策单元, 投入包括员工 (employees)、资产 (assets) 和资产净值 (equity), 产出包括市场价值 (market value)、盈利率 (earnings) 和回报率 (returns), 中间产出为收入 (revenue) 和利润 (profits).

基于表 1 中的基本数据, 利用文中对应的模型, 分别计算出不同模型对应的效率, 如表 2 所示. 其中, 第 2 列表示将两阶段生产过程看成是“黑匣子”时的传统 DEA 效率, 即 CCR 效率; 第三至第六列分别列出了不同阶段效率的上下界; 第七列给出了本文所提出的两阶段合作模型的效率, 最后两列分别给出了不同阶段在合作情形下的效率.

从表 2 可以看出, “黑匣子”模型忽略了中间产出对总体效率的影响, 得到的效率偏高; Kao^[13] 等考虑某个阶段占优时系统的总体效率; 两阶段合作效率则反映了两阶段合作的最优效率, 并给出了不同阶段的效率, 为非有效单元的效率改进提供了借鉴.

以 DMU4 为例, 可以求出模型(15) 中 k 值(即第 1 阶段效率) 的变化给总效率带来的影响. 如表 3 所示. 采用的步数为 20.

表 1 基本数据

Table 1 Data

bank	employees	assets	equity	revenue	profits	market value	earnings	returns
	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	y_1	y_2	y_3
1	85 300	256 853	19 581	31 690	3 464	33 221. 7	7. 21	66. 1
2	95 288	232 446	20 222	20 386	2 664	27 148. 6	6. 49	69. 4
3	58 322	187 298	12 801	16 298	1 950	20 295. 9	7. 13	59. 7
4	39 078	182 926	11 912	14 884	1 805	16 971. 3	6. 73	70. 5
5	15 600	184 879	10 451	13 838	1 296	15 003. 5	6. 42	49. 4
6	33 365	121 173	9 134	11 336	1 165	12 616. 4	5. 76	82. 4
7	35 328	122 002	8 450	10 681	1 150	12 351. 1	3. 45	50
8	44 536	131 879. 9	9 043. 1	10 582. 9	1 430. 2	16 815	5. 04	39. 9
9	46 900	90 454	8 197. 5	8 970. 9	1 277. 9	14 807. 4	2. 91	54. 9
10	14 000	104 000	5 000	8 600	215	5 252. 4	2. 03	28. 3
11	30 800	84 432. 2	6 364. 8	7 919. 4	610	10 428. 7	1. 57	31. 8
12	45 404	72 134. 4	5 312. 1	7 582. 3	956	12 268. 6	2. 76	45. 5
13	26 757	73 404	5 768	6 389. 5	408. 1	9 938. 2	1. 19	61. 4
14	28 905	66 339. 1	5 152. 5	6 054	825	8 671. 2	3. 45	51. 6
15	17 881	47 397	3 751	5 410. 6	541	5 310. 1	4. 55	84. 7
16	19 700	50 316	4 055	5 409	1 032	11 342. 5	20. 37	52. 8
17	15 850	53 685	5 223	5 327	914	10 101. 5	4. 57	69. 9
18	27 200	58 071	4 154	4 827. 5	885. 1	12 138	11. 02	108. 5
19	24 300	40 129	4 106	4 514	691	7 476. 7	4. 5	83. 8
20	15 996	44 981. 3	3 773. 8	3 755. 4	602. 5	7 623. 6	3. 5	46. 9
21	19 415	46 471. 5	4 269. 6	3 740. 3	565. 5	7 922. 5	4. 94	46. 9
22	20 175	41 553. 5	3 272. 2	3 680	533. 3	5 774. 9	5. 3	59
23	20 767	36 199	2 921	3 449. 9	465. 1	4 912. 2	3. 03	33. 9
24	13 231	33 874	2 725	3 328. 3	568. 1	8 304	4. 19	54. 3
25	13 500	35 469. 9	2 607. 7	3 112. 6	413. 4	4 537	3. 54	71. 7
26	17 023	33 703. 8	2 928. 1	2 996. 1	418. 8	4 997	3. 25	57. 3
27	14 081	31 794. 3	2 617	2 897. 3	329	4 865. 1	2. 09	66. 8
28	13 598	29 620. 6	2 379. 4	2 868	452. 2	5 788	3. 22	52
29	4 900	43 881. 6	3 007. 8	2 859. 6	288. 6	3 218	4. 66	41. 1
30	11 171	13 228. 9	1 265. 1	2 565. 4	353. 1	6 543. 3	1. 54	60. 7

