具有相关波动因子的广义随机波动HJM模型①

杨宝臣，苏云鹏
（天津大学管理与经济学部，天津 300072）

摘要： 基于Heath-Jarrow-Morton（HJM）模型框架，将远期利率波动率设定为服从广义均值回归平方根过程的随机变量，以刻画隐性随机波动因子的动态特性，并通过将漂移项限制条件推广至波动因子之间，以及利率波动率的变化与利率变动之间存在相关性情况，建立了广义的多因子HJM模型. 在该模型框架下，基于一类特定波动率设定形式将风险中性概率测度下的收益率曲线表示为服从仿射扩散过程的有限维状态向量的函数形式，并推导出零息债券的准解析定价公式. 并且，基于市场风险价格的广义仿射设定形式，将以上结果推广至现实概率测度下.

关键词： HJM模型；随机波动率；相关性；马尔科夫转换；仿射实现
中图分类号： F830.91　**文献标识码：** A　**文章编号：** 1007-9807(2011)09-0077-09

0 引　言

Heath-Jarrow-Morton（简记HJM）[1]模型对于利率期限结构建模具有很好的灵活性，且其模型参数与可观测市场变量之间往往存在明确的联系，从而有利于市场环境的理解以及利率衍生品的定价. 然而，越来越多的研究表明，利率波动率具有一些传统利率期限结构模型不能刻画的特性. 传统的HJM模型假设利率期限结构由若干个互不相关的随机波动因子驱动，而实际上这些波动因子并不总是互不相关的. 对于相关的波动因子，虽然可以对其进行正交化处理以消除其相关性，然而这会使其失去原有的经济含义，从而使得模型参数与可观测市场变量之间的联系变得模糊不清[2]. 此外，利率波动率是随机变化的，且与利率变动相关. 例如，文献[3-4]在研究短期利率动态特性的过程中发现利率的相对波动率与利率负相关，而绝对波动率却与利率正相关. 最后，利率波动率中包含一些重要的隐性波动因子. 例如，文献[5-7]发现存在隐性随机波动因子，这些因子只影响利率衍生品的价格波动而不影响期限结构的动态特性，而文献[8]从实际利率波动中也发现存在隐性波动因子.

本文基于HJM模型框架，将远期利率波动率设定为服从广义均值回归平方根过程的随机变量，从而可以刻画隐性随机波动因子的动态特性；并通过将漂移项限制条件推广至波动因子之间，以及利率波动率的变化与利率变动之间存在相关性情形，建立了一个广义的多因子HJM模型.

此外，对于一般的波动率结构设定，HJM模型框架下期限结构的动态特性是具有路径依赖性的，也即非马尔科夫的，这会大大增加模型估计和定价计算的复杂程度. 鉴于此，很多学者对将HJM模型表示为有限个状态变量的马尔科夫过程的条件进行了研究，如文献[9-21]等. 在以上研究基础上，本文在所提出的广义HJM模型框架下基于一类特定波动率设定形式将风险中性概率测度下的收益率曲线表示为服从仿射扩散过程的

① 收稿日期：2009-11-09；修订日期：2011-01-06.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（70771075）；教育部博士点基金资助项目（200800560032）；教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目（NCET-08-0397）；长江学者和创新团队发展计划资助项目（IRT1028）；天津大学自主创新基金资助项目.
作者简介：杨宝臣（1966—），男，河北唐山人，博士，教授. Email：bchyang@tju.edu.cn

有限维状态向量的函数形式，并推导出零息债券的准解析定价公式. 并且，本文基于文献 [22] 提出的市场风险价格的广义仿射设定形式，将以上结果推广至现实概率测度下，从而可以使用常用的经济计量方法对模型进行估计.

1　传统 Heath-Jarrow-Morton 模型

对于有限到期日 $T \in [0, \infty)$，给定一个完备可测概率空间 $(\Omega, F_T, (F_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}, P)$ 其中 Ω 为状态空间，P 为相应的现实概率测度，F_T 为表示可测事件的 σ 代数，$(F_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ 为现实概率测度下由 n 维独立标准维纳过程

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t, \omega_t) = [W_1^{\mathrm{P}}(t, \omega_t), W_2^{\mathrm{P}}(t, \omega_t), \cdots, W_n^{\mathrm{P}}(t, \omega_t)]'$$

生成的右连续完备滤波，ω_t 表示维纳过程的路径. 为简便起见，记现实概率测度下 n 维独立标准维纳过程向量为

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t) = [W_1^{\mathrm{P}}(t), W_2^{\mathrm{P}}(t), \cdots, W_n^{\mathrm{P}}(t)]'$$

相应的风险中性概率测度下的标准维纳过程向量为

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{Q}}(t) = [W_1^{\mathrm{Q}}(t), W_2^{\mathrm{Q}}(t), \cdots, W_n^{\mathrm{Q}}(t)]'$$

在风险中性概率条件下，HJM 模型框架可由下面的随机微分方程给出

$$\mathrm{d}f(t,T) = \mu(t,T)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t,T)'\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{Q}}(t) \tag{1}$$

其中，$f(t,T)$ 为瞬时远期利率（即在时刻 t 商定的到期时刻为 T 的瞬时借入或贷出利率），$\mu(t,T)$ 为远期利率漂移项，$\boldsymbol{\sigma}(t,T)$ 为远期利率瞬时波动率向量，而 $W^{\mathrm{Q}}(t)$ 为风险中性概率测度下的标准维纳过程向量.

