第 14 卷第 8 期
2011 年 8 月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 14 No. 8
Aug. 2011

向量 MRS-GARCH 模型波动持续性研究[①]

江孝感，蔡 宇
(东南大学经济管理学院，南京 210096)

摘要：为了描述金融变量在不同阶段的不同波动关系，在向量 GARCH 模型中引入 Markov 转换机制，构建了向量 MRS-GARCH 模型. 运用滤波技术推导了模型的参数估计方法，基于预测公式研究了向量 MRS-GARCH 过程的持续性，并从状态持续时间和引入 Markov 链的向量 GARCH 过程的持续性两个方面探讨了向量 MRS-GARCH 模型的持续性，提出了向量 MRS-GARCH 过程的衰减速度指数，给出并证明了向量 MRS-GARCH 过程满足平稳性和协同持续性的定理. 由此可分析在不同阶段内金融变量之间的特定关联属性，得出各金融变量之间关联性的"状态转移"性质，从而能够有针对性地给出相应的策略消除这种波动的持续性影响，对于防范经济或金融风险具有重要的指导意义和实践意义. 最后用向量 MRS-GARCH 模型对沪市、深市收益率进行了实证研究，证实在考虑状态转换后两者间存在协同持续关系.

关键词：向量 MRS-GARCH 模型；Markov；变结构；持续性；协同持续

中图分类号：F830.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007 - 9807(2011)08 - 0054 - 11

0 引 言

许多宏观经济或金融时间序列的正常行为会发生偶然性中断，致使经济系统从一个体制转换到另一个体制，此类动态行为可能源于战争、经济危机、股市泡沫、政策变化等[1]. 当这种转换发生时，数据的分布特征也将随之变化，导致不同时期的经济运行规律有不同的特征和表现形式，故不能将数据简单汇总在一起进行建模分析. 已经存在的经济模型，即使能很好地解释历史现象，也不一定对未来做出准确的预测. 然而，经典 ARCH 模型族对金融时间序列进行建模及预测时，其前提假设为拟合期数据与预测期数据服从同一参数模型，即结构不变，从而忽视了波动中变结构的存在[1-3]. 对非平稳的时间序列数据用 ARCH 类模型建模所得到的波动的持续性和平滑性都不能反映波动的真实特性，它往往会低估高波动时期的波动率，高估低波动时期的波动率.

研究表明 ARCH 类模型描述波动性的高持续性与波动性预测能力之间存在着内在的矛盾：Chou[4] 发现用 ARCH 模型族往往会呈现出很高水平的持续性水平[5-6]. Lamoureux[8] 和 Hamilton[9] 对美国股票市场的研究表明，标准的 GARCH 模型过高地估计了波动性的持续性[8-12]. Engle 等[13] 对 1987 年美国股市崩溃时的分析表明，基于股票期权价格估计的隐含波动性远低于基于 GARCH 模型预测的波动性，说明 GARCH 模型高估了冲击对股票市场未来影响的强度[13-16]. Lobato 和 Savin[17] 以及 Gnarger 和 Hyung② 都认为波动均值中结构的破坏可能是持续性根源之一. Lamouiexu 和 Lastarges 等[18] 的研

① 收稿日期：2009 - 06 - 08；修订日期：2010 - 03 - 17.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70471029).
作者简介：江孝感(1953—)，男，江西人，教授. Email：jiangxiaogan@163.com

② 见 Granger C W J，Hyung N. Occasional structural braks and long memory. Discussion Paper，department of economics，University of California，San Diego. 1999：99 - 14.

究结果表明如果在波动中考虑结构转换，其持续性水平确实降低了.

对于存在变结构的模型，最直接的方式即分段考虑各段的性质，为每一个可能的状态选择合适的表达式.但是若对每一个状态都设置不同的参数显然不利于计算，且参数过于臃肿.而且如果变化发生的频率较高，简单地用分段建模的方法估计作用是有限的，比如如何分段就会成为首要的棘手问题.行之有效的办法是引入一个不可观察的状态变量，序列状态之间的变换通过这个状态变量来体现.而通过引进 Markov 转换机制描述各状态之间的转换关系，能够有效减少参数数目. Hamilton[19] 首先把动态 Markov 转换模型作为处理变结构的工具，提出 Markov 机制转换模型(Markov switching model)，并提出了状态转移的 ARCH(regime-switching ARCH)模型，取得了良好的模拟效果. Marcucci 等[20] 用单变量 GARCH 模型与 Markov 结构转换 GARCH 模型对美国股票市场 S&P 指数进行了实证研究. Haas 等[21] 提出了改进的结构转换 GARCH 模型.

目前国内对 Markov 机制转换模型及结构转换的相关研究相对较少，且在为数不多的相关研究文献中，基本上都是对国外研究学者提出的 Markov 机制转换模型的简单套用研究分析，缺乏从定量上进行研究.谢赤和吴雄伟[22] 利用虚拟变量证实了存在结构转换；在考虑模型中结构转变因素方面，蒋祥林等[23] 将波动性结构转换的 ARCH 模型对中国股票市场波动性进行研究发现，较之传统的 ARCH 类模型，结构转换的 ARCH 模型能更好地估计中国股票市场的波动性，极大地提高波动性的预测精度；孙金丽[24] 将结构转换的 GARCH 模型与基本的 GARCH 模型进行比较表明前者能减少波动的持续性，大大提高对市场波动的预测能力；郭名媛[25] 提出了持续时间依赖 Markov 状态转换(DDMRS-GARCH)模型，指出状态之间的转移概率不仅与波动状态有关，且与波动状态的持续时间相关.而对 Markov 机制转换模型更深层次问题的探讨和研究非常少，鲜有对 Markov 机制转换模型的持续性研究，协同持续性研究则仍是空白.

金融市场是一个复杂的系统，需用多个金融变量反映系统特征，仅利用单变量模型无法分析一些宏观经济变量之间的替代和影响关系.为此，需要将单变量模型扩展到多变量的向量模型，进而研究各变量之间的波动关系.由于金融时间序列的结构变化，其持续性特征也是变结构的.未考虑序列之间的变结构特性是导致两个序列的整体相关性较弱的原因之一，从而导致两者之间的相关性被忽略.已有的研究成果只注重对样本区间内多个变量整体关联性的检验，忽视了分析在不同阶段内变量之间的特定关联属性，因此无法得到全面性的结论.为了准确描述金融变量在各个阶段的区制相关性，必需结合变结构问题研究协同持续性，分阶段考虑在不同状态下变量的协同关系.