表 2 不同模型的效率比较
Table 2 Efficiency comparison among various models

bank	模型 2	模型 7	模型 10	模型 11	模型 13	模型 14	模型 15		
	e^{CCR}	e^{KH^*}	e_{11}^*	e_{12}^*	e_{22}^*	e_{21}^*	e^{COOP}	k	$\sum_{r=1}^s \mu_r Y_{ro}$
1	1	0.448 7	1	0.448 6	0.485 8	0.854 5	0.448 6	1	0.448 6
2	0.682 3	0.363 4	0.682 3	0.532 4	0.544 1	0.621 9	0.363 3	0.682 2	0.532 6
3	0.794 7	0.421 6	0.794 7	0.530 5	0.566 8	0.712 5	0.421 5	0.794 7	0.530 5
4	0.872 9	0.427 4	0.872 9	0.486 5	0.522 0	0.824 6	0.427 3	0.847 4	0.504 2
5	1	0.606 1	1	0.605 9	0.605 9	1	0.605 9	1	0.605 9
6	0.867 3	0.418 0	0.833 3	0.438 4	0.587 9	0.721 5	0.418 0	0.818 0	0.511 0
7	0.788 6	0.394 0	0.788 5	0.483 1	0.554 5	0.696 0	0.394 0	0.781 7	0.504 0
8	0.745 2	0.474 7	0.745 2	0.637 0	0.646 9	0.685 2	0.474 7	0.745 2	0.637 0
9	0.702 3	0.448 6	0.702 3	0.638 6	0.647 0	0.665 5	0.448 5	0.702 2	0.638 7
10	1	0.339 3	1	0.309 4	1	0.440 4	0.339 2	0.488 3	0.694 6
11	0.744 6	0.415 8	0.741 3	0.516 3	0.760 0	0.000 0	0.415 7	0.661 9	0.628 1
12	0.709 0	0.454 1	0.709 0	0.634 3	0.675 9	0.000 0	0.454 1	0.690 7	0.657 5
13	0.705 7	0.446 4	0.680 9	0.609 7	1	0.578 3	0.446 4	0.584 3	0.763 9
14	0.713 9	0.417 3	0.713 9	0.584 3	0.600 0	0.669 4	0.417 3	0.713 1	0.585 1
15	0.960 8	0.642 1	0.880 9	0.673 4	0.861 2	0.574 7	0.641 8	0.847 0	0.757 7
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	0.714 4	1	0.714 4	0.746 9	0.854 2	0.714 4	1	0.714 4
18	0.883 3	0.797 4	0.804 1	0.889 1	1	0.804 1	0.715 0	0.804 1	0.889 1
19	0.748 5	0.584 1	0.748 5	0.778 7	0.799 7	0.713 8	0.583 5	0.747 9	0.780 3
20	0.772 8	0.591 6	0.754 4	0.784 2	0.799 8	0.659 3	0.591 6	0.754 4	0.784 2
21	0.668 5	0.567 4	0.655 3	0.865 9	0.882 0	0.621 7	0.567 4	0.655 3	0.865 9
22	0.674 0	0.519 6	0.673 2	0.765 7	0.805 7	0.636 0	0.518 9	0.648 5	0.800 1
23	0.645 1	0.397 5	0.643 0	0.613 1	0.647 8	0.623 2	0.397 5	0.628 6	0.632 2
24	1	0.825 7	0.871 0	0.947 9	0.983 9	0.747 5	0.825 7	0.871 0	0.947 9
25	0.912 7	0.740 3	0.740 1	1	1	0.740 1	0.740 1	0.740 1	1
26	0.657 3	0.530 6	0.634 6	0.835 2	0.835 5	0	0.530 0	0.634 6	0.835 2
27	0.812 1	0.654 9	0.657 3	0.978 1	1	0.657 3	0.642 9	0.657 3	0.978 1
28	0.813 4	0.619 9	0.773 6	0.643 9	0.803 3	0	0.619 9	0.773 6	0.801 4
29	1	0.809 3	0.823 4	0.785 3	1	0.813 7	0.771 7	0.813 7	0.948 4
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表 3 随 k 值变化的 DMU4 的总效率与各阶段的效率
Table 3 Overall efficiency and its decomposition of DMU4
when k 's value varies