由 HJM 框架下无套利漂移项限制条件

$$\mu(t,T) = \boldsymbol{\sigma}(t,T)'\int_t^T \boldsymbol{\sigma}(t,u)\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

式(1) 可改写为

$$\mathrm{d}f(t,T) = \boldsymbol{\sigma}(t,T)'\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t,T)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t,T)'\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{Q}}(t) \tag{3}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t,T) = \int_t^T \boldsymbol{\sigma}(t,u)\,\mathrm{d}u$.

再假设市场风险价格为 $\boldsymbol{\Lambda}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Gamma}(s)\,\mathrm{d}s$，则由文献 [1] 可知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{Q}}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{\Lambda}(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

将式(4) 代入式(3)，可得现实概率条件下的 HJM 模型框架

$$\mathrm{d}f(t,T) = \boldsymbol{\sigma}(t,T)'[\bar{\sigma}(t,T) - \boldsymbol{\Lambda}(t)]\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t,T)'\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t) \tag{5}$$

其中：$\boldsymbol{\Lambda}(t)$ 为市场风险价格向量；$W^{\mathrm{P}}(t)$ 为现实概率测度下的标准维纳过程向量.

2　广义 Heath-Jarrow-Morton 模型

基于 HJM 模型框架，将远期利率波动率设定为服从广义均值回归平方根过程的随机变量，从而可以刻画隐性随机波动因子的动态特性，并通过将漂移项限制条件推广至波动因子之间，以及利率波动率的变化与利率变动之间存在相关性情况，建立了广义的多因子 HJM 模型.

设定在风险中性概率条件下，远期利率动态特性由下面微分方程组描述

$$\mathrm{d}f(t,T) = \mu(t,T)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N}\sigma_{\mathrm{f}i}(t,T)\sqrt{v_i(t)}\,\mathrm{d}W_i^{\mathrm{Q}}(t) \tag{6}$$

$$\mathrm{d}v_i(t) = \kappa_i(\theta_i - v_i(t))\,\mathrm{d}t + \sigma_{\mathrm{v}i}\sqrt{v_i(t)} \times \left(\rho_{\mathrm{v}i}\mathrm{d}W_i^{\mathrm{Q}}(t) + \sqrt{1-\rho_{\mathrm{v}i}^2}\,\mathrm{d}Z_i^{\mathrm{Q}}(t)\right) \tag{7}$$

其中：$v_i(t)$ 为随机波动因素；$W^{\mathrm{Q}}(t)$ 为风险中性概率测度下的标准维纳过程向量，其各元素之间相关系数矩阵为 $\boldsymbol{K}(t)$；$\rho_{\mathrm{v}i}$ 为 $v_i(t)$ 与 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{Q}}(t)$ 的相关系数；$\sigma_{\mathrm{f}i}$ 与 $\sigma_{\mathrm{v}i}$ 分别为远期利率与随机波动因素的波动率因子，$Z^{\mathrm{Q}}(t)$ 为与 $W^{\mathrm{Q}}(t)$ 相互正交的标准维纳过程向量.

在以上模型框架下，远期利率曲线由 N 个相关的随机因子驱动，而远期利率波动率则除了由以上 N 个期限结构因子驱动之外，还受 N 个与之正交的额外随机因子驱动，从而可以刻画隐性随机波动因子的动态特性. 此外，远期利率波动率与远期利率水平变动是相关的.

命题 1　若 $\mu(t,T)$ 为广义 HJM 模型(6) 及(7) 中所定义的远期利率漂移项，则有

$$\mu(t,T) = \sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N}\left[\rho_{ij}(t)\sqrt{v_i(t)v_j(t)} \times \sigma_{\mathrm{f}i}(t,T)\int_t^T \sigma_{\mathrm{f}j}(t,s)\,\mathrm{d}s\right] \tag{8}$$

其中，σ_{fi} 为远期利率波动率因子；$v_i(t)$ 为随机波动因素；$\rho_{ij}(t)$ 为维纳过程向量 $W^Q(t)$ 各元素之间相关系数矩阵 $K(t)$ 的元素，也即 $W^Q(t)$ 的第 i 个和第 j 个元素间的相关系数.

证明　见附录 A.

命题 1 基于 HJM 模型框架，在对隐性随机波动因子动态特性进行刻画的基础上，将远期利率的漂移项限制条件推广至波动因子之间，以及利率波动率的变化与利率变动之间存在相关性情况，从而建立了广义的多因子 HJM 模型，具有如下理论和实际意义.

1）该广义 HJM 模型允许波动因子之间存在相关关系，因此可利用具有实际经济意义但彼此相关的波动因子对固定收益证券及利率衍生品进行定价和风险管理. 例如，无风险利率和信用利差是驱动企业债券价格变动的两个主要因素，因此在对企业债券及其相关衍生品进行定价及风险管理时，以无风险利率和信用利差作为企业债券的利率期限结构的驱动因素会使得模型及其参数的经济含义更加直接和容易理解，并有利于相关衍生品的定价. 然而，实证研究表明，无风险利率和信用利差之间存在显著的负相关关系，因此传统的 HJM 模型框架需要对其进行正交化处理以消除其相关性，但是这会使其失去原有的经济含义，不利于利率风险和违约风险的测度及分析，从而不利于企业债券及其相关衍生品的定价及风险管理，而命题 1 所给出的广义 HJM 模型框架则有效解决了以上问题；

2）该广义 HJM 模型允许利率波动率的变化与利率变动之间存在相关性，有利于解决远期利率分布的厚尾问题，从而减小固定收益证券及利率衍生品的定价偏差；

3）该广义 HJM 模型引入了隐性随机波动因子，因此可基于衍生品价格的历史数据对隐性随机波动因子的动态特性进行刻画，从而提高衍生品的定价精度和风险管理效果.