为了研究金融变量在不同阶段的不同波动关系，本文构建了向量 MRS-GARCH(k,p,q) 模型，并探讨其平稳性与协同持续性质，研究向量 MRS-GARCH 模型的性质，不仅可以得到各分量之间的变动关系，并且能够研究这种关联性的“状态转移”性质，即向量间的联动效应.

1　向量 MRS-GARCH(k,p,q)模型构建

令 $\boldsymbol{Y}_t$ 表示 $N\times 1$ 维离散时间的向量随机过程向量，其条件均值和条件方差函数分别为

$$\mathrm{E}_{t-1}(\boldsymbol{Y}_t)=\boldsymbol{M}_t,$$
$$\mathrm{Var}_{t-1}(\boldsymbol{Y}_t)=\boldsymbol{H}_t,\ t=0,1,2,\cdots$$

其中 $\mathrm{E}_{t-1}(\cdot)$ 表示基于 $t-1$ 期的信息集上的条件期望，M_t 为 $N\times 1$ 维向量，$\mathrm{Var}_{t-1}(\cdot)$ 表示基于 $t-1$ 期的信息集上的条件方差，H_t 为对所有时间 t 的 $N\times N$ 正定对称矩阵.用 $N\times 1$ 维向量 $\boldsymbol{u}_{s_t}$ 表示对条件均值的扰动.

假设向量 GARCH 过程的参数依赖于 k 个离散的状态变量 $\{s_t\}$，这一状态变量是隐含变量，是不可观测的，状态间的转移服从离散的 Markov 过程，满足无后效性

$$p(s_t=j\mid s_{t-1}=i,s_{t-2}=k,\cdots)=$$
$$p(s_t=j\mid s_{t-1}=i)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,k$$

在此给出引入了状态变量的向量 MRS-GARCH 模型表达式

$$\boldsymbol{Y}_t=\boldsymbol{M}_t+\boldsymbol{u}_{s_t}\qquad(1)$$

$$\boldsymbol{u}_{s_t} = \sqrt{g_{s_t}} \times \tilde{\boldsymbol{u}}_t \quad (2)$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{H}_t^{1/2}\boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_t \sim i.i.d(0, I_N) \quad (3)$$

$$\mathrm{vec}(H_t) = W_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{t-i}\tilde{\boldsymbol{u}}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{B}_i \mathrm{vec}(\boldsymbol{H}_{t-j}) \quad (4)$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{u}}_t$ 为 $N \times 1$ 维标准向量 GARCH(p,q) 过程；$\boldsymbol{I}_N$ 为 $N \times N$ 维单位矩阵；vec(·) 表示向量算子，即把 $N \times N$ 矩阵的所有元素映射成为 $N^2 \times 1$ 维向量；$\boldsymbol{W}$ 表示 $N^2 \times 1$ 维向量；$\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i$ 为 $N^2 \times N^2$ 矩阵.

由式(2)知数据的波动 u_{s_t} 为状态变量和某状态内向量 GARCH)(p,q) 过程的乘积. 标量 g_{s_t} 刻画了由状态所引起的波动，反映了状态变量的动态变化特征，若 $g_1 = g_2 = \cdots = g_k = 1$，即为向量 GARCH($p,q$) 过程. 将状态 g_1 标准化为 1，其他状态 $g_i > 1$，$i = 2,3,\cdots,k$.

2 向量 MRS-GARCH 模型参数的极大似然估计方法

Markov 机制转换模型是一个高度非线性的模型，所以通常的最小二乘法不适用于该类模型的估计. 对于 Markov 机制转换模型的参数估计目前主要采用极大似然法，主要通过滤波过程求得模型的似然函数，并由此得到基于全样本的平滑概率.

模型待估参数为 $\theta = (p_{11},\cdots,p_{1k},\cdots, p_{k1},\cdots,p_{kk}; g_1,\cdots,g_k; A_1,\cdots,A_q; B_1,\cdots,B_p; W_0)$，限制条件为 $g_1 = 1$，$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, 0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,k$，其中

$$\boldsymbol{A}_i = (a_{i1},\cdots,a_{iN^2}),$$
$$\boldsymbol{B}_i = (b_{i1},\cdots,b_{iN^2}),$$
$$\boldsymbol{W} = (\omega_1,\cdots,\omega_{N^2})$$

得到模型的参数估计结果的同时并能够对时刻 t 时状态变量 s_t 所处特定状态做出推断.

下面推导向量 MRS-GARCH 模型的极大似然参数估计过程.

令 Φ_{t-1} 表示考虑至时间 $t-1$ 的信息，称为基于 t 时刻及之前的所有可观测的信息. 可得到向量 Y_t 在状态 j 基于至时间 $t-1$ 的信息的条件密度函数为(T 个观测值)

$$f(\boldsymbol{Y}_t \mid s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta) = (2\pi)^{-T/2} \mid \boldsymbol{H}_{i,t} \mid^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'_{s_t}\boldsymbol{H}_{i,t}^{-1}\boldsymbol{u}_{s_t}\right) \quad (5)$$

$\boldsymbol{H}_{i,t}$ 为在状态 i 即 $s_t = i$ 时的协方差矩阵.

为方便推导，令一列向量 $\boldsymbol{\eta}_t$ 表示 Y_t 在 k 个不同状态下的条件概率密度函数，即

$$\eta_t = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{Y}_t \mid s_t = 1, \Phi_{t-1}; \theta) \\ f(\boldsymbol{Y}_t \mid s_t = 2, \Phi_{t-1}; \theta) \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{Y}_t \mid s_t = k, \Phi_{t-1}; \theta) \end{bmatrix}$$

令 $P(s_t \mid \Phi_t; \theta)$ 表示基于至时刻 t 的所有可观测信息和参数 θ 推断对状态变量位于状态 i 的概率，用一个 k 维列向量 $\xi_{t|t}$ 来表示对于状态变量 s_t 在时刻 t 的取值. 同样令 $P(s_t \mid \Phi_{t-1}; \theta)$ 表示基于所有至时刻 $t-1$ 的可观测信息和参数 θ，对状态变量处于状态 i 的推断概率，记为 $\xi_{t|t-1}$.