序号	k	总效率 e	阶段 1 效率 e_1	阶段 2 效率 e_2
1	0.872 9	0.424 7	0.872 9	0.486 55
2	0.870 35	0.425 86	0.870 35	0.489 3
3	0.867 81	0.426 02	0.867 81	0.490 91
4	0.865 26	0.426 17	0.865 26	0.492 53
5	0.862 72	0.426 33	0.862 72	0.494 16
6	0.860 18	0.426 48	0.860 18	0.495 81
7	0.857 64	0.426 64	0.857 64	0.497 46
8	0.855 09	0.426 79	0.855 09	0.499 12
9	0.852 55	0.426 95	0.852 55	0.500 79
10	0.850 01	0.427 1	0.850 01	0.502 47
11	0.847 5	0.427 26	0.847 5	0.504 16
12	0.844 92	0.427 2	0.844 92	0.505 6
13	0.842 38	0.427 13	0.842 38	0.507 05
14	0.839 84	0.427 07	0.839 84	0.508 52
15	0.837 3	0.427 01	0.837 3	0.509 99
16	0.834 76	0.426 95	0.834 76	0.511 46
17	0.832 21	0.426 89	0.832 21	0.512 95
18	0.829 67	0.426 82	0.829 67	0.514 45
19	0.827 13	0.426 76	0.827 13	0.515 96
20	0.824 59	0.426 7	0.824 59	0.517 47

图 2 中 k 值在 $[0.824 6, 0.872 9]$ 变动, 从最大值 0.872 9 以步长 0.002 54 逐步递减, 总效率从 0.424 7 递增到 0.427 26, 然后递减到 0.426 7. 相应的, 第 2 阶段的效率则从 0.486 55 增加到 0.517 47. 可见, 当两个阶段充分合作时, 总效率达到最大. 此时得到不同阶段的效率, 可为效率改进提供决策信息.

参 考 文 献:

[1] Shephard R W, Färe R. A Dynamic Theory of Production Correspondences. ORC 75 - 13 [R]. Operations Research Centers, Berkeley: University of California, 1975.
 [2] Färe R, Whittaker G. An intermediate input model of dairy production using complex survey data [J]. Journal of Agricultural Economics, 1995, 46 (2): 201 - 213.
 [3] Färe R, Grosskopf S. Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.
 [4] Färe R, Grosskopf S. Network DEA [J]. Socio-Economic Planning Sciences, 2000, 34: 35 - 49.

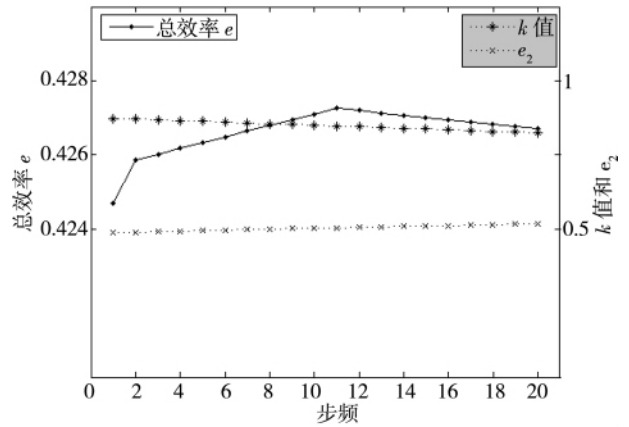


图 2 随 k 值变化的 DMU4 的总效率与各阶段的效率
Fig. 2 Overall efficiency and its decomposition of DMU4
when k 's value varies

4 结 束 语

传统的 DEA 模型无法对多阶段模型的效率进行精确度量, 从而无法找到无效单元和待改进的指标. 本文考虑部分中间产品作为最终产品的两阶段生产过程. 分别从“黑匣子”和网络模型两个角度出发, 在中间产品成为最终产出的比例既定的前提下, 度量了生产过程的传统 DEA 效率和两阶段合作的 DEA 效率, 并通过对不同阶段效率上下界的讨论, 构建了部分中间产品作为最终产出的两阶段合作效率模型, 用来描述决策单元的总效率, 并对其进行分解, 给出合作情形下各个子单元的效率, 对多阶段生产过程的效率给出合适的评价, 从而为非有效单元的改进提供了决策依据.