3　广义 HJM 模型的有限维马尔科夫仿射实现

基于一类特定波动率设定形式将风险中性概率测度下的收益率曲线表示为服从马尔科夫仿射扩散过程的有限维状态向量的函数形式，并推导出零息债券的准解析定价公式.

定义 1　称一个 HJM 模型 A 是可 d 维仿射实现的，如果对于某个 $d \in \mathrm{N}_+$，存在一个 F_t 可测的 d 维随机过程 $z(t)$ 以及一个仿射函数 $\boldsymbol{\Phi}: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}_+$，使得

$$
\begin{aligned}
r(t,\tau) &= \boldsymbol{\Phi}(t,\tau,z(t)) \\
&= h_0(t,\tau) + \boldsymbol{h}(t,\tau)' z(t)
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中，$h_0(t,\tau) \in \mathbf{R}$ 和 $h(t,\tau) \in \mathbf{R}^d$ 均是确定性函数.

引理 1　一个 HJM 模型 A 是可 d 维仿射实现的，如果其波动率向量 $V(t,\tau)$ 的各元素 $\sigma_i(t,\tau)$ 均满足条件：对于每一个 $i \in \{1,\cdots,n\}$，则总存在 $d_i \in \mathbf{R}_+$ 使得 $\sigma_i(t,\tau)$ 关于 τ 满足 d_i 次可微，且满足下面 d_i 阶齐次线性微分方程

$$
L_i \sigma_i(t,\tau) = 0 \tag{10}
$$

其中

$$
L_i = \frac{\partial^{d_i}}{\partial \tau^{d_i}} - \sum_{j=0}^{d_i-1} k_{ij}(\tau) \frac{\partial^j}{\partial \tau^j}
$$

$k_{ij}(\tau)$ 为连续的确定性函数.

证明　参见文献[20]中命题 1.

此外，对于一般的波动率结构设定，HJM 模型框架下期限结构的动态特性是具有路径依赖性的，也即非马尔科夫的，这会大大增加模型估计和定价计算的复杂程度[23-25]. 鉴于此，很多学者研究了将 HJM 模型表示为有限个状态变量的马尔科夫过程的条件，如文献[9－21]等. 由以上研究并引理 1 可知，在 HJM 模型框架下对远期利率曲线进行有限维马尔科夫仿射实现的充要条件为

$$
\sigma_{fi}(t,T) = p_n(T-t)\,\mathrm{e}^{-\gamma_i(T-t)} \tag{11}
$$

其中 $p_n(\tau)$ 为 τ 的 n 阶多项式.

为简便起见，本文设定 $n = 1$，也即

$$
\sigma_{fi}(t,T) = (\alpha_{0i} + \alpha_{1i}(T-t))\,\mathrm{e}^{-\gamma_i(T-t)} \tag{12}
$$

以上波动率结构设定包含的范围十分广泛，并可以刻画利率期限结构可能遭受的各种类型的波动冲击，包括对于利率衍生品定价十分重要的驼型冲击[26].

基于以上波动率结构设定，可以对式(6)及(7)所定义的广义 HJM 模型进行有限维马尔科夫仿射实现，如命题 2 所示.

命题 2　在式(12)所设定的波动率结构条

件下，式(6)及(7)所定义的广义 HJM 模型具有如下马尔科夫仿射实现

$$
\begin{aligned}
f(t,T) = {} & f(0,T) + \sum_{i=1}^{N} C_{x_i}(T-t)\,x_i(t) + \\
& \sum_{i=1}^{N} C_{\varphi_i}(T-t)\,\varphi_i(t) + \\
& \sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{\phi_{ij}}^{k}(T-t)\,\phi_{ij}^{k}(t)
\end{aligned} \tag{13}
$$

其中

$$C_{x_i}(\tau) = (\alpha_{0i} + \alpha_{1i}\tau)\,\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau} \tag{14}$$

$$C_{\varphi_i}(\tau) = \alpha_{1i}\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau} \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\varphi_{ij}}^{1}(\tau) = {} & \frac{1}{\gamma_j}(\alpha_{0i} + \alpha_{1i}\tau) \times \\
& \left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau}
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\varphi_{ij}}^{2}(\tau) = {} & -\frac{1}{\gamma_j}\Big[\alpha_{0i}\left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right) + \\
& \left(\alpha_{0i}\alpha_{1j} + \alpha_{1i}\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right)\tau + \\
& \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j}\tau^2\Big]\,\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$C_{\phi_{ij}}^{3}(\tau) = \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_j}\left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau} \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\varphi_{ij}}^{4}(\tau) = {} & -\frac{1}{\gamma_j}\Big(\alpha_{0i}\alpha_{1j} + \alpha_{1i}\alpha_{0j} + \\
& \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j} + 2\alpha_{1i}\alpha_{1j}\tau\Big)\,\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau}
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$C_{\phi_{ij}}^{5}(\tau) = -\frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j}\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} \tag{20}$$