由贝叶斯公式可得到

$$P(s_t, Y_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) = P(s_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) \times f(\boldsymbol{Y}_t \mid s_t, \Phi_{t-1}; \theta) \quad (6)$$

上式右边即为向量 $\xi_{t|t-1}$ 与 $\boldsymbol{\eta}_t$ 对应分量之间的乘积，则式(6)可改写为

$$P(s_t, \boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) = \xi_{t|t-1} \cdot \eta_t \quad (7)$$

再由全概率公式，按照状态变量的不同取值进行求和，得到向量 Y_t 仅基于滞后变量和参数 θ 的条件分布密度函数

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) &= \sum_{j=1}^{k} P(s_t = j, \boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P(s_t = j \mid \Phi_{t-1}; \theta) \times f(\boldsymbol{Y}_t \mid s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta) \end{aligned}$$

由式(7)可得到

$$f(\boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) = \boldsymbol{1}'(\xi_{t|t-1} \cdot \eta_t) \quad (8)$$

其中 $\boldsymbol{1}'$ 表示各分量为 1 的列向量，$\boldsymbol{1}'(\xi_{t|t-1} \cdot \eta_t)$ 表示对列向量($\xi_{t|t-1} \otimes \eta_t$) 各分量求和. 而式($\xi_{t|t-1} \otimes \eta_t$) 中 $\xi_{t|t-1}$ 成分仍然未知，下面继续推导 $\xi_{t|t-1}$ 的取值过程.

由贝叶斯公式的另一种表达形式可得

$$\frac{P(s_t, \boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta)}{f(\boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta)} = P(s_t = j \mid \boldsymbol{Y}_t, \Phi_{t-1}; \theta)$$

$$= P(s_t = j \mid \Phi_t; \theta)$$

$$P(s_t = j \mid \Phi_t; \theta) = \frac{P(s_t, \boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta)}{\sum_{j=1}^{k} P(s_t = j \mid \Phi_{t-1}; \theta) \times f(Y_t \mid s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta)} = \frac{P(s_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) \times f(Y_t \mid s_t, \Phi_{t-1}; \theta)}{\sum_{j=1}^{k} P(s_t = j \mid \Phi_{t-1}; \theta) \times f(Y_t \mid s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta)}$$

将式(8)代入上式,得到

$$P(s_t = j \mid \Phi_t; \theta) = \frac{P(s_t, \boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta)}{\boldsymbol{1}'(\xi_{t|t-1} \bullet \eta_t)}$$

再代入式(7),得到

$$\xi_{t|t} = P(s_t = j \mid \Phi_t; \theta) = \frac{\xi_{t|t-1} \bullet \eta_t}{\boldsymbol{1}'(\xi_{t|t-1} \bullet \eta_t)} \tag{9}$$

又由马尔科夫链的性质,有

$$\xi_{t|t+1} = P\xi_{t|t} \tag{10}$$

由式(9)和(10),给定初始值 $\xi_{1|0}$,进行迭代运算就可以得到 $\xi_{t|t-1}$ 和 $\xi_{t|t}$ 值,按照式(8),则可以得到向量 Y_t 仅基于滞后变量和参数 θ 的条件分布密度函数. 因此可求出对数似然函数

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \ln f(\boldsymbol{Y}_t \mid \Phi_{t-1}; \theta) \tag{11}$$

通常设定初始向量值 $\xi_{1|0}$ 为状态变量概率转移矩阵的特征向量[4],计算公式为

$$\pi = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1} e_{N+1}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} I_N - P \\ \boldsymbol{1}' \end{bmatrix}$$

其中 e_{N+1} 表示单位阵的第 $N+1$ 列.

同单变量 MRS-GARCH 模型一样,当推断基于时刻 t 观察到的所有信息时,也可以得到向量 MRS-GARCH 模型的过滤概率,$p(s_t, s_{t-1}, \cdots, s_{t-q} \mid \boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-1}, \cdots)$,其意义为变量在时刻 t 的值为 s_t,$t-1$ 时刻的值为 s_{t-1},……,$t-q$ 时刻值为 s_{t-q} 情况下的联合条件概率. 基于全样本可以构建"平滑概率"$p(s_t \mid \boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-1}, \cdots)$,表示基于全样本条件下推断出在时刻 t 变量处于某一个状态的概率.

3　向量 MRS-GARCH 模型方差持续性

金融风险存在波动聚集效应,即当前波动必定会对未来波动产生一定影响. 为度量这种影响的强弱和持续效应,Engle 等[26-27]首次提出持续性的概念. 方差持续性是指对条件方差各个时期的预测都对初始值具有敏感依赖性,即当前条件方差的波动对未来条件方差的预测会产生持续性的影响.

下面从预测的角度探讨向量 MRS-GARCH 的波动持续性,基于 $t+m-1$ 期信息集向前 m 期预测推导,假设时刻 $t, t-1, \cdots, t-q+1$ 对应的状态 $s_t, s_{t-1}, \cdots, s_{t-q+1}$ 已知

$$\mathrm{Var}_{t+m-1}(u_{t+m}) = \mathrm{E}(u_{t+m}^2 \mid s_t, s_{t-1}, \cdots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \cdots, \tilde{u}_{t-q+1}) = \mathrm{E}(g_{s_{t+m}} \mid s_t, s_{t-1}, \cdots, s_{t-q+1}) \times \mathrm{E}(\tilde{u}_{t+m}^2 \mid \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \cdots, \tilde{u}_{t-q+1}) = \mathrm{E}(g_{s_{t+m}} \mid s_t, s_{t-1}, \cdots, s_{t-q+1}) \operatorname{vec}(H_t) \tag{12}$$

这里 $\mathrm{Var}_{t+m-1}(\cdot)$ 表示基于 $t+m-1$ 时刻信息集的条件方差.

由式(12)可知,残差 u_{s_t} 的预测由两部分构成: 一部分为对状态波动的预测; 另一部分为引入 Markov 链的向量 GARCH 过程的波动预测. 故向量 MRS-GARCH 过程的波动持续性,需要探讨状态期望持续时间与向量 GARCH 成分的持续性. 下文将分这两部分研究向量 MRS-GARCH 过程的持续性.