为了简化起见, 本文将中间产品作为最终产出的比例设为定值, 且取相同的比例 β . 后续研究将考虑不同中间产品的 β_d 取不同数值或将其看成是一个变量的情形, 以期确定最优的比例, 从而达到系统最优.

- [5] Castelli R, Pesenti W, Ukovich. DEA-like models for efficiency evaluations of specialized and interdependent units [J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 132: 274 – 286.
- [6] Amirteimoori A, Kordorstami S. DEA-like models for multi-component performance measurement [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 163: 735 – 743.
- [7] Sexton T R, Lewis H F. Two-stage DEA: An application to major league baseball [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2003, 19(2/3): 227 – 249.
- [8] Castelli L, Pesenti R, Ukovich W. DEA-like models for the efficiency evaluation of hierarchically structured units [J]. *European Journal of Operational Research* 2004, 154(2): 465 – 476.
- [9] Wu D S, Yang Z J, Liang L. Using DEA-neural network approach to evaluate branch efficiency of a large Canadian bank [J]. *Expert Systems with Applications*, 2006, 31: 108 – 115.
- [10] Chen Y, Liang L, Yang F, et al. Evaluation of information technology investment: A data envelopment analysis approach [J]. *Computers & Operations Research*, 2004, 33(5): 1368 – 1379.
- [11] Lewis H F, Sexton T R. Network DEA: Efficiency analysis fo organizations with complex internal structure [J]. *Computers & Operations Research*, 2004, 31: 1365 – 1410.
- [12] Liang L, Yang F, Cook W D, et al. DEA models for supply chain efficiency evaluation [J]. *Annals of Operations Research*, 2006, 145(1): 35 – 49.
- [13] Kao C, Hwang S N. Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan [J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 185(1): 418 – 429.
- [14] 查 勇, 梁 樑, 许传永. 基于 BCC 模型的几何平均最优意义下的两阶段合作效率 [J]. *系统工程理论与实践*, 2008, 28(10): 53 – 58.
Zha Yong, Liang Liang, Xu Chuanyong. Two-stage BCC model for cooperative efficiency evaluation using a geometric mean method [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2008, 28(10): 53 – 58. (in Chinese)
- [15] Zha Y, Liang L, Zhou C R, et al. Efficiency Decomposition in two-stage DEA model for cooperative efficiency evaluation [C]//*Proceedings of the 38th International Conference On Computers And Industrial Engineering*, 2008. 11.
- [16] Chen C M. A network-DEA model with new efficiency measures to incorporate the dynamic effect in production networks [J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, doi: 10.1016/j. ejor. 2007. 12. 025
- [17] Emrouznejad A, Thanassoulis E. A mathematical model for dynamic efficiency using data envelopment analysis [J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2005, 160: 363 – 378.

Two-stage cooperative efficiency evaluation with part of intermediate outputs as final products

ZHA Yong, LIANG Liang, GOU Qing-long, BI Gong-bing

School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract: Network DEA models have been widely used in dealing with performance measurement of complex organizations and systems with multiple processes and multiple sub-systems. In real situations where intermediate products produced by first stage can not be consumed completely by second stage, traditional DEA models overvalues system efficiency while current network DEA models underestimate system efficiency. This paper put forwards two-stage efficiency models, where part of the intermediate products are viewed as final products and entered into distribution channels, and depicts real performance of two-stage production process. This paper provides product forms to characterize cooperation of the two stages and discusses both upper and lower efficiency bounds of various stages. A linear programming model is converted from non-linear efficiency model by considering one of the efficiencies of the stages as a parameter. The model is illustrated by a numerical evaluation of the bank's performance.

Key words: network DEA models; cooperative efficiency; product form; two-stage model