而状态变量服从以下随机过程

$$\mathrm{d}x_i(t) = -\gamma_i x_i(t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{v_i(t)}\,\mathrm{d}W_i^{Q}(t) \tag{21}$$

$$\mathrm{d}\varphi_i(t) = (x_i(t) - \gamma_i\varphi_i(t))\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi_{ij}^{1}(t) = {} & \Big[\rho_{ij}(t)\sqrt{v_i(t)\,v_j(t)} - \\
& \gamma_i\phi_{ij}^{1}(t)\Big]\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi_{ij}^{2}(t) = {} & \Big[\rho_{ij}(t)\sqrt{v_i(t)\,v_j(t)} - \\
& 2\gamma_i\phi_{ij}^{2}(t)\Big]\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$\mathrm{d}\phi_{ij}^{3}(t) = (\phi_{ij}^{1}(t) - \gamma_i\phi_{ij}^{3}(t))\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

$$\mathrm{d}\phi_{ij}^{4}(t) = (\phi_{ij}^{2}(t) - 2\gamma_i\phi_{ij}^{4}(t))\,\mathrm{d}t \tag{26}$$

$$\mathrm{d}\phi_{ij}^{5}(t) = (2\phi_{ij}^{4}(t) - 2\gamma_i\phi_{ij}^{5}(t))\,\mathrm{d}t \tag{27}$$

且初始条件为

$$x_i(0) = \varphi_i(0) = \phi_{ij}^{1}(0) = \cdots = \phi_{ij}^{5}(0) = 0$$

证明 见附录 B.

注意到，命题 2 中的辅助状态变量 $\varphi_i(t)$，$\phi_{ij}^{1}(t)$，$\phi_{ij}^{2}(t)$，…，$\phi_{ij}^{5}(t)$ 刻画了模型状态变量 $x_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 的历史路径信息，而以上辅助状态变量表达式中不含随机驱动项，也即局部确定性变量，因此命题 2 通过将这些辅助状态变量引入模型状态空间，对式(6)和(7)所定义的广义 HJM 模型进行了有限维马尔科夫仿射实现，使其具有很好的解析特性，从而为利用蒙特卡洛模拟对诸如互换期权、资产抵押证券等复合衍生品进行定价提供了便利.

由式(B.2)可知时刻 t 到期时刻为 T 的零息债券价格可表示为

$$
\begin{aligned}
B(t,T) = {} & \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)\,\mathrm{d}s\right\} \\
= {} & \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N}\tilde{C}_{x_i}(T-t)\,x_i(t) + \\
& \sum_{i=1}^{N}\tilde{C}_{\varphi_i}(T-t)\,\varphi_i(t) + \\
& \sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{C}_{\phi_{ij}}^{k}(T-t)\,\varphi_{ij}^{k}(t)\Big\}
\end{aligned} \tag{28}
$$

其中

$$\tilde{C}_{x_i}(\tau) = \frac{1}{\gamma_i}\left[\left(\alpha_{0i} + \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i}\right)(\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau} - 1) + \tau\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau}\right] \tag{29}$$

$$\tilde{C}_{\varphi_i}(\tau) = \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i}(\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau} - 1) \tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\phi_{ij}}^{1}(\tau) = {} & \frac{1}{\gamma_i\gamma_j}\left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right) \times \\
& \left[\left(\alpha_{0i} + \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i}\right)(\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau} - 1) + \alpha_{1i}\tau\mathrm{e}^{-\gamma_i\tau}\right]
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\phi_{ij}}^{2}(\tau) = {} & \frac{-1}{\gamma_j(\gamma_i + \gamma_j)}\Big\{\alpha_{0i}\left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right)(\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} - 1) + \left(\alpha_{0i} + \alpha_{1j} + \alpha_{1i}\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j} + \frac{2\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_i + \gamma_j}\right) \times \\
& \left[\tau\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} + \frac{1}{\gamma_i + \gamma_j}(\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} - 1)\right] + \alpha_{1i}\alpha_{1j}\tau^2\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau}\Big\}
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$C^3_{\phi_{ij}}(\tau) = \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i\gamma_j}\left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right)(e^{-\gamma_i\tau} - 1) \tag{33}$$

$$C^4_{\phi_{ij}}(\tau) = -\frac{1}{\gamma_j}\left(\alpha_{0i}\alpha_{1j} + \alpha_{1i}\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j} + 2\alpha_{1i}\alpha_{1j}\tau\right)e^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} \tag{34}$$

$$C^5_{\phi_{ij}}(\tau) = -\frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j}e^{-(\gamma_i+\gamma_j)\tau} \tag{35}$$

对式(28)应用伊藤定理进行微分，可得零息债券价格 $B(t,T)$ 服从以下随机过程

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r(t)dt + \sum_{i=1}^{N}\widetilde{C}_{x_i}(T-t)\sqrt{v_i(t)}dW_i^Q(t) \tag{36}$$

4　市场风险价格的设定

基于文献[22]提出的市场风险价格的广义仿射设定形式，将以上结果推广至现实概率测度 P 下，从而可以利用常用的经济计量方法对模型进行估计，以便于实际应用模型.