1) 对于状态持续时间的推导

状态变量 s_t 为一阶 Markov 链过程,概率转移矩阵中由状态 $s_t = 1$ 转移到 $s_{t+1} = 1$ 的概率为 p_{11}. 在时刻 t 时状态变量 $s_t = 1$,时刻 $t+1$ 时 $s_{t+1} = 1$ 的概率为 p_{11}. 给定 $t+1$ 时刻 $s_{t+1} = 1$ 的概率为 p_{11},$t+2$ 时刻 $s_{t+2} = 1$ 的概率为 p_{11}^2. 同理可以得到 t 时刻 $s_t = 1$ 的条件下,以后各时刻状态变量取值均为 1,即各时刻状态一直取 1 的概率分别为(p_{11}, p_{11}^2, p_{11}^3, $\cdots$). 对时刻 t 及其后的期数依据状态变量取值为 1 的概率求期望值即得到状态 1 的平均持

续期

$$(1+p_{11}+p_{11}^2+p_{11}^3+\cdots)=\frac{1}{(1-p_{11})} \quad (13)$$

同理可以求出其他各状态的持续期为 $1/(1-p_{ii})$，$i=1,2,\cdots,k$. 若得到各状态的取值概率，将其代入 $1/(1-p_{ii})$，即得到状态变量 $s_t=i$ 的平均持续期. 一个状态的持续期越长，表明这个状态越稳定，表明从该状态转换到其他状态的概率较小.

2) 引入 Markov 链的向量 GARCH 过程的波动持续性

下面基于向前 m 期预测公式讨论向量 MRS-GARCH 过程中向量 GARCH(p,q) 过程的持续性，求 $\tilde{u}_t$ 向前 m 期的预测公式

$$\begin{aligned} \mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m})) &= W_0+\sum_{i=1}^{q}A_i\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-i}))+\sum_{j=1}^{p}B_i\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{i+m-j})) \\ &= \begin{cases} W_0+(A_1+B_1)\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-1}))+\cdots(A_q+B_q)\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-q}))+ \\ B_{q+1}\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-q-1}))+\cdots+B_p\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-p})) & p>q \\ W_0+(A_1+B_1)\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-1}))+\cdots(A_q+B_q)\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-q})) & p=q \\ W_0+(A_1+B_1)\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-1}))+\cdots(A_q+B_q)\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-q}))+ \\ A_{p+1}\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-p-1}))+\cdots+A_q\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-q})) & p<q \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

这里 $\mathrm{E_s}(\cdot)$ 表示基于 s 期信息集的条件期望.

令 $l=\max(p,q)$，则

$$\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m}))= W_0+\sum_{i=1}^{l}(A_i+B_i)\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}(H_{t+m-i})) \quad (15)$$

$i>q$ 时，$A_i=0$；$i<p$ 时，$B_i=0$

令

$$\mathrm{vec}_n(\boldsymbol{H}_t)=(\mathrm{vec}(H_{t+m}),\mathrm{vec}(H_{t+m-1}),\cdots,\mathrm{vec}(H_{t+s-l-1}))^{\mathrm{T}}$$

为 $l\cdot N^2$ 维列向量. 则式(15) 可写为

$$\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}_n(\boldsymbol{H}_t))=\boldsymbol{D}_n^{\mathrm{T}}W+F_n\mathrm{E_s}(\mathrm{vec}_n(H_{t-1}))$$

$\boldsymbol{D}_n$ 为 $N^2\times n$ 阶矩阵，其(i,i) 处元素为 1，其余均为 0$(i=1,2,\cdots,N^2)$. F_n 为如下 $n\times n$ 伴随矩阵

$$\boldsymbol{F}_n=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 & \cdots & A_l+B_l \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

则特征方程

$$\det\left[I-\sum_{i=1}^{q}A_i(\lambda^{-1})-\sum_{j=1}^{p}B_j(\lambda^{-1})\right]=0$$

的根等价于特征方程 $\det[I-F_n(\lambda^{-1})]=0$ 的根，其特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$n=lN^2$. 若 $p>q$，特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{pN^2}$；若 $p<q$，特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{qN^2}$.

令 $\lambda^*=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，则 λ^* 为向量 MRS-GARCH 过程中向量 GARCH 成分的波动性参数. 若 $|\lambda^*|<1$，则向量 MRS-GARCH 过程中向量 GARCH 过程关于波动协方差平稳，从而由文献[7] 的定理得到向量过程关于波动非持续.

由上面分析得知，向量 MRS-GARCH 过程的方差变动中存在两种成分，一种是前期的方差波动导致现在方差的波动，另外一种是状态的变化导致的波动. 所以向量 MRS-GARCH 过程关于波动的持续性应考察两部分指标：状态期望持续时间 $1/(1-p_{ii})$(i 为 s_t 所处的状态) 和引入 Markov 链的向量 GARCH 过程的系数多项式矩阵的最大特征根 λ^*. 若令 $\delta=\sum_{i=1}^{k}p_{ii}-1$，表示由 Markov 性所导致的异方差存在度，向量 MRS-GARCH 过程以 $\max\{\lambda^*,\delta\}$ 的速度指数衰减，λ^* 度量了波动冲击对协方差的影响，而 δ 度量了状态变化所导致的异方差的存在度.

基于上文对向量 MRS-GARCH 过程持续性研究的基础，继续探讨满足何种条件向量 MRS-GARCH 过程保持平稳性. 下面给出更为直接的判断向量 MRS-GARCH 模型的持续性的结论.

令 $N\times N$ 维正定对称矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_t$ 表示向量 $\boldsymbol{Y}_t$ 的协方差矩阵，$\boldsymbol{H}_{i,t}$ 表示 Y_t 在状态 i 即 $s_t=i$ 时的协方差矩阵. 存在 k 个状态时向量 $\boldsymbol{Y}_t$ 的协方差矩阵，其形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\widetilde{\boldsymbol{H}}_t) &= \sum_{i=1}^{k}\mathrm{vec}(\boldsymbol{H}_{i,t})\,p(s_t = i \mid \Phi_{t-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\mathrm{vec}(\boldsymbol{H}_{i,t})\,p_{ii} \qquad (17)\end{aligned}$$

容易看出向量 MRS-GARCH 过程 $\boldsymbol{Y}_t$ 的协方差矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_t$ 实际上是 k 个状态下协方差矩阵 $\boldsymbol{H}_{i,t}$ 依据其状态概率为权重的加权和. 下面给出向量 MRS-GARCH 过程满足协方差平稳性的充分条件.