令 Λ_{Wi} 和 Λ_{Zi} 分别为维纳过程 W 和 Z 所对应的市场风险价格，也即

$$dW_i^Q(t) = dW_i^P(t) - \Lambda_{Wi}(t)dt \tag{37}$$

$$dZ_i^Q(t) = dZ_i^P(t) - \Lambda_{Zi}(t)dt \tag{38}$$

为在概率测度转换时不改变状态向量动态特性的仿射结构，本文设定市场风险价格 Λ_{Wi} 和 Λ_{Zi} 具有如下广义仿射形式

$$\Lambda_{Wi}(t) = \frac{\lambda_{wi0} + \lambda_{wix}x_i(t) + \lambda_{wiv}v_i(t)}{\sqrt{v_i(t)}} \tag{39}$$

$$\Lambda_{Zi}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho_{vi}^2}\sqrt{v_i(t)}} \times \{\lambda_{zi0} + \lambda_{ziv}v_i(t) - \rho_{vi}[\lambda_{wi0} + \lambda_{wix}x_i(t) + \lambda_{wiv}v_i(t)]\} \tag{40}$$

其中：状态变量 $x_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 以及相关系数 ρ_{vi} 如上文定义；λ_{wi0}、λ_{wix} 和 λ_{wiv} 以及 λ_{zi0} 和 λ_{ziv} 分别为市场风险价格 Λ_{Wi} 和 Λ_{Zi} 的设定参数.

由以上设定可知，在现实概率测度 P 下，状态变量 $x_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 服从以下随机过程

$$dx_i(t) = (\eta_i^P + \kappa_{xi}^P x_i(t) + \kappa_{xvi}^P v_i(t))dt + \sqrt{v_i(t)}dW_i^P(t) \tag{41}$$

$$dv_i(t) = \kappa_i^P(\theta_i^P - v_i(t))dt + \sigma_{vi}\sqrt{v_i(t)} \times (\rho_{vi}dW_i^P(t) + \sqrt{1-\rho_{vi}^2}dZ_i^P(t)) \tag{42}$$

其中，参数 κ_i、θ_i、σ_{vi} 以及 γ_i 如上文定义，$\eta_i^P = \lambda_{wi0}$，$\kappa_{xi}^P = \lambda_{wix} - \gamma_i$，$\kappa_{xvi}^P = \lambda_{wiv}$，$\kappa_i^P = \kappa_i - \sigma_{vi}\lambda_{ziv}$ 以及 $\theta_i^P = \dfrac{\kappa_i\theta_i + \sigma_{vi}\lambda_{zi0}}{\kappa_i^P}$，且满足以下条件

$$2\kappa_i\theta_i \geqslant \sigma_{vi}^2 \tag{43}$$

$$2\kappa_i^P\theta_i^P \geqslant \sigma_{vi}^2 \tag{44}$$

由于 $\varphi_i(t)$，$\phi_{ij}^1(t)$，…，$\phi_{ij}^5(t)$ 表达式中不显性含有随机驱动项，因此其所服从的随机过程表达式在概率测度变换过程中并不发生改变.

5　模型实例

本文提出的广义 HJM 模型框架所包含的范畴十分广泛，通过对模型参数进行相应设定即可得到许多重要的利率期限结构模型，以下给出了几个模型实例.

5.1　具有随机波动率的连续时间 Ho-Lee 模型

当 $N=1$，$\alpha_{01}=1$，$\alpha_{11}=0$，$\gamma_1=0$，$\rho_{vi}=0$，且 $W^Q(t)$ 各元素之间互不相关时，由式(A.21)及(7)可知远期利率 $f(t,T)$ 服从以下随机过程

$$df(t,T) = (T-t)v(t)dt + \sqrt{v(t)}d\boldsymbol{W}^Q(t) \tag{45}$$

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma_{v1}\sqrt{v(t)}d\boldsymbol{Z}^Q(t) \tag{46}$$

式(45)和(46)即为具有随机波动率的连续时间 Ho-Lee 模型[27].

5.2　具有随机波动率的 Hull-White 模型

当 $N=1$，$\alpha_{01}=1$，$\alpha_{11}=0$，$\rho_{vi}=0$，且 $W^Q(t)$ 各元素之间互不相关时，由式(A.21)及(7)可知远期利率 $f(t,T)$ 服从以下随机过程

$$df(t,T) = \frac{1}{\gamma_1}(e^{-\gamma_1(T-t)} - e^{-2\gamma_1(T-t)}) \times v(t)dt + \sqrt{v(t)}e^{-\gamma_1(T-t)}d\boldsymbol{W}^Q(t) \tag{47}$$

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma_{v1}\sqrt{v(t)}d\boldsymbol{Z}^Q(t) \tag{48}$$

式(47)和(48)即为文献[28]提出的具有随机波动率的 Hull-White 模型[29].

5.3　广义随机波动模型

当 $W^Q(t)$ 各元素之间互不相关时，由式(A.21)

及(7) 可知远期利率 $f(t,T)$ 服从以下随机过程

$$\mathrm{d}f(t,T) = \left(\sum_{i=1}^{N} v_i(t)\sigma_{fi}(t,T) \times \int_t^T \sigma_{fj}(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N}\sigma_{fi}(t,T)\sqrt{v_i(t)}\,\mathrm{d}W_i^Q(t) \tag{49}$$

$$\mathrm{d}v_i(t) = \kappa_i(\theta_i - v_i(t))\,\mathrm{d}t + \sigma_{vi}\sqrt{v_i(t)} \times \left(\rho_{vi}\mathrm{d}W_i^Q(t) + \sqrt{1-\rho_{vi}^2}\,\mathrm{d}Z_i^Q(t)\right) \tag{50}$$

式(49) 和(50) 即为文献 [30] 提出的广义随机波动模型.

参 考 文 献:

[1] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claim valuation [J]. Econometrica, 1992, 60(1): 77 – 105.

[2] Tchuindjo L. An extended Heath-Jarrow-Morton risk-neutral drift [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(3): 396 – 400.

[3] Andersen T G, Lund J. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate [J]. Journal of Econometrics, 1997, 77(2): 343 – 377.

[4] Ball C A, Torous W N. The stochastic volatility of short-term interest rates: Some international evidence [J]. Journal of Finance, 1999, 54(6): 2339 – 2359.

[5] Collin-Dufresne P, Goldstein R. Do bonds span the fixed income markets? Theory and evidence for unspanned stochastic volatility [J]. Journal of Finance, 2002, 57(4): 1685 – 1730.

[6] Heidari M, Wu L. Are interest rate derivatives spanned by the term structure of interest rates? [J]. Journal of Fixed Income, 2003, 13(1): 75 – 86.

[7] Li H, Zhao F. Unspanned stochastic volatility: Evidence from hedging interest rate drivatives [J]. Journal of Finance, 2006, 61(1): 341 – 378.

[8] Andersen T G, Benzoni L. Can bonds hedge volatility risk in the U.S. treasury market? A specification test for affine term structure models [R]. Illinois: Northwestern University, 2005.

[9] Carverhill A. When is the short rate Markovian? [J]. Mathematical Finance, 1994, 4(4): 305 – 312.

[10] Ritchken P, Sankarasubramanian L. Volatility structures of forward rates and the dynamics of the term structure [J]. Mathematical Finance, 1995, 5(1): 55 – 72.

[11] Bhar R, Chiarella C. Transformation of Heath-Jarrow-Morton models to Markovian systems [J]. European Journal of Finance, 1997, 3(1): 1 – 26.

[12] Inui K, Kijima M. A Markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1998, 33(3): 423 – 440.

[13] de Jong F, Santa-Clara P. The dynamics of the forward interest rate curve: A formulation with state variables [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1999, 34(1): 131 – 157.

[14] Chiarella C, Kwon O. A class of Heath-Jarrow-Morton term structure models with stochastic volatility [R]. Sydney: University of Technology, 1998.

[15] Chiarella C, Kwon O. Square root affine transformations of the Heath-Jarrow-Morton term structure model and partial differential equations [R]. Sydney: University of Technology, 1998.

[16] Bhar R, Chiarella C, El-Hassan N, et al. Reduction of forward rate dependent HJM models to Markovian form: Pricing european bond options [R]. Sydney: University of Technology, 1999.

[17] Chiarella C, Kwon O. Forward rate dependent Markovian transformations of the Heath-Jarrow-Morton term structure model [J]. Finance and Stochastics, 2001, 5(2): 237 – 257.

[18] Björk T, Svensson L. On the existence of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models [J]. Mathematical Finance, 2001, 11(2): 205 – 243.

[19] Björk T, Landén C. On the construction of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models [R]. Stock-

holm: Stockholm School of Economics, 2000.
[20] Chiarella C, Kwon O. Finite dimensional affine realisations of HJM models in terms of forward rates and yields [J]. Review of Derivatives Research, 2003, 6(2): 129 – 155.
[21] 杨宝臣, 苏云鹏. 基于无损卡尔曼滤波的 HJM 模型估计及实证研究 [J]. 管理科学学报, 2010, 13(4): 67 – 75.
Yang Bao-chen, Su Yun-peng. Model calibration of HJM models based on UKF with application [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(4): 67 – 75. (in Chinese)
[22] Cheredito P, Filipovic D, Kimmel R. Market price of risk specifications for affine models: Theory and evidence [J]. Journal of Financial Economics, 2007, 83(1): 123 – 170.
[23] 林 海, 郑振龙. 利率期限结构研究述评 [J]. 管理科学学报, 2007, 10(1): 79 – 93, 98.
Lin Hai, Zheng Zhen-long. Term structure of interest rate: Selected literature review [J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10(1): 79 – 93, 98. (in Chinese)
[24] 李 彪, 杨宝臣. 基于远期利率分解技术的三因子 HJM 模型研究 [J]. 管理科学学报, 2008, 11(6): 112 – 121.
Li Biao, Yang Bao-chen. Empirical study of three-factor HJM model based on forward rate decomposition technique [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(6): 112 – 121. (in Chinese)
[25] 谢 赤. 评价利率期权的远期与即期模型的比较分析 [J]. 管理科学学报, 2001, 4(6): 77 – 82.
Xie Chi. Compare analysis of forward and spot models for valuing interest rate options [J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(6): 77 – 82. (in Chinese)
[26] Dai Q, Singleton K. Specification analysis of affine term structure models [J]. Journal of Finance, 2000, 55(5): 1943 – 1978.
[27] Ho T, Lee S. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims [J]. Journal of Finance, 1986, 41(5): 1011 – 1029.
[28] Casassus J, Collin-Dufresne P, Goldstein R. Unspanned stochastic volatility and fixed income derivatives pricing [J]. Journal of Banking and Finance, 2005, 29(11): 2723 – 2749.
[29] Hull J, White A. Pricing interest-rate-derivative securities [J]. Review of Financial Studies, 1990, 3(4): 573 – 592.
[30] Trolle A B, Schwartz E S. A general stochastic volatility model for the pricing of interest rate derivatives [J]. Review of Financial Studies, 2009, 22(5): 2007 – 2057.