定理 1　已知向量 MRS-GARCH 过程在每一个状态 $s_t = i(i = 1,\cdots,k)$ 对应的概率 P_{ii}，每个状态下向量 GARCH 过程的特征方程 $\mathrm{dec}\mid I - A^{(i)}(\lambda) - B^{(i)}(\lambda)\mid = 0$ 的特征根 $\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in}$，$n = N^2$，$(i = 1,2,\cdots,k)$，$\boldsymbol{A}^{(i)}$，$\boldsymbol{B}^{(i)}$ 为状态 i 时向量 GARCH 过程协方差矩阵方程的系数矩阵.

令

$$\lambda_i^* = \max\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{ik}\}$$

若 $\left|\sum_{i=1}^{k} p_{ii}\cdot\lambda_i^*\right| < 1$，则向量 MRS-GARCH 过程平稳，即关于波动非持续.

证明　向量 Y_t 的协方差矩阵形式为

$$\mathrm{vec}(\widetilde{\boldsymbol{H}}_t) = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{vec}(\boldsymbol{H}_{i,t})\,p_{ii} = \sum_{i=1}^{k}p_{ii}\,[W_0^{(i)} + \boldsymbol{A}^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{u}}_t,\tilde{\boldsymbol{u}}_t') + B^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(\boldsymbol{H}_{i,t})]$$

其中 $\boldsymbol{H}_{i,t}$ 为在状态 i 即 $s_t = i$ 时的协方差矩阵.

向量 MRS-GARCH 过程的系数矩阵的特征多项式为

$$\sum_{i=1}^{k} p_{ii}\det\mid I - A^{(i)}(\lambda) - \boldsymbol{B}^{(i)}(\lambda)\mid = 0 \qquad (18)$$

令各状态下的 GARCH 过程的系数矩阵的特征值为 λ_{i1}，λ_{i2}，$\cdots$，λ_{in}，$n = N^2$，$i = 1,2,\cdots,k$.

由式(18)可得到向量 MRS-GARCH 过程的系数矩阵的最大特征值为 $\sum_{i=1}^{k}p_{ii}\lambda_i^*$，由向量 GARCH 过程的性质[13]，当且仅当特征方程 $\det\mid I - A^{(i)}(\lambda) - \boldsymbol{B}^{(i)}(\lambda)\mid = 0$ 的根都在单位圆内，Y_t 是协方差平稳的. 令 $\lambda_i^* = \max\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{ik}\}$ 为系数矩阵的特征值的最大值，则相当于要求 $\mid\lambda_i^*\mid < 1$，由此可得若 $\left|\sum_{i=1}^{k}p_{ii},\lambda_i^*\right| < 1$，则向量 MRS-GARCH 过程 $\boldsymbol{Y}_t$ 是协方差平稳的，从而关于波动非持续[28].　证毕.

定理 1 说明对于向量 MRS-GARCH(k,p,q) 过程，并不要求每个状态下的波动持续性参数都满足 $\mid\lambda_i^*\mid < 1$，某些状态下的条件波动可以是单整的甚至是易波动的，但是平均起来这些状态的概率分布应该满足 $\left|\sum_{i=1}^{k}p_{ii},\lambda_i^*\right| < 1$，即若某些状态存在较大的波动性参数值，但是这些状态必需有足够小的概率.

在向量 MRS-GARCH 模型持续性研究的基础上，进一步讨论其关于方差的协同持续性.

4　向量 MRS-GARCH(k,p,q) 模型的协同持续性

根据投资组合理论，通过资产多样化可分散市场风险，但 Lamoureux[29] 与 Karnasons[30] 指出: 组合投资在使市场风险分散化的同时，却伴生了组合资产收益波动持续性增长的倾向，为此波动的协同持续研究显得尤为重要. 若多元金融时间序列的各个分量具有波动持续性，而存在一个或者多个线性组合使他们经过组合后关于波动不具有持续性时，则称该向量时间序列关于波动是协同持续的. 协同持续性的定义首先由 Bollerslev 和 Engle[31] 给出. 另外，张世英[32]、李汉东[33-36] 从单位根的角度给出了关于多元 GARCH 过程协同持续性的定义. 有关协同持续性的研究，在经济和金融时间序列的建模和分析中有重要的指导意义，尤其是在动态组合资产投资和资本资产定价分析中用处极大.

下面给出向量 MRS-GARCH 过程的存在协同持续性定理.

定理 2　令 $N\times 1$ 维向量

$$\gamma = \begin{cases}\gamma_1 & s_t = 1\\ \gamma_2 & s_t = 2\\ \vdots & \vdots\\ \gamma_k & s_t = k\end{cases}$$

$\boldsymbol{Y}_t^i$ 为状态 i 下向量随机过程 $\boldsymbol{Y}_t$ 的不同表现形式.

假设在每个状态 $s_t = i(i = 1,2,\cdots,k)$ 下，向

量过程 $\gamma_i Y_t^i$ 的最大特征值为 $\tilde{\lambda}_i^*$. 若满足条件 $\left|\sum_{i=1}^{k} p_{ii} \cdot \tilde{\lambda}_i^*\right| < 1$,则向量 MRS-GARCH($k,p,q$) 过程是协同持续的,此时向量 γ 称为变结构协同持续向量.

证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{vec}(\gamma\gamma')'\mathrm{vec}(\tilde{H}_t) &= \mathrm{vec}(\gamma\gamma')'\sum_{i=1}^{k} p_{ii}\left[W_0^{(i)} + A^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(\tilde{u}_t\tilde{u}_t') + B^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(H_{i,t})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}\mathrm{vec}(\gamma_i\gamma_i')' p_{ii}\left[W_0^{(i)} + A^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(\tilde{u}_t\tilde{u}_t') + B^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(H_{i,t})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_{ii}\mathrm{vec}(\gamma_i\gamma_i')'\left[W_0^{(i)} + A^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(\tilde{u}_t\tilde{u}_t') + B^{(i)}(L)\,\mathrm{vec}(H_{i,t})\right]
\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\mathrm{vec}(\gamma\gamma')$ 表示一个 $N^2 \times 1$ 维向量,$H_{i,t}$ 为在状态 i 即 $s_t = i$ 时的协方差矩阵,$A^{(i)}$,$B^{(i)}$ 为状态 i 下向量 GARCH 过程协方差矩阵方程的系数矩阵.

令各状态下的向量 $[\mathrm{vec}(\gamma_i\gamma_i')\ \mathrm{vec}(H_{i,t})]$ 过程的系数矩阵 $[\mathrm{vec}(\gamma_i\gamma_i')'A^{(i)}(L) + \mathrm{vec}(\gamma_i\gamma_i')'B^{(i)}(L)]$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_{i1}, \tilde{\lambda}_{i2}, \cdots, \tilde{\lambda}_{in}$,$n = N^2$,$i = 1, 2, \cdots, k$.