Generalized Heath-Jarrow-Morton model with stochastic volatility and correlated factors

YANG Bao-chen, SU Yun-peng
College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract: Heath-Jarrow-Morton model is generalized by extending the no-arbitrage drift restriction with nonzero instantaneous correlations between volatility factors and setting forward rate volatilities subject to generalized mean-reverting square-root processes and correlated with innovations to forward rates. In the framework above, the dynamics of the term structure under the risk-neutral probability measure are described in terms of a finite number of state variables that jointly follow an affine diffusion process under a certain volatility specification, and a quasi-analytical formula for zero coupon bond prices is derived based on transform techniques. Then the result is further generalized to the case under the actual probability measure through the extended affine market price of risk specification.

Key words: Heath-Jarrow-Morton model; stochastic volatility; correlation; Markovian transformation; affine realization

附录 A

为简便起见,不妨令

$$V(t,T) = [\sigma_{f1}(t,T)\sqrt{v_1(t)}, \sigma_{f2}(t,T)\sqrt{v_2(t)}, \cdots, \sigma_{fN}(t,T)\sqrt{v_N(t)}]' \tag{A.1}$$

则式(6)可改写为

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + V(t,T)'dW^Q(t) \tag{A.2}$$

由式(4)可知

$$df(t,T) = [\mu(t,T) - V(t,T)'\Lambda(t)]dt + V(t,T)'dW^P(t) \tag{A.3}$$

令 $\alpha(t,T) = \mu(t,T) - V(t,T)'\Lambda(t)$,则式(A.3)可改写为

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + V(t,T)'dW^P(t) \tag{A.4}$$

式(A.4)可进一步改写为随机积分形式

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t V(s,T)'dW^P(s) \tag{A.5}$$

假设在时刻 t 到期时刻为 T 的零息债券价格可表示为 $B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)$,则由莱布尼兹微分法则可知

$$d(\ln B(t,T)) = \left[f(t,t) - \int_t^T \frac{\partial}{\partial t}f(t,s)ds\right]dt = f(t,t)dt - \int_t^T df(t,s)ds \tag{A.6}$$

分别利用式(A.5)和(A.4)表示 $f(t,t)$ 和 $df(t,s)$ 并代入式(A.6)中,可得

$$d(\ln B(t,T)) = f(0,t)dt + \int_0^t \alpha(s,t)dsdt + \int_0^t V(s,T)'dW^P(s)dt - \int_t^T \alpha(t,s)dtds + \int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds \tag{A.7}$$

整理式(A.7)可得

$$d(\ln B(t,T)) = \left[f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t V(s,t)'dW^P(s) - \int_t^T \alpha(t,s)ds\right]dt - \int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds \tag{A.8}$$

对式(A.8)应用伊藤定理可得零息债券价格的随机微分方程

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left[f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t V(s,t)'dW^P(s) - \int_t^T \alpha(t,s)ds\right]dt - \int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds\right)^2 \tag{A.9}$$

又由于 $\int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds$ 为标量,因此有

$$\begin{aligned}\left(\int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds\right)^2 &= \left[\left(\int_t^T V(t,s)'d\right)dW^P(t)\right]\left[(dW^P(t))'\left(\int_t^T V(t,s)ds\right)\right] \\ &= \left(\int_t^T V(t,s)'ds\right)[dW^P(t)(dW^P(t))']\left(\int_t^T V(t,s)ds\right)\end{aligned} \tag{A.10}$$

由 $dW^P(t)(dW^P(t))' = dW^Q(t)(dW^Q(t))' = K(t)dt$ 可知②

$$\left(\int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds\right)^2 = \left(\int_t^T V(t,s)'ds\right)K(t)\left(\int_t^T V(t,s)ds\right)dt \tag{A.11}$$

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left[f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t V(s,t)'dW^P(s) - \int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T V(t,s)'ds\right)K(t)\left(\int_t^T V(t,s)ds\right)\right]dt - \int_t^T V(t,s)'dW^P(t)ds \tag{A.12}$$

在 n 维希尔伯特空间 H^n 上定义算子 D,使得对于所有 $V(\cdot,\cdot) \in H^n$,均有

$$D[V(t,T)] = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds - \int_t^T \alpha(t,s)ds + \int_0^t V(s,t)'dW^P(s) + \frac{1}{2}\left(\int_t^T V(t,s)'ds\right)K(t)\left(\int_t^T V(t,s)ds\right) \tag{A.13}$$

由希尔伯特空间表示定理可知,存在 n 维有界随机过程 $\tilde{\Lambda}(t)$,$t \in [0,T]$,使得

$$D[V(t,T)] = (\tilde{\Lambda}(t))'\int_t^T V(t,s)ds \tag{A.14}$$

---

② 参见文献[2]中定理1

由式(A.13)及(A.14)可知

$$(\hat{\boldsymbol{\Lambda}}(t))'\int_t^T \boldsymbol{V}(t,s)\,\mathrm{d}s = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\,\mathrm{d}s - \int_t^T \alpha(t,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \boldsymbol{V}(s,t)'\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(s) + \frac{1}{2}\boldsymbol{K}(t)\int_t^T \boldsymbol{V}(t,s)'\mathrm{d}s\int_t^T \boldsymbol{V}(t,s)\,\mathrm{d}s \tag{A.15}$$