令 $\tilde{\lambda}_i^* = \max\{\tilde{\lambda}_{i1}, \tilde{\lambda}_{i2}, \cdots, \tilde{\lambda}_{ik}\}$,由协同持续定义,若 $|\tilde{\lambda}_i^*| < 1$,则在状态 i 下向量 GARCH 过程协同持续.

$[\mathrm{vec}(\gamma\gamma')'\ \mathrm{vec}(\tilde{H}_t)]$ 系数多项式矩阵为 $\sum_{i=1}^{k} p_{ii}\left(\mathrm{vec}(\gamma_i\gamma_i')'A^{(i)}(L) + \mathrm{vec}(\gamma_i\gamma_i')'B^{(i)}(L)\right)$,由式(19)可知其最大特征值为 $\sum_{i=1}^{k} p_{ii}\tilde{\lambda}_i^*$,若其所有特征根的模都在单位圆内,则向量 MRS-GARCH 模型是协同持续的. 即若其满足 $\left|\sum_{i=1}^{k} p_{ii} \cdot \tilde{\lambda}_i^*\right| < 1$,则向量 MRS-GARCH 模型是协同持续的. 证毕.

由定理 2 可以看出,对于向量 MRS-GARCH 过程,类似其协方差平稳性质结论,并不要求在每个状态下都具有协同持续性,但是平均起来这些状态的概率分布应该满足协方差平稳.

5 实证研究

本文选取 2000-1-4 到 2008-12-31 期间上证综合指数和深证成份指数每个交易日的收盘价进行实证分析,样本数为 2 177,分别用 SH 和 SZ 表示,所选数据来自 wind 资讯软件系统. 主要通过 GAUSS8.0 软件及 OPTMUM 优化包获得实证分析结果. 以 p_t 表示 t 时刻的收盘价,分别以 p_{1t},p_{2t} 表示上证综合指数和深证成份指数的收盘价. 根据处理一般金融数据的方法,为了得到稳定的时间序列,将已有数据取对数收益率,即把 $y_t' = \ln(p_t / p_{t-1})$ 作为因变量进行估计,以 $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$ 表示两个指数的对数收益率.

对两个序列分别用 GARCH(1,1) 模型估计,沪市反映波动持续性的 GARCH 项系数之和为 $p = 0.985$,深市为 $p = 0.990$,可见两个序列的波动均具有很强的持续性.

首先用传统向量 GARCH 模型对 2 个序列进行建模. 用沪市收益率对深市收益率进行回归,按照规律,对于尖峰厚尾的非正态分布,用 GARCH(1,1) 模型就能够刻画其分布,故对残差用 GARCH(1,1) 模型拟合,得到回归残差模型为

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= 0.004\,107 + 0.439\,788 y_{2t} \\
\sigma_t^2 &= 0.033\,058 + 0.147\,033 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.853\,476 \sigma_t^2
\end{aligned}$$

可见残差序列高度持续,则 $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$ 不存在协同持续.

下面用向量 MRS-GARCH 模型对沪市、深市收益率进行建模,研究两者之间的协同持续关系. 一般认为股市波动有 3 种状态,分别用 p_1,p_2,p_3 表示. 对沪市、深市收益率用向量 MRS-GARCH 建模,得到结果为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.851\,02 \\ 0.861\,21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1s_t} \\ u_{2s_t} \end{pmatrix},$$

$$u_{s_t} = \begin{pmatrix} u_{1s_t} \\ u_{2s_t} \end{pmatrix}$$

$$u_{s_t} = \sqrt{g_{s_t}} \times \tilde{u}_t$$

$$g_1 = 1, g_2 = 4.2, g_3 = 12.3$$

$$\tilde{u}_t = H_t^{1/2} v_t,\ v_t \sim i.i.d(0, I_2)$$

$$\begin{pmatrix} h_{1t} \\ h_{12t} \\ h_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.409\,3\text{E}-006 \\ 0.078\,2 \\ 7.022\,9\text{E}-006 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0.117\,91 & 0.651\,42 & 0.028\,6 \\ -0.073\,72 & 0.321\,7 & 0.038\,9 \\ 0.138\,78 & 0.091\,2 & 0.658\,2 \end{pmatrix} \times$$

$$\text{vec}(\tilde{u}_{t-1} \cdot \tilde{u}'_{t-1}) +$$

$$\begin{pmatrix} 0.861\,02 & 0.023\,3 & 0.602\,7 \\ 0.848\,79 & 0.351\,1 & 0.476\,1 \\ 0.910\,8 & 0.870\,21 & 0.170\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1t-1} \\ h_{12t-1} \\ h_{2t-1} \end{pmatrix}$$

3 个状态之间的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.980\,727 & 0 & 0.019\,273 \\ 0.019\,212 & 0.974\,605 & 0.006\,183 \\ 0 & 0.027\,697 & 0.972\,303 \end{bmatrix}$$

状态 1 平均持续时间为 $1/(1-p_{11})$，约为 52 天，状态 2 的平均持续时间为 39 天，状态 3 的平均持续时间为 36 天，可见状态 1 内波动的稳定性最强、持续期最长，波动周期向该状态转移的概率也最大，令 $\delta = \sum_{i=1}^{k} p_{ii} - 1 = 1.929\,635$，表示由 Markov 性所导致的异方差存在度.

进一步求出向量 MRS-GARCH 模型中向量 GARCH 过程部分的波动性参数为：状态 1 时 $\lambda_1^* = 0.069\,93$，状态 2 时 $\lambda_2^* = 0.183$，状态 3 时 $\lambda_3^* = 0.051$，计算出向量 MRS-GARCH 过程的持续性参数 $\lambda^* = 0.186$，故向量 MRS-GARCH 过程波动持续性平稳，即引入 Markov 链之后，沪市、深市收益率存在协同持续性，由此可见波动状态的转换可能导致序列组合的伪持续性，而考虑了状态转移之后伪持续性消失.

6　结束语

金融市场的波动具有普遍的方差持续性，因此研究多个变量的波动性及协同持续性对于金融风险的防范和金融资产的组合问题具有重要意义. 而由于存在变结构问题，必需将持续性研究与变结构问题结合起来，分析多个变量之间在不同阶段内的特定关联属性，以得到变量在不同阶段不同状态下的波动关系，即联动性.

为了研究各变量在不同阶段的不同波动关系，本文构建了向量 MRS-GARCH 模型，该模型可以在平稳波动状态和剧烈波动状态之间转换，能够更好地模拟和预测波动在高、低波动状态之间的转换以及制度、政策变迁引起的状态跳跃或转换时的特征.

本文运用滤波技术推导了模型的参数估计过程，给出了具体极大似然函数估计方法. 从状态持续时间和引入 Markov 链的向量 GARCH 过程持续性两个方面探讨了向量 MRS-GARCH 模型的持续性，提出了向量 MRS-GARCH 过程的衰减速度指数，得出了向量 MRS-GARCH 过程满足协方差平稳性和协同持续性的充分必要条件，指出了向量 MRS-GARCH 过程并不要求在每个状态下保持平稳或协同持续，但是平均起来所有状态下的概率分布应该满足平稳性和持续性的条件. 最后进行了实证研究，证实用向量 MRS-GARCH 模型建模之后，沪市、深市存在变结构协同持续性，即在考虑了状态转移之后伪持续性消失.

本文考虑的 Markov 链转移概率为恒定转移概率，即假设转移概率是固定不变的，可以更一般地考虑转移概率是时变的，即依赖于某些外生或预先确定的变量，从而能够更好地描述金融时间序列的状态跳跃性，这也是非常值得研究的领域.

另外，有待更进一步地研究关于基于 Markov 转换机制的向量金融时间序列高阶矩阵模型的持续性与协同持续性问题. 这对于金融市场、风险管理、资产投资组合都具有良好的理论意义和应用价值.

参 考 文 献：

[1] Hamilton J D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle [J]. Econometrica, 1989, 57(2): 357-384.

[2] 陈 云，陈浪南，林伟斌. 中国股票市场一体化的时变特征分析 [J]. 管理科学学报，2009，12(2)：67 – 76.
Chen Yun，Chen Lang-nan，Lin Wei-bin. Time-varying characteristics of integration in Chinese Stock Markets [J]. Journal of Management Sciences in China，2009，12(2)：67 – 76. (in Chinese)

[3] 刘金全，刘兆波. 我国货币政策作用非对称性和波动性的实证检验 [J]. 管理科学学报，2003，6(3)：35 – 40.
Liu Jin-quan，Liu Zhao-bo. Empirical study of asymmetry and volatility in effectiveness of monetary policy [J]. Journal of Management Sciences in China，2003，6(3)：35 – 40. (in Chinese)

[4] Chou R Y. Volatility persistence and stock valuations: Some empirical evidence using GARCH [J]. Journal of Applied Economertics，1998，3(2)：279 – 294.

[5] 魏 宇. 沪深 300 股指期货的波动率预测模型研究 [J]. 管理科学学报，2010，13(2)：66 – 76.
Wei Yu. Volatility forecasting models for CSI300 index futures [J]. Journal of Management Sciences in China，2010，13(2)：66 – 76. (in Chinese)

[6] 樊 智，张世英. 多元 GARCH 建模及其在中国股市分析中的应用 [J]. 管理科学学报，2003，6(2)：68 – 73.
Fan Zhi，Zhang Shi-ying. Multivariate GARCH modeling and its application in volatility analysis of Chinese stock markets [J]. Journal of Management Sciences in China，2003，6(2)：68 – 73. (in Chinese)

[7] 王承炜，吴冲锋. 中国股市价格—交易量的线性及非线性因果关系研究 [J]. 管理科学学报，2002，5(4)：7 – 12.
Wang Cheng-wei，Wu Chong-feng. Linear and nonlinear Granger causality test of stock price-volume relation: Evidences from Chinese markets [J]. Journal of Manegement Sciences in China，2002，5(4)：7 – 12. (in Chinese)

[8] Lamoureux C G，Lastrapes W D. Heteroskedasticity in stock return data: Volume versus GARCH effects [J]. Journal of Finance，1990，55(1)：221 – 229.

[9] Hamilton J D，Susmel R. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime [J]. Journal of Econometrics，1994，64(1/2)：307 – 333.

[10] 魏 宇. 股票市场的极值风险测度及后验分析研究 [J]. 管理科学学报，2009，12(2)：67 – 76.
Wei Yu. EVT risk measures and its backtesting in stock markets [J]. Journal of Manegement Sciences in China，2009，12(2)：67 – 76. (in Chinese)

[11] 王明进，陈奇志. 基于独立成分分解的多元波动率模型 [J]. 管理科学学报，2006，9(5)：56 – 64.
Wang Ming-jin，Chen Qi-zhi. Multivariate volatilities modeling based on independent components [J]. Journal of Management Sciences in China，2006，9(5)：56 – 64. (in Chinese)

[12] 余素红，张世英，宋 军. 基于 GARCH 模型和 SV 模型的 VaR 比较 [J]. 管理科学学报，2004，7(5)：61 – 66.
Yu Su-hong，Zhang Shi-ying，Song Jun. Comparison of VaR based on GARCH and SV models [J]. Journal of Management Sciences in China，2004，7(5)：61 – 66. (in Chinese)

[13] Engle R F，Mustafa C. Implied ARCH models from options prices [J]. Journal of Econometrics，1992，52(1/2)：289 – 311.

[14] 李汉东，张世英. 存在方差持续性的资本资产定价模型分析 [J]. 管理科学学报，2003，6(1)：75 – 80.
Li Han-dong，Zhang Shi-ying，Analysis of capital asset pricing model with persistence in variance [J]. Journal of Management Sciences in China，2003，6(1)：75 – 80. (in Chinese)

[15] 杜子平，张世英. 向量随机波动模型的共因子研究 [J]. 管理科学学报，2002，5(5)：1 – 5.
Du Zi-ping; Zhang Shi-ying，Study on common factors of vector stochastic volatility model [J]. Journal of Manegement Sciences in China，2002，5(5)：1 – 5. (in Chinese)

[16] 柯 珂，张世英. ARCH 模型的诊断分析 [J]. 管理科学学报，2001，4(2)：12 – 18.
Ke Ke，Zhang Shi-ying. Diagnose analysis in ARCH models [J]. Journal of Manegement Sciences in China，2001，4(2)：12 – 18. (in Chinese)

[17] Loboat N，Svain N E. Real and spurious long-memory properties of Stock-market data [J]. Journal of Busness and Economic Statistics，1998，16(3)：261 – 268.