由式(A.14)可知,$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}(t)$表示债券价格变动漂移率与波动风险之间的比率,也即市场风险价格,因此有

$$\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{t}) = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}(t) \tag{A.16}$$

对式(A.15)两边同时关于 T 进行微分,整理可得

$$\alpha(t,T) = (\boldsymbol{V}(t,T))'\boldsymbol{K}(t)\int_t^T \boldsymbol{V}(t,s)\,\mathrm{d}s - (\boldsymbol{V}(t,T))'\boldsymbol{\Lambda}(t) \tag{A.17}$$

将式(A.17)代入式(A.4)中,可得

$$\mathrm{d}f(t,T) = \left[(\boldsymbol{V}(t,T))'\boldsymbol{K}(t)\int_t^T \boldsymbol{V}(t,s)\,\mathrm{d}s - (\boldsymbol{V}(t,T))'\boldsymbol{\Lambda}(t)\right]\mathrm{d}t + \boldsymbol{V}(t,T)'\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t) \tag{A.18}$$

也即

$$\mathrm{d}f(t,T) = \left[(\boldsymbol{V}(t,T))'\boldsymbol{K}(t)\int_t^T \boldsymbol{V}(t,s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + \boldsymbol{V}(t,T)'(\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{\Lambda}(t)\,\mathrm{d}t) \tag{A.19}$$

由式(4)可知

$$\mathrm{d}f(t,T) = \left[(\boldsymbol{V}(t,T))'\boldsymbol{K}(t)\int_t^T \boldsymbol{V}(t,s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + \boldsymbol{V}(t,T)'\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{Q}}(t) \tag{A.20}$$

也即

$$\mathrm{d}f(t,T) = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\rho_{ij}(t)\sqrt{v_i v_j}\,\sigma_{\mathrm{f}i}(t,T)\int_t^T \sigma_{\mathrm{f}j}(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N}\sigma_{\mathrm{f}i}(t,T)\sqrt{v_i(t)}\,\mathrm{d}W_i^{\mathrm{Q}}(t) \tag{A.21}$$

命题得证.　证毕.

附录 B

将式(12)代入式(8)中,整理可得

$$\mu(t,T) = \rho_{ij}(t)\sqrt{v_i(t)v_j(t)}\left\{\frac{\alpha_{0i}}{\gamma_j}\left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right)(\mathrm{e}^{-\gamma_i(T-t)} - \mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)(T-t)}) - \frac{\alpha_{0i}\alpha_{1j}}{\gamma_j}(T-t)\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)(T-t)} + \right.$$
$$\left.\frac{\alpha_{1i}}{\gamma_j}\left(\alpha_{0j} + \frac{\alpha_{1j}}{\gamma_j}\right)(T-t)(\mathrm{e}^{-\gamma_i(T-t)} - \mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)(T-t)}) - \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\gamma_j}(T-t)^2\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)(T-t)}\right\} \tag{B.1}$$

由式(B.1)可知远期利率曲线可表示为

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \mu(s,T)\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t \sigma_{\mathrm{f}i}(s,T)\sqrt{v_i(s)}\,\mathrm{d}W_i^{\mathrm{Q}}(s) \\ &= f(0,T) + \sum_{i=1}^{N} C_{x_i}(T-t)x_i(t) + \sum_{i=1}^{N} C_{\varphi_i}(T-t)\varphi_i(t) + \sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{\phi_{ij}}^{k}(T-t)\phi_{ij}^{k} \end{aligned} \tag{B.2}$$

其中,$C_{x_i}(T-t)$,$C_{\varphi_i}(T-t)$,$C_{\phi_{ij}}^{1}(T-t)$,…,$C_{\phi_{ij}}^{5}(T-t)$.由式(14)-(20)定义,且有

$$x_i(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(s)}\,\mathrm{e}^{-\gamma_i(t-s)}\,\mathrm{d}W_i^{\mathrm{Q}}(s) \tag{B.3}$$

$$\varphi_i(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(s)}\,(t-s)\,\mathrm{e}^{-\gamma_i(t-s)}\,\mathrm{d}W_i^{\mathrm{Q}}(s) \tag{B.4}$$

$$\phi_{ij}^{1}(t) = \int_0^t \rho_{ij}(s)\sqrt{v_i(s)v_j(s)}\,\mathrm{e}^{-\gamma_i(t-s)}\,\mathrm{d}s \tag{B.5}$$

$$\phi_{ij}^{2}(t) = \int_0^t \rho_{ij}(s)\sqrt{v_i(s)v_j(s)}\,\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)(t-s)}\,\mathrm{d}s \tag{B.6}$$

$$\phi_{ij}^{3}(t) = \int_0^t \rho_{ij}(s)\sqrt{v_i(s)v_j(s)}\,(t-s)\,\mathrm{e}^{-\gamma_i(t-s)}\,\mathrm{d}s \tag{B.7}$$

$$\phi_{ij}^{4}(t) = \int_0^t \rho_{ij}(s)\sqrt{v_i(s)v_j(s)} \times (t-s)\,\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)(t-s)}\,\mathrm{d}s \tag{B.8}$$

$$\phi_{ij}^{5}(t) = \int_0^t \rho_{ij}(s)\sqrt{v_i(s)v_j(s)} \times (t-s)^2\,\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)(t-s)}\,\mathrm{d}s \tag{B.9}$$

对式(B.3)-(B.9)应用伊藤定理进行微分即可得式(21)-式(27).命题得证.　证毕.