[18] Lamoureux C，Lastapes W. Persistence in variance，structural change and the GARCH models [J]. Journal of Business and Economic Statistics，1990，8(4)：225 – 234.

[19] Hamilton J D. Analysis of time series subject to change in regime [J]. Journal of Econometrics, 1990, 45(1/2): 39 – 70.
[20] Marcucci J P, Forecasting Stork Market Volatility with Regime-Switching GARCH Models [M] //Studies in Nonlinear & Econometics, Berkeley Electronic Press, 2005, 9(4).
[21] Haas M, Mittnik S, Paolella M S. Volatility dynamics in exchange rates: Markov switching GARCH-mixtures [J]. Review of Financial Sutdies, 2003, 14(3): 521 – 553.
[22] 谢 赤，吴雄伟. 一个基于水平模型的利率结构转换模型 [J]. 系统工程，2002，20(1)：20 – 23.
Xie Chi, Wu Xiong-wei. A regime-switching model of interest rates based on the level models [J]. Systems Engineering, 2002, 20(1): 20 – 23. (in Chinese)
[23] 蒋详林，王春峰，吴晓霖. 基于状态转移 ARCH 模型的中国股市波动性研究 [J]. 系统工程学报，2004，19(3)：270 – 277.
Jiang Xiang-lin, Wang Chun-feng, Wu Xiao-lin. Investigating on volatility of Chinese stock market by regime-switching ARCH model [J]. Journal of Systems Engineering, 2004, 19(3): 270 – 277. (in Chinese)
[24] 孙金丽，张世英. 具有结构转换的 GARCH 模型及其在中国股市中的应用 [J]. 系统工程，2003，21(6)：86 – 91.
Sun Jin-li, Zhang Shi-ying, Regime-swithing GARCH in China's Stock Market [J]. Systems Engineering, 2003, 21(6): 86 – 91. (in Chinese)
[25] 郭名媛，张世英. 基于 DDMRS-GARCH 的 VaR 模型及其在上海股票市场的实证研究 [J]. 统计与决策，2007，16(3)：285 – 290.
Guo Ming-yuan, Zhang Shi-ying. The VaR based DDMRS-GARCH model and the Shanghai Stock Market research [J]. Statistics and Decision, 2007, 16(3): 285 – 290. (in Chinese)
[26] Engle R F, Bollerslev T. Modeling the persistence of conditional variances [J]. Econometric Reviews, 1986, 5(1): 1 – 50.
[27] Engle R F, Kroner K F. Multivariate simultaneous generalized ARCH [J]. Econometric Theory, 1995, 11(1): 122 – 150.
[28] 杜子平，张世英. 向量 GARCH 过程协同持续性研究 [J]. 系统工程学报，2003，18(5)：385 – 390.
Du Zi-ping, Zhang Shi-ying. Copersistence vector GARCH process research [J]. Journal of Systems Engineering, 2003, 18(5): 385 – 390. (in Chinese)
[29] Lamoureux C G, Lastrapes W D. Persistence in variance, structural change and the GARCH model [J]. Journal of Business and Economic Statistics, 1990, 8(2): 225 – 234.
[30] Karnasos M, Psaradakis Z, Sola M. Cross-sectional aggregation and persistence in conditional variance [R]. Heslington, York: University of York, 1999.
[31] Bollerslev T, Engle R F. Common persistence in conditional variances [J]. Econometrica, 1993, 62(1): 167 – 186.
[32] 张世英，李汉东，樊 智. 金融风险的持续性及其规避策略 [J]. 系统工程理论与实践，2002，22(5)：31 – 36.
Zhang Shi-ying, Li Han-dong, Fan Zhi. The persistence of financial risk and its avoiding strategy [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2002, 22(5): 31 – 36. (in Chinese)
[33] 李汉东，张世英. 自回归条件异方差的持续性研究 [J]. 预测，2000，(1)：51 – 54.
Li Han-dong, Zhang Shi-ying. The persistence of autoregressive conditional heteroscedasticity [J]. Forecasting, 2000, (1): 51 – 54. (in Chinese)
[34] 李汉东，张世英. 波动持续性对资本资产定价模型的影响分析 [M] //亚太金融学会第七届年会论文选，上海：上海交通大学出版社，2001：1 – 15.
Li Han-dong, Zhang Shi-ying. Volatility Persistence on The Impact of The Capital Asset Pricing Model [M] // Seventh Asia Pacific Finance Association Annual Meeting Selected Papers, Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2001: 1 – 15. (in Chinese)
[35] 李汉东，张世英. BEKK 模型的协同持续性研究 [J]. 系统工程学报，2001，16(3)：225 – 231.
Li Han dong, Zhang Shi-ying, Research on common persistence of BEKK model [J]. Journal of Systems Engineering, 2001: 16(3): 225 – 231. (in Chinese)
[36] 李汉东，张世英. 随机波动模型的波动持续性研究 [C] //系统科学和复杂性研究文集. 宜昌：中国系统工程学会第

11 届年会, 2000: 375 – 380.
Li Han-dong, Zhang Shi-ying. Stochastic volatility model volatility persistence [C] //System Science and Complexity of Papers, Yichang: The Chinese System Engineering Society 11th Annual Meeting, 2000: 375 – 380. (in Chinese)

Research on volatility persistence of vector MRS-GARCH model

JIANG Xiao-gan, CAI Yu
School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China

Abstract: In order to describe the volatility relationship in the different stages between financial variables, this paper introduces markov conversion mechanism into vector GARCH model to construct the vector MRS-GARCH model. The paper derives aparameter estimation method of this model with filtering technology, then studies the persistence of the vector process based on the prediction equation. Next this article explores the persistence of vector MRS-GARCH model from two aspects of the state duration time and the persistent of vector GARCH process with markov chain, then puts forward exponential decay rate of the vector MRS-GARCH. Afterward, the theorem that satisfied coordination of persistent of vector MRS-GARCH process is given and proved, which can analyze the specific association of financial variables at different stages, and derive the regime-swithing linkages between various financial variables. In the end, this essay uses the vector MRS-GARCH model to empirically research on Shanghai and Shenzhen stock yield rates, then confirmes that the two stock markets exizsted co-peresitence after considering state transition.
Key words: vector MRS-GARCH; Markov; structure change; persistent; co-peresitence